

ULTIME PROGRAMME DE COLLES N° 31

Semaine du 10/06/2024 au 14/06/2024

☞ *Probabilités et variables aléatoires, matrices
d'applications linéaires* ☞

Nota bene Les automatismes de calcul seront élaborés à base d'algèbre linéaire, développements limités et dénombrement.

— Chapitre 25 — Probabilités —

Révisions du programme précédent.

— Chapitre 26 — Matrices d'applications linéaires —

1 Représentation matricielle des applications linéaires

- 1.1 Matrice d'un vecteur ou d'une famille de vecteurs dans une base
- 1.2 Application linéaire canoniquement associée à une matrice (rappels et compléments)
- 1.3 Matrice d'une application linéaire dans un couple de bases
- 1.4 Détermination d'une application linéaire par une matrice
- 1.5 Composition d'applications linéaires et produit matriciel
- 1.6 Isomorphisme et inversibilité de matrice

2 Changements de bases

- 2.1 Matrice de passage entre bases
- 2.2 Formules de changement de base
- 2.3 Matrices semblables
- 2.4 Complément : endomorphismes et matrices diagonalisables

Démonstrations, exemples ou exercices exigibles comme questions de cours

- Chapitre 25. Théorème 9. Loi de la somme de n variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de même paramètre.
- Chapitre 26. Exemple 6. Si E est un \mathbb{K} -e.v. de dimension 2, et $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifie $u^2 = 0$ et $u \neq 0$, alors il existe une base de E dans laquelle la matrice de u est $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- Chapitre 26. Théorème 4. Formule de changement de base pour une application linéaire.

Automatismes de calcul

On donne quelques exemples de capacité attendue pour chaque thème.

[Le cahier de calcul](#) fournit également une excellente source d'entraînement/inspiration.

- **Trigonométrie.**

Exemples : formule $\cos(2a)$, résolution de $\sin a = \sin b$.

- **Calcul élémentaire de nombres complexes** (module, argument, etc).

Exemples : calculer la forme exponentielle de $\sqrt{3} - i$, résolution de $z^n = 1$ dans \mathbb{C} .

- **Calcul algébrique** (fractions, simplification d'expressions, sommes et produits usuels, coefficients binomiaux, formule du binôme, etc).

Exemples : donner la formule pour $\sum_{k=1}^n q^k$, calculer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k$.

- **Définition, dérivée ou primitive d'une fonction usuelle.**

Exemples : définir Arctan , simplifier $\text{Arccos}(\cos(7))$, théorème de dérivation de $g \circ f$, dérivée de $x \mapsto f(-x)$, donner une primitive de $x \mapsto \frac{x}{2x+1}$, ensemble de définition, de dérivabilité et dérivée de $x \mapsto \text{Arccos}\left(\frac{x}{x+1}\right)$.

- **IPP ou changement de variable simple.**

Exemples : calculer $\int_0^1 te^t dt$, calculer $\int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt$ en posant $t = \sin x$.

- **Décomposition en éléments simples des fractions rationnelles à pôles simples.**

Exemple : décomposer $\frac{1}{1-x^2}$ pour tout $x \neq \pm 1$, $\frac{x^4+1}{x^3-x}$ pour $x \neq 0; \pm 1$.

- **Équations différentielles.**

Exemple : résoudre $xy' + y = x$ sur \mathbb{R}_+^* .

- **Suites récurrentes d'ordre 1 et 2.**

Exemples : expression de la suite vérifiant $u_{n+1} = 2u_n + 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $u_0 = 1$, expression de la suite vérifiant $v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $v_0 = v_1 = 1$.

- **Limites de suites.**

Exemples : $\lim \sqrt[n]{n}$, $\lim \frac{3^n - 2^n}{4^n - 5^n}$, $\lim \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$, $\lim \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n [kx]$, adjacence des suites définies par

$$S_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \text{ et } T_n = S_n + \frac{1}{n}.$$

- **Matrices.**

Exemples : puissances de $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, calcul de $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}^{-1}$, de $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}^{-1}$.

- **Compléments de dérivation** : formule de Leibniz, obtenir des inégalités par les accroissements finis.

Exemples : dérivée n -ième de $x \mapsto x^2 e^{-x}$, $|\text{Arctan } x - \text{Arctan } y| \leq |x - y|$ pour tous x, y , $\frac{x}{x+1} < \ln(1+x) < x$ pour tout $x > 0$.

- **Espaces vectoriels** : montrer rapidement que des ensembles sont des s.e.v. et en donner une base, en particulier pour l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène, de droites, plans ou d'intersections de tels ensembles dans \mathbb{K}^n , des s.e.v de polynômes, etc.

Exemples : $\{\alpha X^3 + \beta X + \alpha + \beta \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$, $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$, $\mathcal{A}_2(\mathbb{R})$, $\mathcal{S}_2(\mathbb{R})$
 $\{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + 2y + z - t = 0 \text{ et } 2x + 4y + z + 3t = 0\}$.

- **Applications linéaires** : calculer l'image ou le noyau d'une matrice.

- **DL** : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$?

- **Dénombrément** : combien de trinômes différents en PCSI ?