

Correction TD01 optique géométrique

Exercice 2 :

On sait que le modèle de l'optique géométrique est approprié lorsqu'on peut négliger la diffraction des obstacles que rencontre la lumière sur son trajet.

C'est le cas lorsque la longueur d'onde de la lumière est très faible devant la taille caractéristique des objets diffractant.

Pour un appareil photo l'objet diffractant est l'objectif de diamètre $D = 1,8 \text{ mm}$

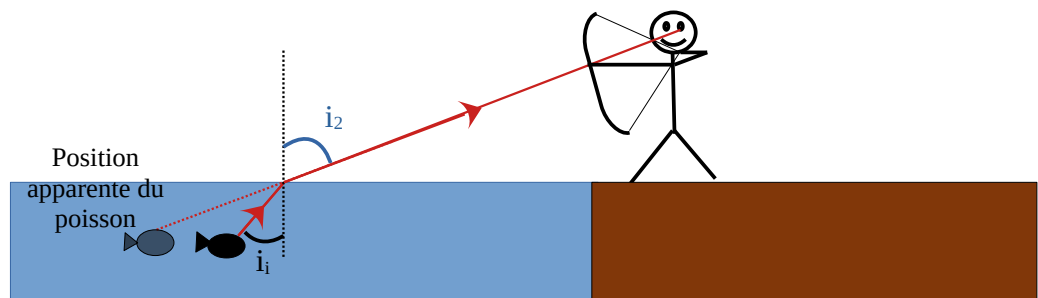
la lumière que reçoit l'appareil photographique (et qui est utile pour une photographie) est la lumière visible dont les longueurs d'ondes sont comprises entre 400 nm et 800 nm

ces longueurs d'ondes sont plus de 1000 fois plus faible que le diamètre de l'objectif ($D > 1000 \lambda$).

Le phénomène de diffraction est donc négligeable et l'approximation de l'optique géométrique est valable.

Exercice 3

schématisation de la situation :



Comme l'indice optique de l'eau est plus élevée que l'indice optique de l'air, la lumière passe d'un milieu plus réfringent à un milieu moins réfringent. Ainsi, un rayon incident provenant du poisson et arrivant à l'interface eau-air sera réfracté en formant un angle i_2 par rapport à la normale plus grand que l'angle d'incidence i_1 . L'homme verra le poisson **dans le prolongement du rayon réfracté qui arrive à son œil, c'est à dire légèrement à l'arrière de la position réelle du poisson**.

L'homme doit donc tirer devant la position apparente du poisson.

(Par « devant » il faut comprendre entre la position du tireur et la position apparente du poisson)

Exercice 4 : détecteur de pluie

1. Montrer que le flux lumineux revient intégralement sur le détecteur situé en D et déterminer la distance ED.

Si le flux lumineux revient intégralement cela signifie qu'il y a réflexion totale au niveau du dioptre verre air. On est bien dans le cas où le milieu où se propage le rayon incident est plus réfringent que le milieu où pourrait se propager le rayon réfracté ($n_v > n_{air}$) : **le phénomène de réflexion totale peut donc avoir lieu si $i > i_{lim}$** avec i_{lim} l'angle limite de réfraction qui permet d'obtenir un rayon réfracté à la limite de la réflexion totale (l'angle entre la normale et le rayon réfracté vaut $i_2 = 90^\circ$)

On a d'après Snell-Descartes dans ce cas $n_v \sin(i_{lim}) = n_{air} \sin(90^\circ) = 1$

donc $\sin(i_{lim}) = \frac{1}{n_v} \Rightarrow i_{lim} = \arcsin\left(\frac{1}{n_v}\right)$ A.N $i_{lim} = \arcsin\left(\frac{1}{1,5}\right) = 41,8^\circ$

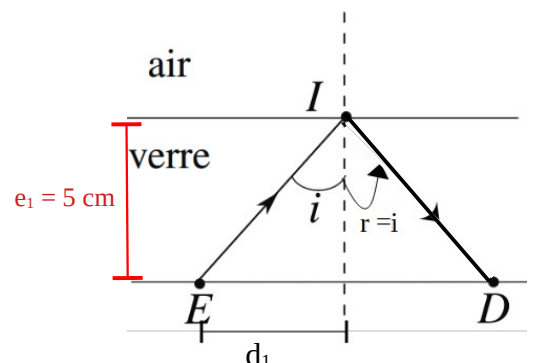
(vérifier que votre calculatrice est bien paramétrée en degrés)

