CHAPITRE 0 : ANALYSE DIMENSIONNELLE

Rapport de Jury

– Le jury fait remarquer que « S.I » n'est pas une unité du système international..
autrement dit : On n'écrit pas une valeur numérique avec « S.I »derrière en guise d'unité

- lors d'une résolution de problème, il est recommandé de vérifier l'homogénéité du résultat final.

I Homogénéité

I.1 Grandeurs physiques, unités, dimensions.

a) Grandeurs physiques

Dans une formule physique, les variables présentes ne sont pas « **que** » des nombres, mais représentent des grandeurs physiques.

Def : Une grandeur physique est un paramètre mesurable qui sert à définir un état ou un objet.

Exemple : Température de l'eau, durée d'une course de vélo, pression atmosphérique, hauteur d'un bâtiment, masse d'un camion etc…

b) Unités de mesure

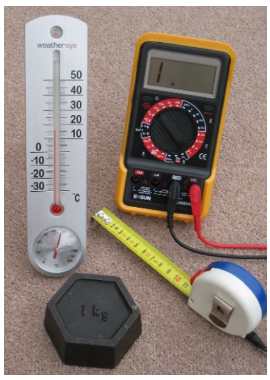
Def : Une « unité de mesure » est une grandeur physique qui permet d'exprimer la valeur d'une mesure physique par son *rapport avec cette unité de mesure*

Exemple 1 :
Grandeur constante qui sert de référence :
longueur qui sépare deux traits successifs sur la règle (cette grandeur s'appelle un centimètre de symbole cm)

Grandeur que je cherche à mesurer : la longueur de la ligne rouge

Je peux donc exprimer la grandeur d en fonction de la grandeur cm qui joue le rôle d'unité

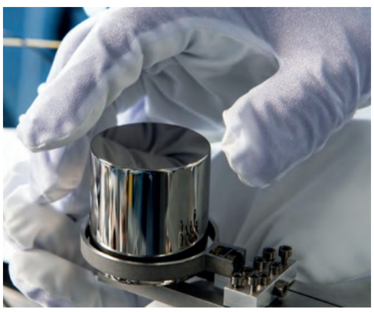
Exemple 2 : Grandeur constante qui sert de référence :
La durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium 133 » à la température du zéro absolu **(cette grandeur s'appelle une seconde)**



Rmq 1 :
En pratique on utilise des instruments numériques qui expriment automatiquement les grandeurs mesurées en fonction de grandeurs physiques de référence suffisamment proches des « vraies » unités pour que les mesures soient précises.

Rmq 2 : une grandeur physique doit toujours être exprimée avec une unité (sauf si elle est sans dimension)

Un mauvais choix d'unité grandeur qui sert de référence : Le grand K (jusqu'en 2008)



Depuis 1889, le prototype international du kilogramme, baptisé le grand K, était la référence des étalons de masse de tous les pays. Or, au fil du temps, ce cylindre de platine iridié a perdu de la masse !
L'étalon ultime du kilogramme proposé est la constante de Planck, h, constante phare de la physique quantique qui sert à définir la plus petite quantité d'énergie qui puisse exister, sachant qu'énergie et masse s'équivalent ($E = mc^2$)

c) Dimension d'une grandeur

Def : Si deux grandeurs peuvent s'exprimer en fonction de la même unité, alors elles appartiennent à une même catégorie appelée dimension.

Exemple : On peut citer la longueur d'un fil, le diamètre d'un cercle, la distance entre deux points de l'espace : ces trois grandeurs peuvent s'exprimer en mètres et sont donc de même dimension (celle d'une longueur)

Rmq 3 : Une grandeur ne peut pas appartenir à deux dimensions différentes : on parle donc de la dimension d'une grandeur.

d) Les 7 dimensions de base et leurs unités dans le système international (S.I)

Le système internationale d'unité fait le choix **arbitraire** suivant de considérer **7 dimensions de base** possédant chacune une unité appropriée, et recommande les notations correspondante, largement répandues **:**

DIMENSION	Symbole de la grandeur	Symbole de la dimension	Unité SI	Symbole associé à l'unité
Masse	*m*	M	kilogramme	kg
Temps	*t*	T	seconde	s
Longueur	*l, x, r…*	L	mètre	m
Température	*T*	Θ	kelvin	K
Intensité électrique	*I, i*	I	ampère	A
Quantité de matière	*n*	N	mole	mol
Intensité lumineuse	I_v	J	candela	cd

ATTENTION

Il ne faut pas confondre symbole de la grandeur, symbole de la dimension et symbole de l'unité (du système internationale) associée !!

