Programme de colles n° 27

Semaine du 13/05/2024 au 17/05/2024

☞ ***Applications linéaires*** ☜

⚠ **Nouveau format de la colle :**

- Automatismes de calcul (env. 10 min) : quelques items simples parmi les thèmes de la liste (actualisée chaque semaine) en page 2.
- Restitution du cours (env. 15 min) : définition et/ou théorème des chapitres au programme, puis démonstrations, exemples ou exercices exigibles listés plus bas.
- Exercice(s) libre(s) (env 30 min).

— Chapitre 23 — Applications linéaires —

1 L'espace vectoriel $\mathscr{L}(E,F)$

1.1 Définitions, exemples

1.2 Exemples de référence

1.3 Définir une application linéaire par image d'une base

1.4 Définir une application linéaire par restriction à un s.e.v., ou à deux s.e.v. supplémentaires

1.5 Opérations entre applications linéaires, combinaisons linéaires, compositions

1.6 Endomorphismes : commutation, puissances

2 Noyau, image

2.1 Image d'un sous-espace vectoriel, calcul par l'image d'une famille génératrice, image d'une matrice

2.2 Noyau, lien avec l'injectivité, noyau d'une matrice

2.3 Équations linéaires

3 Projecteurs, symétries

3.1 Projecteurs : définition géométrique, caractérisation comme les endomorphismes vérifiant $p^2 = p$

3.2 Symétries : définition géométrique, caractérisation comme les endomorphismes vérifiant $s^2 = \mathrm{Id}_E$

4 Isomorphismes

4.1 Généralités, réciproque, composée

4.2 Isomorphismes en dimensions finies : injectivité, surjectivité, bijectivité et image d'une base

Démonstrations, exemples ou exercices exigibles comme questions de cours

- Chapitre 23. Proposition 11 : $u \in \mathscr{L}(E,F)$ est injective *ssi* $\operatorname{Ker} u = \{0_E\}$.
- Chapitre 23. Proposition 12 : $p \in \mathscr{L}(E)$ est un projection si et seulement $p^2 = p$ (avec détermination des sous-espaces caractéristiques de la projection $\operatorname{Im} p$ et $\operatorname{Ker} p$).
- Chapitre 23. Proposition 14 : si u est un isomorphisme de E sur F, alors u^{-1} est un isomorphisme de F sur E.

À venir : applications linéaires (suite et fin), développements limités.

Automatismes de calcul

On donne quelques exemples de capacité attendue pour chaque thème.
Le cahier de calcul fournit également une excellente source d'entraînement/inspiration.

- **Trigonométrie.**
  Exemples : formule $\cos(2a)$, *résolution de* $\sin a = \sin b$.

- **Calcul élémentaire de nombres complexes** (module, argument, etc).
  Exemples : calculer la forme exponentielle de $\sqrt{3} - \mathrm{i}$, *résolution de* $z^n = 1$ *dans* $\mathbb{C}$.

- **Calcul algébrique** (fractions, simplification d'expressions, sommes et produits usuels, coefficients binomiaux, formule du binôme, etc).
  Exemples : donner la formule pour $\sum_{k=1}^{n} q^k$, *calculer* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$.

- **Définition, dérivée ou primitive d'une fonction usuelle.**
  Exemples : définir Arctan , *simplifier* $\operatorname{Arccos}(\cos(7))$, *théorème de dérivation de* $g \circ f$, *dérivée de* $x \longmapsto f(-x)$, *donner une primitive de* $x \longmapsto \dfrac{x}{2x+1}$, *ensemble de définition, de dérivabilité et dérivée de* $x \longmapsto \operatorname{Arccos}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$.

- **IPP ou changement de variable simple.**
  Exemples : calculer $\displaystyle\int_0^1 t\mathrm{e}^{t}\,\mathrm{d}t$, *calculer* $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$ *en posant* $t = \sin x$.

- **Décomposition en éléments simples des fractions rationnelles à pôles simples.**
  Exemple : décomposer $\dfrac{1}{1-x^2}$ *pour tout* $x \neq \pm 1$, $\dfrac{x^4+1}{x^3-x}$ *pour* $x \neq 0; \pm 1$.

- **Équations différentielles.**
  Exemple : résoudre $xy' + y = x$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$.

- **Suites récurrentes d'ordre 1 et 2.**
  Exemples : expression de la suite vérifiant $u_{n+1} = 2u_n + 1$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et* $u_0 = 1$, *expression de la suite vérifiant* $v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et* $v_0 = v_1 = 1$.

- **Limites de suites.**
  Exemples : $\lim \sqrt[n]{n}$, $\lim \dfrac{3^n - 2^n}{4^n - 5^n}$, $\lim \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$, $\lim \dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor$, *adjacence des suites définies par* $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ *et* $T_n = S_n + \dfrac{1}{n}$.

- **Matrices.**
  Exemples : puissances de $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, *de* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, *calcul de* $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$, *de* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}^{-1}$.

- **Compléments de dérivation** : formule de Leibniz, obtenir des inégalités par les accroissements finis.
  Exemples : dérivée n-ième de $x \longmapsto x^2\mathrm{e}^{-x}$, $|\operatorname{Arctan} x - \operatorname{Arctan} y| \leqslant |x - y|$ *pour tous* x,y, $\dfrac{x}{x+1} < \ln(1+x) < x$ *pour tout* $x > 0$.

- **Espaces vectoriels** : montrer rapidement que des ensembles sont des s.e.v. et en donner une base, en particulier pour l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène, de droites, plans ou d'intersections de tels ensembles dans $\mathbb{K}^n$, des s.e.v de polynômes, etc.
  Exemples : $\{\alpha X^3 + \beta X + \alpha + \beta \mid \alpha,\beta \in \mathbb{R}\}$, $\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$,
  $\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y + z - t = 0 \quad \text{et} \quad 2x + 4y + z + 3t = 0\}$.

- **Applications linéaires** : calculer l'image ou le noyau d'une matrice.