

TD Introduction – ANALYSE DIMENSIONNELLE

Les exercices très importants sont indiqués par des étoiles ★ ★ ★

La difficulté est graduée de très facile ● à très difficile ● ● ● ●

Exercice 1 : Questions de cours (à savoir faire sans le cours sous les yeux)

1 Donner en fonction des dimensions de base du système SI :

Donner la dimension des grandeurs suivantes : a. Vitesse v b. Accélération a c. Force F d. Energie E

e. Surface S f. Volume V g. Masse volumique ρ h. Densité d i. Puissance P j. Vitesse angulaire $\dot{\theta}$

k. Accélération angulaire $\ddot{\theta}$ l. Travail W m. Quantité de mouvement $p = m v$ o. Pression $\mathcal{P}$

2 Savoir déterminer si une équation est homogène ou non en vérifiant que :

- les termes présents de chaque côté du signe égal sont de même dimension

- les termes qu'on additionne sont de même dimension.

- les arguments des fonctions autres que les puissances n'ont pas de dimension.

3 Écrire une équation sur les dimensions pour déterminer une loi physique à une constante près

Exercice 2 : Erreur à trouver

Une longueur d s'exprime en fonction de deux autres longueurs d_1 et d_2 . L'une des deux relations suivantes est fautive. Laquelle ? Justifier.

$$\text{Relation 1 : } d = \frac{d_1 d_2}{d_1 + d_2}$$

$$\text{Relation 2 : } d = \frac{d_1 + d_2}{d_1 d_2}$$

Exercice 3 : Homogène ou pas ?

On trouve les relations suivantes sur des copies d'élèves. Vérifier l'homogénéité de ces relations, et en déduire lesquelles sont nécessairement fautes.

1 L'équation différentielle $\frac{dU}{dt} + \tau U = E \tau$ où U et E sont des tensions, t le temps, τ un temps caractéristique de variation

2 L'équation différentielle $\frac{dU}{dt} + \frac{U}{\tau} = E$

3 $E^2 = m^2 c^4 + p^2 c^2$ où E est l'énergie d'une particule, m sa masse, c la vitesse de la lumière dans le vide et p la quantité de mouvement (masse multipliée par vitesse) de la particule.

4 $P + \mu g z = P_0$ où P est la pression du fluide à l'altitude z , μ sa masse volumique du fluide, P_0 la pression atmosphérique et g l'accélération de la pesanteur.

5 La vitesse d'un fluide est donnée par la relation

$$v = \sqrt{\frac{2(p_2 - p_1)}{\mu \left(1 - \left(\frac{S_1}{S_2}\right)^2\right)}}$$

où p_2 et p_1 sont des pressions, μ masse volumique et S une surface.

6 L'expression de l'intensité du courant i est : $i = \frac{E}{R} \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)$

où i est une intensité de courant, t et τ sont des temps, E est une tension et R une résistance.

7 La position d'une masse accrochée à un fil de longueur l dans le champ de pesanteur g vaut $x(t) = x_0 \cos(\omega t)$ où t désigne un temps et $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$.

Exercice 4 : Force de frottements visqueux

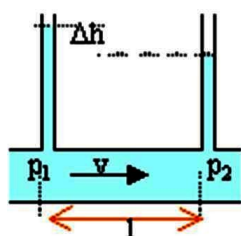
1 Une sphère de rayon R qui se déplace à une vitesse $\vec{v}$ dans un liquide est soumise à une force de frottements de type visqueux $\vec{F} = -6\pi\eta r \vec{v}$ η étant le coefficient de viscosité du liquide.

1.a Quelle est la dimension de η ?

1.b On pose souvent $\vec{F} = -\lambda \vec{v}$. Quelle est la dimension de λ ?

2 Le physicien français Jean Louis Poiseuille a établi en 1844 les lois de l'écoulement laminaire des fluides visqueux, parmi lesquels se trouve la loi suivante :

« Une perte de pression $\Delta p = p_1 - p_2$ apparaît entre deux points distants d'une longueur l d'une canalisation de rayon r , dans laquelle un fluide de coefficient viscosité η circule à la vitesse moyenne v , avec un débit q constant. »



$$q = \frac{\pi r^4}{8\eta l} (p_1 - p_2)$$

Dans l'expression de la loi de Poiseuille, q est-il un débit volumique ou un débit massique ?

