# Programme de colles n° 30

Semaine du 03/06/2024 au 07/06/2024

☞ ***Probabilités et variables aléatoires*** ☜

**Nota bene** Pour la suite des colles, les automatismes de calcul seront élaborés à base d'algèbre linéaire, développements limités et dénombrement.

## — Chapitre 25 — Probabilités —

Tout le chapitre.

**1 Rappels de dénombrement : listes, arrangements, combinaisons, cardinal des parties, principe multiplicatif, cardinal de $F^E$, des permutations de $E$, d'une union disjointe, d'un produit cartésien**

**2 Généralités**
- 2.1 Expérience aléatoire, univers, événements
- 2.2 Variable aléatoire

**3 Probabilité sur un univers fini**
- 3.1 Approche fréquentiste
- 3.2 Axiomatique de Kolmogorov, propriétés élémentaires
- 3.3 Loi de probabilité
- 3.4 Équiprobabilité

**4 Loi d'une variable aléatoire**
- 4.1 Loi d'une variable aléatoire
- 4.2 Image d'une variable aléatoire
- 4.3 Lois usuelles de variables aléatoires : loi uniforme, expérience et loi de Bernoulli, loi binomiale
- 4.4 Loi de familles de variables aléatoires

**5 Probabilités conditionnelles**
- 5.1 Définitions
- 5.2 Calcul de probabilités par conditionnements : 3 formules de décompositions (probabilités composées, probas totales, et formules de Bayes
- 5.3 Lois conditionnelles d'une variable aléatoire

**6 Indépendance**
- 6.1 Indépendance d'événements
- 6.2 Indépendance de variables aléatoires : 2 à 2, mutuellement
- 6.3 La loi binomiale comme somme de Bernoulli indépendantes

**Démonstrations, exemples ou exercices exigibles comme questions de cours**

- Proposition 9. La probabilité conditionnelle sachant un événement $B$ non négligeable est une probabilité sur $\Omega$.
- Proposition-définition 6. Indépendance de 2 variables aléatoires : équivalence entre l'indépendance des événements $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ pour tous $A \subset X(\Omega)$,$B \subset Y(\Omega)$ et l'indépendance des événements $(X = x)$ et $(Y = y)$ pour tous $x \in X(\Omega)$,$y \in Y(\Omega)$.
- Théorème 9. Loi de la somme de $n$ variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de même paramètre.

***À venir : probabilités, matrices d'applications linéaires.***

# Automatismes de calcul

*On donne quelques exemples de capacité attendue pour chaque thème.*
*Le cahier de calcul fournit également une excellente source d'entraînement/inspiration.*

- **Trigonométrie.**
  *Exemples : formule* $\cos(2a)$, *résolution de* $\sin a = \sin b$.

- **Calcul élémentaire de nombres complexes** (module, argument, etc).
  *Exemples : calculer la forme exponentielle de* $\sqrt{3} - \mathrm{i}$, *résolution de* $z^n = 1$ *dans* $\mathbb{C}$.

- **Calcul algébrique** (fractions, simplification d'expressions, sommes et produits usuels, coefficients binomiaux, formule du binôme, etc).
  *Exemples : donner la formule pour* $\sum\limits_{k=1}^{n} q^k$, *calculer* $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^k$.

- **Définition, dérivée ou primitive d'une fonction usuelle.**
  *Exemples : définir* $\operatorname{Arctan}$, *simplifier* $\operatorname{Arccos}(\cos(7))$, *théorème de dérivation de* $g \circ f$, *dérivée de* $x \longmapsto f(-x)$, *donner une primitive de* $x \longmapsto \dfrac{x}{2x+1}$, *ensemble de définition, de dérivabilité et dérivée de* $x \longmapsto \operatorname{Arccos}\left(\dfrac{x}{x+1}\right)$.

- **IPP ou changement de variable simple.**
  *Exemples : calculer* $\displaystyle\int_0^1 t\mathrm{e}^{t}\,\mathrm{d}t$, *calculer* $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$ *en posant* $t = \sin x$.

- **Décomposition en éléments simples des fractions rationnelles à pôles simples.**
  *Exemple : décomposer* $\dfrac{1}{1-x^2}$ *pour tout* $x \neq \pm 1$, $\dfrac{x^4+1}{x^3-x}$ *pour* $x \neq 0; \pm 1$.

- **Équations différentielles.**
  *Exemple : résoudre* $xy' + y = x$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$.

- **Suites récurrentes d'ordre 1 et 2.**
  *Exemples : expression de la suite vérifiant* $u_{n+1} = 2u_n + 1$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et* $u_0 = 1$, *expression de la suite vérifiant* $v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$ *et* $v_0 = v_1 = 1$.

- **Limites de suites.**
  *Exemples :* $\lim \sqrt[n]{n}$, $\lim \dfrac{3^n - 2^n}{4^n - 5^n}$, $\lim \left(1 + \dfrac{x}{n}\right)^n$, $\lim \dfrac{1}{n^2} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \lfloor kx \rfloor$, *adjacence des suites définies par*
  $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k^2}$ *et* $T_n = S_n + \dfrac{1}{n}$.

- **Matrices.**
  *Exemples : puissances de* $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, *de* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, *calcul de* $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$, *de* $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}^{-1}$.

- **Compléments de dérivation** : formule de Leibniz, obtenir des inégalités par les accroissements finis.
  *Exemples : dérivée n-ième de* $x \longmapsto x^2 \mathrm{e}^{-x}$, $|\operatorname{Arctan} x - \operatorname{Arctan} y| \leqslant |x - y|$ *pour tous* $x,y$, $\dfrac{x}{x+1} < \ln(1+x) < x$ *pour tout* $x > 0$.

- **Espaces vectoriels** : montrer rapidement que des ensembles sont des s.e.v. et en donner une base, en particulier pour l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène, de droites, plans ou d'intersections de tels ensembles dans $\mathbb{K}^n$, des s.e.v de polynômes, etc.
  *Exemples :* $\left\{\alpha X^3 + \beta X + \alpha + \beta \mid \alpha,\beta \in \mathbb{R}\right\}$, $\left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\right\}$, $\mathcal{A}_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$
  $\left\{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y + z - t = 0 \quad \text{et} \quad 2x + 4y + z + 3t = 0\right\}$.

- **Applications linéaires** : calculer l'image ou le noyau d'une matrice.

- **DL** : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x - x}{x^3}$ ?

- **Dénombrement** : combien de trinômes différents en PCSI ?