# Programme de colles n° 25

Semaine du 15/04/2024 au 19/04/2024

☞ ***Espaces vectoriels, dimension finie*** ☜

**Nouveau format de la colle :**

- Automatismes de calcul (env. 10 min) : quelques items simples parmi les thèmes de la liste (actualisée chaque semaine) en page 2.
- Restitution du cours (env. 15 min) : définition et/ou théorème des chapitres au programme, puis démonstrations, exemples ou exercices exigibles listés plus bas.
- Exercice(s) libre(s) (env 30 min).

## — Chapitre 21 — Espaces vectoriels —

**1 Des vecteurs du plan aux espaces vectoriels**
- 1.1 Introduction
- 1.2 Les vecteurs du plan $\mathbb{R}^2$ et de l'espace $\mathbb{R}^3$
- 1.3 Généralisation à $\mathbb{K}^n$
- 1.4 La notion de $\mathbb{K}$-espace vectoriel
- 1.5 Espaces vectoriels usuels (♡♡♡)
- 1.6 Règles de calcul
- 1.7 Combinaisons linéaires

**2 Sous-espaces vectoriels**
- 2.1 Définition, exemples, cas du noyau et de l'image d'une application linéaire (la définition a été donnée dans le but de reconnaître des noyaux ou images).
- 2.2 Intersection de sous-espaces vectoriels
- 2.3 Sous-espace vectoriel engendré par une famille finie, c'est le plus petit s.e.v. contenant la famille.

**3 Familles libres, génératrices, bases**
- 3.1 Famille génératrice
- 3.2 Familles libres, familles liées, cas particulier des familles étagées de polynômes
- 3.3 Base d'un espace vectoriel

**4 Somme de sous-espaces vectoriels**
- 4.1 Somme de deux sous espaces vectoriels
- 4.2 Somme directe
- 4.3 Sous-espaces vectoriels supplémentaires

## — Chapitre 22 — Espaces vectoriels de dimension finie —

**1 Dimension d'un espace vectoriel**
- 1.1 Espace vectoriel de dimension finie
- 1.2 Existence d'une base en dimension finie
- 1.3 Dimension d'un espace vectoriel
- 1.4 Conséquences sur les familles de vecteurs, caractérisation des bases parmi les familles de cardinal égal à la dimension, application au cas de la dimension infinie

### Démonstrations, exemples ou exercices exigibles comme questions de cours

- Chapitre 21. Théorème 1 : image et noyau d'une application linéaire sont des sous-espaces vectoriels.
- Chapitre 21. Proposition 6 : $\mathrm{Vect}(u_1, \ldots, u_p)$ est un sous-espace vectoriel et c'est le plus petit contenant $u_1, \ldots, u_p$ au sens de l'inclusion.
- Chapitre 21. Proposition 12 : toute famille finie de polynômes **non nuls** échelonnée en degré est libre dans $\mathbb{K}[X]$.
- Chapitre 21. Proposition 13 : 3 caractérisations du fait que deux sous-espaces vectoriels $F$ et $G$ sont en somme directe.

***À venir : espaces vectoriels, développements limités***

# Automatismes de calcul

*On donne quelques exemples de capacité attendue pour chaque thème.*
*Le cahier de calcul fournit également une excellente source d'entraînement/inspiration.*

- **Trigonométrie.**
  *Exemples : formule* $\cos(2a)$, *résolution de* $\sin a = \sin b$.

- **Calcul élémentaire de nombres complexes** (module, argument, etc).
  *Exemples : calculer la forme exponentielle de* $\sqrt{3} - \mathrm{i}$, *résolution de* $z^n = 1$ *dans* $\mathbb{C}$.

- **Calcul algébrique** (fractions, simplification d'expressions, sommes et produits usuels, coefficients binomiaux, formule du binôme, etc).
  *Exemples : donner la formule pour* $\sum\limits_{k=1}^{n} q^k$, *calculer* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$.

- **Définition, dérivée ou primitive d'une fonction usuelle.**
  *Exemples : définir* Arctan, *simplifier* $\mathrm{Arccos}\,(\cos(7))$, *théorème de dérivation de* $g \circ f$, *dérivée de* $x \longmapsto f(-x)$, *donner une primitive de* $x \longmapsto \dfrac{x}{2x+1}$, *ensemble de définition, de dérivabilité et dérivée de* $x \longmapsto \mathrm{Arccos}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$.

- **IPP ou changement de variable simple.**
  *Exemples : calculer* $\displaystyle\int_0^1 t\mathrm{e}^t \,\mathrm{d}t$, *calculer* $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$ *en posant* $t = \sin x$.

- **Décomposition en éléments simples des fractions rationnelles à pôles simples.**
  *Exemple : décomposer* $\dfrac{1}{1-x^2}$ *pour tout* $x \neq \pm 1$, $\dfrac{x^4+1}{x^3-x}$ *pour* $x \neq 0; \pm 1$.

- **Équations différentielles.**
  *Exemple : résoudre* $xy' + y = x$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$.

- **Suites récurrentes d'ordre 1 et 2.**
  *Exemples : expression de la suite vérifiant* $u_{n+1} = 2u_n + 1$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et* $u_0 = 1$, *expression de la suite vérifiant* $v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et* $v_0 = v_1 = 1$.

- **Limites de suites.**
  *Exemples :* $\lim \sqrt[n]{n}$, $\lim \dfrac{3^n - 2^n}{4^n - 5^n}$, $\lim \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$, $\lim \dfrac{1}{n^2} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor$, *adjacence des suites définies par* $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ *et* $T_n = S_n + \dfrac{1}{n}$.

- **Matrices.**
  *Exemples : puissances de* $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, *de* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, *calcul de* $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$, *de* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}^{-1}$.

- **Compléments de dérivation** : formule de Leibniz, obtenir des inégalités par les accroissements finis.
  *Exemples : dérivée n-ième de* $x \longmapsto x^2\mathrm{e}^{-x}$, $|\mathrm{Arctan}\, x - \mathrm{Arctan}\, y| \leqslant |x - y|$ *pour tous* $x,y$, $\dfrac{x}{x+1} < \ln(1+x) < x$ *pour tout* $x > 0$.

- **Espaces vectoriels** : montrer rapidement que des ensembles sont des s.e.v. et en donner une base, en particulier pour l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène, de droites, plans ou d'intersections de tels ensembles dans $\mathbb{K}^n$, des s.e.v de polynômes, etc.
  *Exemples :* $\left\{\alpha X^3 + \beta X + \alpha + \beta \mid \alpha,\beta \in \mathbb{R}\right\}$, $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\right\}$,
  $\left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y + z - t = 0 \quad \text{et} \quad 2x + 4y + z + 3t = 0\right\}$.