I.2 Déterminer la dimension d'une grandeur.

a) Expression en fonction des dimensions de base du S.I

Toute grandeur physique possède une dimension qui peut s'exprimer en fonction des 7 dimensions du système international à l'aide de lois physiques. On cherchera toujours a exprimer les dimensions d'une grandeur X en fonction des dimensions de base de la façon suivante :

$$[X] = M^{\alpha 1} \cdot T^{\alpha 2} \cdot L^{\alpha 3} \cdot \Theta^{\alpha 4} \cdot I^{\alpha 5} \cdot N^{\alpha 6} \cdot J^{\alpha 7}$$

Avec α1 , α2 ,α3 ,α4 ,α5 ,α6 ,α7 des nombres rationnels

Rmq 4 (Notation) :

Dans une équation aux dimensions, la dimension de la grandeur X recherchée est notée [X]

b) Homogénéité des lois physiques

Rmq 5 (def) : Une loi physique permet de relier différentes grandeurs à l'aide d'une égalité

Exemple :
Loi physique qui exprime la relation entre de la vitesse v d'un objet lors d'un mouvement rectiligne uniforme, la distance d parcourue et la durée Δt du parcourt :

$$v = \frac{d}{\Delta t}$$

Grandeur : vitesse constante de l'objet (symbole v)
Dimension : pas dans la liste précédente (symbole [v])

Grandeur :distance parcourue (symbole d)
Dimension : longueur (symbole L)

Grandeur :durée du parcours (symbole Δt)
Dimension : Temps (symbole T)

Définition de l'homogénéité d'une loi:

Une loi physique est qualifiée d'homogène : les dimensions des grandeurs qui interviennent dans la loi physique doivent vérifier la même équation que les grandeurs elles même.

Application de l'homogénéité à la loi précédente :

- Équation vérifiée par les grandeurs : $v = \frac{d}{\Delta t}$
- **Équation aux dimensions** vérifiée par les dimensions des grandeurs pour assurer l'homogénéité de la loi :

$$[v] = \frac{[longueur]}{[temps]} = \frac{L}{T} = L \cdot T^{-1}$$

C'est bien de la forme $[v] = M^{\alpha 1} \cdot T^{\alpha 2} \cdot L^{\alpha 3} \cdot \Theta^{\alpha 4} \cdot I^{\alpha 5} \cdot N^{\alpha 6} \cdot J^{\alpha 7}$ avec $\alpha 1 = \alpha 4 = \alpha 5 = \alpha 6 = \alpha 7 = 0$, $\alpha 2 = -1$ et $\alpha 3 = 1$

Rmq 6: D'une manière générale, on arrive à l'écriture **$[X] = M^{\alpha 1} \cdot T^{\alpha 2} \cdot L^{\alpha 3}$… en écrivant des lois physiques.**

Rmq 7 :
Pour trouver cette expression, **aidez-vous des unités** ! Si vous connaissez par cœur les unités SI de certaines grandeurs physiques, vous pouvez directement vous en servir pour trouver la dimension d'une grandeur :

Exemple : l'accélération a
unité dans le S.I : $m.s^{-2}$
le mètre est l'unité du SI associée à des grandeurs physiques qui possèdent la dimension d'une longueur
la seconde est l'unité S.I associée à des grandeurs physiques qui possèdent la dimension d'un temps

on en déduit **$[a] = L.T^{-2}$**

c) Application de l'homogénéité

Exercice de cours 1: En utilisant une loi, déterminer la dimension d'une force (en fonction des 7 dimensions de base)

On utilise la deuxième loi de Newton : $\Sigma \overrightarrow{F_{ext}} = m \vec{a}$
Comme la loi est homogène $[\Sigma \overrightarrow{F_{ext}}] = [m][\vec{a}]$ on en déduit $[F] = [m][a] = M \cdot L \cdot T^{-2}$
(c'est bien de le connaître par cœur)

Rmq 8 : l'unité usuelle d'une force est le Newton (symbole N) mais l'unité d'une force exprimée dans le système international est $kg.m.s^{-2}$