Exercice 5 : Moment d'inertie d'un solide

L'énergie cinétique d'un solide en rotation autour d'un axe fixe dans un référentiel $\mathcal{R}_g$ est donnée par $E = \frac{1}{2} J \omega^2$ où ω désigne la vitesse de rotation du solide, exprimée en rad.s^{-1} .

1 Quelle est la dimension du moment d'inertie J d'un solide ?

2 Un élève propose, pour déterminer le moment d'inertie d'une sphère, d'utiliser la relation :

$$J_{\text{sphère}} = \frac{2}{5} m^2 R$$

avec m la masse de la sphère et R son rayon. Est-ce raisonnable ?

3 Le même élève a trouvé comme résultat d'un problème de mécanique que l'accélération a du solide était

$$a = \frac{(M \sin(\alpha) - m)g}{1 + M + \frac{J}{R^2}}$$

Où M et m désignent des masses et g la valeur du champ de pesanteur terrestre ($g = 9,81 \text{ N.kg}^{-1}$). Est-ce raisonnable ? Qu'a très probablement oublié l'élève dans son expression ?

Exercice 6 : Système international des unités

Exprimer en unités du système international les unités suivantes :

1. Newton 2. Pascal 3. Joule 4. Watt 5. Ohm 6. Volt

Exercice 7 : Secret défense

En 1950, G. Taylor arrivait à déterminer l'ordre de grandeur de l'énergie dégagée lors des explosions nucléaires américaines alors que ce paramètre était classé secret défense. Son idée consistait à observer le rayon R de la sphère constituant le chapeau du champignon en fonction du temps grâce aux documents filmés. Il trouva $R = At^{2/5}$, avec t le temps écoulé à partir de l'explosion. Ensuite, il chercha les grandeurs pouvant influencer sur le rayon du champignon : l'énergie dégagée E , le temps t écoulé depuis l'explosion et la masse volumique de l'air ρ (liée à la vitesse de propagation de l'onde de choc).

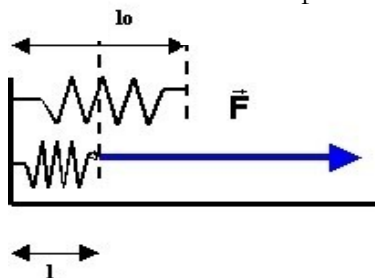
1 En utilisant l'analyse dimensionnelle, exprimer R en fonction de t , E , ρ et un coefficient numérique α sans dimension. Retrouve-t-on bien ce qu'a trouvé G. Taylor ($R = At^{2/5}$) ?

2 On suppose que α est de l'ordre de l'unité et que le rayon du champignon est de $R = 2,2 \text{ km}$ après $t = 5 \text{ s}$. En prenant $\rho = 1 \text{ kg.m}^{-3}$, déterminer l'énergie dégagée par une explosion nucléaire.

3 Comparer à la valeur réelle $E_{\text{réelle}} = 4.10^{15} \text{ J}$. Commenter.

Exercice 8 : Autour du ressort

- 1 Un ressort est caractérisé par sa constante de raideur k et sa longueur au repos l_0 . Lorsqu'il subit une déformation et qu'on l'écarte d'une distance $l \neq l_0$ de son point d'attache, le ressort exerce une force de rappel de module $F = k|l - l_0|$.



- 1.a Quelle est la dimension de k ?
- 1.b En déduire l'unité de k dans le système international.
- 2 Prévoir, à une constante près, l'expression de l'énergie potentielle élastique d'un ressort par analyse dimensionnelle, sachant qu'elle ne dépend que de k et $(l - l_0)$.
- 3 **Oscillations.** Une masse m oscille à l'extrémité d'un ressort linéaire horizontal de constante de raideur k , avec une amplitude X_0 . En admettant que sa période T ne dépende que de k , X_0 et m , déterminer l'expression littérale de T (à une constante sans dimension près).