$i = 60^\circ$

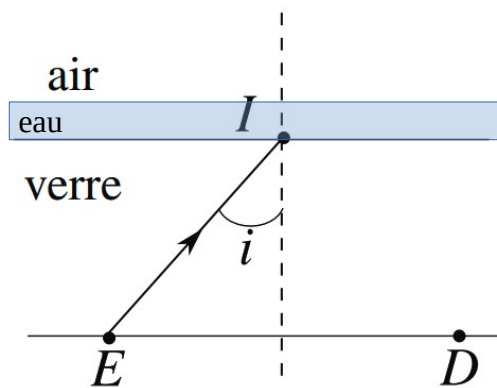
On a bien $i > i_{lim}$, le phénomène de réflexion totale a bien lieu

l'angle de réflexion r est égale à i (voir schéma)

d'après le schéma on a $ED = 2 d_1$ et $d_1 = e_1 \tan(i) = 1,7 \text{ cm}$



2. Lorsqu'il pleut, une lame d'eau d'indice $n_e = 1,33$ et d'épaisseur $e_2 = 1$ mm se dépose sur le pare-brise. Représenter le rayon lumineux dans ce cas. À quelle distance du détecteur arrive-t-il ?



Le dioptre sépare maintenant le verre et l'eau

Attention dans ce cas à la limite de la réfraction on a

$$n_v \sin(i_{\text{lim}}) = n_e \sin(90^\circ) = n_e$$

$$\sin(i_{\text{lim}}) = \frac{n_e}{n_v} \Rightarrow i_{\text{lim}} = \arcsin\left(\frac{n_e}{n_v}\right)$$

A.N $i_{\text{lim}} = \arcsin\left(\frac{1,33}{1,5}\right) = 62,5^\circ$

On a plus $i > i_{\text{lim}}$, le rayon est en partie réfracté (transmis).

cherchons l'angle de réfraction, D'après la loi de Snell-Descartes sur la réfraction :

$$n_v \sin(i) = n_e \sin(i_2) \Rightarrow \sin(i_2) = \frac{n_v}{n_e} \sin(i) \Rightarrow i_2 = \arcsin\left(\frac{n_v}{n_e} \sin(i)\right)$$

A.N $i_2 = \arcsin\left(\frac{1,5}{1,33} \sin(60^\circ)\right) = 77,6^\circ$

Après être passé dans l'eau, ce rayon arrive au niveau du dioptre eau-air

L'angle limite de réfraction vaut alors à cette interface

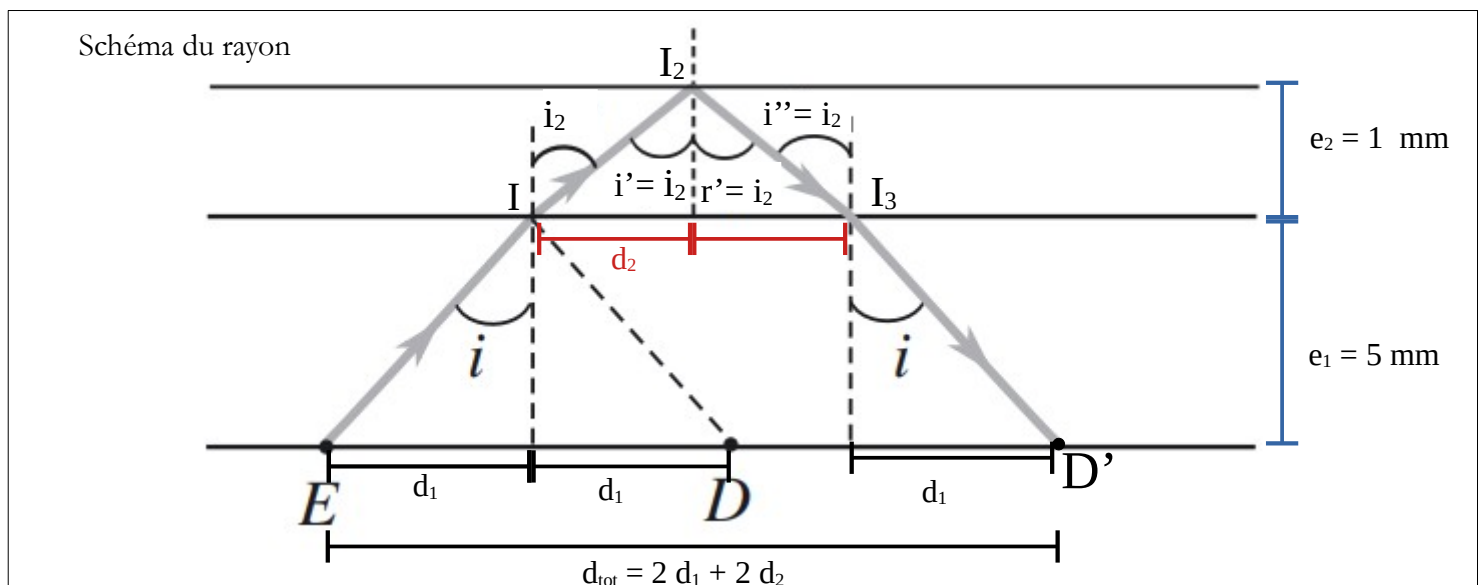
$$i_{\text{lim air}} = \arcsin\left(\frac{n_{\text{air}}}{n_e}\right) = \arcsin\left(\frac{1}{1,3}\right) = 48,7^\circ$$