I.3 Remarques importantes pour étudier les équations sur les dimensions.

a) *Addition et soustraction de grandeurs physiques*

ATTENTION

- ***Règle n°1: on ne peut*** **additionner (ou soustraire) que des grandeurs physiques de même dimension;**

Exemple : une équation horaire du mouvement de la forme $y(t) = 1/2\ t^2 + h$ est aberrante

(t^2 et h n'ont pas la même dimension)

- La **dimension de la somme de deux grandeurs est la même que celle des grandeurs**

ex : Dimension d'une durée $\Delta t = t_f - t_i \rightarrow [\Delta t] = [t_f] = T$

b) *Dérivation et intégration*

Rmq 9 : En physique on dérive ou on intègre **une grandeur** physique **par rapport** à une **autre grandeur** physique.

Ex emple: la composante selon l'axe x de la vitesse est la dérivée de la coordonnée x du vecteur position dans un repère cartésien **par rapport au temps.**

Règle pour la Dérivation : $[grandeur\ dérivée] = \dfrac{[grandeur\ qu'on\ dérive]}{[grandeur\ par\ rapport\ à\ laquelle\ on\ dérive]}$

Ex accélération instantanée :

$$a_x(t) \overset{\text{def}}{=} \frac{d\,v_x}{d\,t} \overset{\text{def}}{=} \lim_{dt \to 0} \frac{v_x(t+dt) - v_x(t)}{dt} \Rightarrow \qquad [a_x(t)] = \frac{[d\,v_x]}{[d\,t]} = \frac{L \cdot T^{-1}}{T} = L \cdot T^{-2}$$

Règle pour l'intégration :

$$[grandeur\ intégrée] = [grandeur\ qu'on\ intègre] \times [grandeur\ par\ rapport\ à\ laquelle\ on\ intègre]$$

Ex travail d'une force : $W = \int_{x_A}^{x_B} F(x) \cdot dx \Rightarrow \qquad [W] = [F] \times [dx] = (M \cdot L \cdot T^{-2}) \cdot L = M \cdot L^2 \cdot T^{-2}$

c) *Grandeurs sans dimension*

Voc : Si une grandeur peut s'exprimer sans utiliser aucune unité (sa valeur est un nombre réel), elle est dite adimensionnée (ou sans dimension)

Rmq 1 0: Multiplier ou diviser une grandeur possédant une dimension par un nombre réel adimensionné n'a pas d'effet sur la grandeur.

Exemple :Relation entre le diamètre D et le rayon r d'un cercle
D = 2r $\quad [D] = [2] \times [r] = ø \times [r] = [r] = L$

Rmq 11 (notation) : [2]= ø signifie que le nombre 2 n'a pas de dimension

Rmq 12 : **En général les grandeurs sans dimensions peuvent s'exprimer comme le rapport de deux grandeurs de même dimension.**

Exemple : Angle caractéristique de diffraction à travers une ouverture de largeur a d'une onde monochromatique de longueur d'onde λ : $\quad \theta \approx \dfrac{\lambda}{a} \quad \rightarrow \quad [\theta] = \dfrac{[\lambda]}{[a]} = \dfrac{L}{L} = ø$

À retenir : un angle est une grandeur adimensionnée (mais pourtant un angle possède une unité c'est une exception)

Exemple (HP)
Le nombre de Reynolds est une grandeur physique sans dimension qui permet de déterminer la nature de l'écoulement d'un fluide

on expression est la suivante $Re=\frac{\rho L v}{\eta}$

η est appelé viscosité dynamique du fluide, elle s'exprime habituellement en Poiseuille (symbole Pl)
déterminer la dimension de η et en déduire son unité dans le système international

$[Re]=\varnothing$ *Cela veut dire que le nombre de Reynolds n'a pas de dimension*

$\varnothing=\frac{[\rho]\times[L]\times[v]}{[\eta]}$ on en déduit : $[\rho]\times[L]\times[v]=[\eta]$

d) Argument des fonctions mathématiques

ATTENTION

Règle n°2 : À l'exception de l'élévation à une puissance, une fonction mathématique (cos, sin, tan, exp ,log etc...) ne peut porter que sur des nombres « purs », sans dimension

Exemple en chimie : $pH=-\log(\frac{[H_3O^{+}]}{c°})$ on doit forcement rajouter la concentration standard c^0 car l'argument du logarithme doit être sans dimension.