Exercice 9: Ondes et analyse dimensionnelle

- 1 Dans une corde, une onde peut se propager. La vitesse de propagation de l'onde dépend uniquement de la tension T de cette corde et de la masse linéique μ du fil (masse par unité de longueur).
 - 1.a Donner la dimension de la force T et de la masse linéique μ .
 - 1.b Chercher l'expression de la vitesse de propagation de l'onde en fonction de T et μ .
 - 1.c Discuter la cohérence du résultat trouvé.
- 2 La vitesse de propagation du son s'exprime uniquement en fonction de la masse volumique ρ ainsi que du coefficient de compressibilité du gaz dans lequel il se propage (noté χ)

$$\chi = -\frac{1}{v} \frac{dv}{dp}$$

Dans la relation précédente ci-contre, v représente le volume massique du gaz et p la pression du gaz.

- 2.a Donner la dimension de χ .
- 2.b Donner l'expression de la vitesse de l'onde à une constante sans dimension près.

Exercice 10 : Troisième loi de Kepler

Un mobile de masse m est astreint à se déplacer sur une orbite circulaire de rayon R par une force $\vec{F}$.

- 1 Trouver par analyse dimensionnelle la vitesse v du mobile sur l'orbite, en fonction de m , R et F .
- 2 En supposant que l'expression trouvée est exacte (la constante sans dimension valant 1) et que la vitesse est constante, en déduire la période T du mobile en orbite en fonction de m , R et F (raisonnement simple sans analyse dimensionnelle).
- 3 Dans cette question, on s'intéresse au cas où $\vec{F}$ est la force gravitationnelle ($\|\vec{F}\| = \frac{GMm}{R^2}$)
 - 3.a Donner l'expression de v et T dans ce cas.
 - 3.b En déduire la troisième loi de Kepler $T^2/R^3 = \text{constante}$. Exprimer la constante.
 - 3.c Application à l'orbite de la Terre autour du Soleil : donner un ordre de grandeur de la masse du Soleil. Données : $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2}$ et $R = 149,6 \cdot 10^6 \text{ km}$.

Exercice 11 : Vitesse angulaire et vitesse linéaire

Une masse ponctuelle m attachée à l'extrémité d'un fil de longueur l décrit une trajectoire circulaire sur un plan horizontal. Soit v la vitesse linéaire associée à m , et $\dot{\theta}$ la vitesse angulaire associée à m .

- 1 Déterminer la dimension de v et de $\dot{\theta}$. En déduire la relation entre v et $\dot{\theta}$.
- 2 Trouver l'expression du module de la force de tension du fil T en fonction de m , l , v .
- 3 Trouver l'expression du module de la force de tension du fil T en fonction de m , l , $\dot{\theta}$.

Exercice 12 : What else ?

Une tasse de café oubliée sur une table refroidit jusqu'à température ambiante. On donne la capacité thermique massique de l'eau $c_{\text{EAU}} = 4,18 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$.

- 1 En utilisant l'unité de c_{EAU} , donner la signification physique de la capacité thermique massique.
- 2 Estimer la valeur du transfert thermique reçu par le milieu extérieur lors du refroidissement de la tasse. (on donnera un ordre de grandeur).
- 3 A quelle attitude la tasse pourrait-elle monter si on utilisait toute l'énergie perdue lors du refroidissement ?
- 4 Quelle vitesse pourrait atteindre la tasse en utilisant la même énergie ?

Exercice 13 : Une petite blague (de prépa) pour finir ...

Einstein, Newton, et Pascal sont en train de se promener un après-midi.

Einstein s'ennuie, alors il propose: « Faisons un cache-cache. C'est moi qui compte! ».

Les autres acceptent, alors Einstein se met à compter. « Un...Deux...Trois... ».

Pascal court au loin pour trouver une place où se cacher.

Mais Newton prend simplement un bout de craie et dessine au sol un carré de côté 1m.

Il termine et se rend dans le carré juste au moment où Einstein crie « J'arrive ! ».

Einstein regarde autour de lui et fixe immédiatement Newton qui se tenait juste devant lui.

Il dit: « Je t'ai trouvé, Newton ! ».

Newton répond: « Non, tu as trouvé Pascal ! »

Expliquer la ruse de Newton.