

PROGRAMME DE COLLES N° 29

Semaine du 27/05/2024 au 31/05/2024

👉 *Applications linéaires, DL, dénombrement* 👈

Nota bene Pour la suite des colles, les automatismes de calcul seront élaborés à base d'algèbre linéaire, développements limités et dénombrement.

— Chapitre 23 — Applications linéaires —

Révisions du programme précédent en automatisme de calcul ou énoncé de définition ou théorème.

— Chapitre 24 — Développements limités —

1 Développement limité de f au voisinage de a

- 1.1 Définition et premières propriétés : unicité, partie régulière, troncature
- 1.2 Primitivation d'un développement limité
- 1.3 Formule de Taylor-Young
- 1.4 Opérations entre développements limités : méthodes et exemples pour les combinaisons linéaires, pour les produits et puissances, pour les compositions, pour les quotients

2 Applications des développements limités

- 2.1 Limite, continuité, équivalent
- 2.2 Dérivabilité, tangente, extrema
- 2.3 Développements asymptotiques, exemples
- 2.4 Asymptote en $\pm\infty$

— Chapitre 25 — Probabilités —

Seulement des rappels de dénombrement cette semaine.

1 Rappels de dénombrement : listes, arrangements, combinaisons, cardinal des parties, principe multiplicatif, cardinal de F^E , des permutations de E , d'une union disjointe, d'un produit cartésien

Démonstrations, exemples ou exercices exigibles comme questions de cours

- Chapitre 24. Proposition 2 : formule de Taylor-Young.
- Chapitre 24. Exemple 17 : à l'aide de DL, montrer que la fonction définie sur \mathbb{R}^* par $f(x) = \frac{x}{e^{-x} - 1}$ se prolonge par continuité en 0 et son prolongement est dérivable en 0, donner l'équation de la tangente en 0.
- Chapitre 25. Rappels de dénombrement exercice 10 : donner une démonstration combinatoire de l'égalité

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$$

À venir : probabilités.

Automatismes de calcul

On donne quelques exemples de capacité attendue pour chaque thème.

[Le cahier de calcul](#) fournit également une excellente source d'entraînement/inspiration.

- **Trigonométrie.**

Exemples : formule $\cos(2a)$, résolution de $\sin a = \sin b$.

- **Calcul élémentaire de nombres complexes** (module, argument, etc).

Exemples : calculer la forme exponentielle de $\sqrt{3} - i$, résolution de $z^n = 1$ dans \mathbb{C} .

- **Calcul algébrique** (fractions, simplification d'expressions, sommes et produits usuels, coefficients binomiaux, formule du binôme, etc).

Exemples : donner la formule pour $\sum_{k=1}^n q^k$, calculer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k$.

- **Définition, dérivée ou primitive d'une fonction usuelle.**

Exemples : définir Arctan , simplifier $\text{Arccos}(\cos(7))$, théorème de dérivation de $g \circ f$, dérivée de $x \mapsto f(-x)$, donner une primitive de $x \mapsto \frac{x}{2x+1}$, ensemble de définition, de dérivabilité et dérivée de $x \mapsto \text{Arccos}\left(\frac{x}{x+1}\right)$.

- **IPP ou changement de variable simple.**

Exemples : calculer $\int_0^1 te^t dt$, calculer $\int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt$ en posant $t = \sin x$.

- **Décomposition en éléments simples des fractions rationnelles à pôles simples.**

Exemple : décomposer $\frac{1}{1-x^2}$ pour tout $x \neq \pm 1$, $\frac{x^4+1}{x^3-x}$ pour $x \neq 0; \pm 1$.

- **Équations différentielles.**

Exemple : résoudre $xy' + y = x$ sur \mathbb{R}_+^* .

- **Suites récurrentes d'ordre 1 et 2.**

Exemples : expression de la suite vérifiant $u_{n+1} = 2u_n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u_0 = 1$, expression de la suite vérifiant $v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $v_0 = v_1 = 1$.

- **Limites de suites.**

Exemples : $\lim \sqrt[n]{n}$, $\lim \frac{3^n - 2^n}{4^n - 5^n}$, $\lim \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$, $\lim \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n [kx]$, adjacence des suites définies par

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \text{ et } T_n = S_n + \frac{1}{n}.$$

- **Matrices.**

Exemples : puissances de $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcul de $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$, de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}^{-1}$.

- **Compléments de dérivation** : formule de Leibniz, obtenir des inégalités par les accroissements finis.

Exemples : dérivée n -ième de $x \mapsto x^2 e^{-x}$, $|\text{Arctan } x - \text{Arctan } y| \leq |x - y|$ pour tous x, y , $\frac{x}{x+1} < \ln(1+x) < x$ pour tout $x > 0$.

- **Espaces vectoriels** : montrer rapidement que des ensembles sont des s.e.v. et en donner une base, en particulier pour l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène, de droites, plans ou d'intersections de tels ensembles dans \mathbb{K}^n , des s.e.v de polynômes, etc.

Exemples : $\{\alpha X^3 + \beta X + \alpha + \beta \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$, $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$, $\mathcal{A}_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$
 $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y + z - t = 0 \text{ et } 2x + 4y + z + 3t = 0\}$.

- **Applications linéaires** : calculer l'image ou le noyau d'une matrice.

- **DL** : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$?

- **Dénombrément** : combien de trinômes différents en PCSI ?