Exemple très courant !! : La tension aux bornes d'un condensateur lors de la décharge d'un circuit RC est donnée par la formule $u_C(t)=E\cdot e^{\left(\frac{-t}{R\cdot C}\right)}$.

Question : Que dire de la dimension du produit RC ?

- L'argument de la fonction exponentielle n'a pas de dimension, donc $\frac{[-t]}{[RC]}=\varnothing\Rightarrow[t]=[RC]=T$
le produit RC est <u>homogène à un temps</u> (c'est à dire qu'<u>il possède la dimension d'un temps</u>)

Rmq 13 : L'argument d'une racine carrée **peut bien évidement avoir une dimension car cela revient à élever à la puissance 1/2**

<u>II Illustration de l'intérêt de l'analyse dimensionnelle en physique</u>

II.1. Déceler des erreurs.

ATTENTION

Règle n°3 : il faut toujours vérifier l'homogénéité d'une équation avant de l'écrire au propre dans une copie

a) Exemple de la chute libre

Dans un exercice de mécanique après primitivation des équations du mouvement, je trouve que la vitesse atteinte par à la fin d'une chute libre a pour expression :

$v=2gh$ avec h la hauteur de chute et g l'intensité du champ de pesanteur (exprimée en $N.kg^{-1}$). est-ce possible ?

$[g]=[force]\times[masse]^{-1}=[masse]\times[accélération]\times[masse]=[accélération]=L\cdot T^{-2}$
[h] = L
Ainsi dans cette expression on aurait $[v]=[2]\times[g]\times[h]=L^2\cdot T^{-2}$

Ce n'est pas la dimension d'une vitesse ! (qui est $L.T^{-1}$) l'expression trouvée n'est donc pas valide, **j'ai donc fait une erreur.**

Rmq : On peut aussi raisonner directement avec les unités et vérifier qu'on retrouve bien l'unité d'une vitesse

b) Limites

Attention : **L'analyse dimensionnelle permet de savoir si le résultat est faux mais ne permet pas de savoir s'il est juste.**

Exemples :

- ***si on oublie un signe – une formule peut être fausse même si elle est dimensionnellement acceptable***
- **Pour une grandeur adimensionnée, en inversant le numérateur et le dénominateur on a toujours une grandeur adimensionnée**

Dans ces cas là on se pose des questions:
- Si je modifie un paramètre de la loi comment évoluent les autres grandeurs ? Est-ce cohérent avec l'expérience ?
Il faut toujours se poser cette question quand on répond à une question (c'est une étape fondamentale de la démarche scientifique)

II.2 Prévoir des résultats (à une constante multiplicative près)

a) Exemple de la vitesse après une chute libre verticale

Méthode générale
- On chercher a trouver une expression dimensionnellement homogène **de la forme la plus simple possible**
$v=k\times g^{\alpha}\times h^{\beta}$ avec k une constante sans dimension et α et β des nombres rationnels

Attention : en physique une constante n'est pas forcement sans dimension ! (exemple G)
- **On écrit l'équation aux dimensions associée à la loi étudiée** : $[v]=[k]\times g^{\alpha}\times h^{\beta}$

- **On remplace par les dimensions de base du S.I :** $L\cdot T^{-1}=(L\cdot T^{-2})^{\alpha}\times L^{\beta}$

- Par identification on trouve des équations sur les exposants :
$\begin{cases}\alpha+\beta=1\\ -2\alpha=-1\end{cases}$
- **On résout le système d'équation :** $\begin{cases}\beta=\dfrac{1}{2}\\ \alpha=\dfrac{1}{2}\end{cases}$

On écrit la loi en remplaçant les exposants par leurs valeurs : $v=k\times g^{\frac{1}{2}}\times h^{\frac{1}{2}}\Rightarrow v=k\sqrt{gh}$

Remarque : en réalité $v=\sqrt{2gh}$ mais ça , on ne pouvait pas le savoir avec cette méthode !

b) Exemple du pendule simple

Soit un pendule simple qui réalise de petite oscillations (ϴ<20°) .
On cherche à trouver une expression de la période d'oscillation T en fonction des grandeurs pertinentes grandeurs physiques pertinentes :

Par l'expérience on voit que la période dépend de la longueur de la corde.
Comme c'est le poids de l'objet M qui est responsable du mouvement, on peut supposer que le poids intervient comme P = mg on en déduit que les deux autres paramètre pertinents sont m et g,
donc T = f(m, g , l, Θ_0)
On cherche une loi de la forme la plus simple qui permettent d'assurer l'homogénéité
$T=k\cdot m^{\alpha}\cdot g^{\beta}\cdot l^{\gamma}\times f(\theta_0)$
α , β et γ des nombres rationnels à déterminer afin d'assurer l'homogénéité de la loi et k une constante sans dimension

On écrit l'équation aux dimensions associée à la loi étudiée $[T]=[k]\cdot[m]^{\alpha}\cdot[g]^{\beta}\cdot[l]^{\gamma}\times[f(\theta_0)]$

$$T=M^{\alpha}\cdot(L\cdot T^{-2})^{\beta}\cdot L^{\gamma}=M^{\alpha}\cdot L^{\beta+\gamma}\cdot T^{-2\beta}$$

$$M^0\cdot L^0\cdot T^1=M^{\alpha}\cdot L^{\beta+\gamma}\cdot T^{-2\beta}$$

Par identification on trouve :

$\begin{cases}\alpha=0\\ \beta+\gamma=0\\ -2\beta=1\end{cases}$ on en déduit $\begin{cases}\alpha=0\\ \gamma=\frac{1}{2}\\ \beta=\frac{-1}{2}\end{cases}$

au final $T=k\cdot g^{\frac{-1}{2}}\cdot l^{\frac{1}{2}}\times f(\theta_0)$ soit $T=k\cdot\sqrt{\frac{l}{g}}\times f(\theta_0)$

En pratique pour les petites oscillations ($\Theta_0 < 20$ °) on a $T=2\times\pi\cdot\sqrt{\frac{l}{g}}$

Pour des oscillations aux grands angles on a $T=2\times\pi\cdot\sqrt{\frac{l}{g}}\times(1+\frac{\theta_0^2}{16})$

c) Troisième loi de Kepler

Q1 Déterminer les dimensions dans le SI de la constante universelle de gravitation G sachant qu'elle est déterminée par l'équation :

$$F=G\frac{Mm}{r^2}$$

F est la norme de force de gravitation qui s'exerce entre les deux corps
m et M sont les deux masses qui subissent cette attraction (telle que M>>m) , et r est la distance qui sépare ces deux masses)

On sait que $[F]=M\cdot L\cdot T^{-2}$ Par analyse dimensionnelle $M\cdot L\cdot T^{-2}$ = [G] · $M^{-1}\cdot L^3\cdot T^{-2}$ $M^2\cdot L^{-2}$

on en déduit [G] = M^{-1} L^3 T^{-2}

Q2 Exprimer la période de révolution en fonction de M, G et d

$T=f(M,G,d)$

$T=k\cdot M^{\alpha}\cdot G^{\beta}\cdot d^{\gamma}$ α , β et γ des nombres rationnels à déterminer afin d'assurer l'homogénéité de la loi et k une constante sans dimension réelle

On écrit l'équation aux dimensions associée à la loi étudiée $[T]=[k]\cdot[M]^{\alpha}\cdot[G]^{\beta}\cdot[d]^{\gamma}$

$T=M^{\alpha}\cdot(M^{-1}\cdot L^3\cdot T^{-2})^{\beta}\cdot L^{\gamma}=M^{\alpha-\beta}\cdot L^{3\beta+\gamma}\cdot T^{-2\beta}$

Par identification on trouve :

$\begin{cases}\alpha-\beta=0\\ 3\beta+\gamma=0\\ -2\beta=1\end{cases}$ on en déduit $\begin{cases}\alpha=-\frac{1}{2}\\ \gamma=\frac{3}{2}\\ \beta=-\frac{1}{2}\end{cases}$

au final $T=k\cdot M^{\frac{-1}{2}}\cdot G^{\frac{-1}{2}}d^{\frac{3}{2}}$ soit $T=\frac{k}{\sqrt{GM}}d^{\frac{3}{2}}$ que l'on peut réécrire $\frac{T^2}{d^3}=\frac{k^2}{GM}$

cette relation constitue la troisième loi de Kepler