si on note i' l'angle d'incidence sur cette interface, on a $i' = i_2$ (angles alterne- interne voir schéma ci-dessous) et donc on a $i' < i_{\text{lim air}}$: le phénomène de réflexion totale a lieu à l'interface,

D'après la loi de Snell-Descartes sur la réflexion, l'angle de réflexion est alors $r' = i_2$

- le rayon ainsi réfléchi arrive ensuite sur l'interface eau-verre avec un angle d'incidence $i'' = i_2$

Au point I_3 on a une situation symétrique à celle de l'incidence au point I (le rayon se propage en sens inverse)



d'après le schéma $d_2 = e_2 \tan(i_2)$. A.N

Le rayon arrive en D' tel que : $DD' = d_{\text{tot}} - ED = 2 d_2$ soit $DD' = 2 e_2 \tan(i_2)$

A.N $DD' = 2 \cdot 1 \cdot 10^{-3} \cdot \tan(77,6^\circ) = 0,9 \text{ cm}$

Si la taille du capteur en D est inférieure à 0,9 cm, ce dernier ne captera plus le rayon lumineux si le pare-brise est recouvert d'eau (en I et I₃). On peut donc déclencher les essuie-glace dans ce cas.

Exercice 5* : Prisme (extrait concours) On considère un prisme d'angle $A = 60^\circ$ constitué d'un verre d'indice n . On appelle déviation (notée D) l'angle entre le rayon transmis par le prisme et le rayon incident. On prendra $n_{\text{air}} = 1,00$.

On notera i et i' les angles d'incidence à l'entrée et à la sortie du prisme, ainsi que r et r' les angles des rayons réfractés à l'intérieur du prisme respectivement côté entrée et côté sortie.

1.

En I :

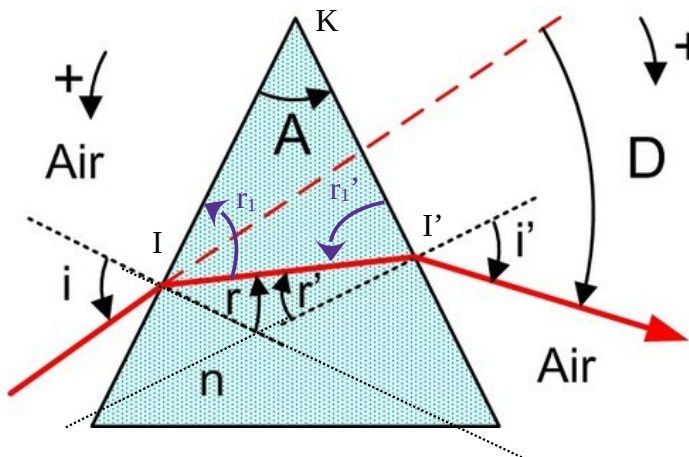
$$n_{\text{air}} \sin(i) = n \sin(r) \Rightarrow \sin(i) = n \sin(r)$$

en I' :

$$n \sin(r') = n_{\text{air}} \sin(i') \Rightarrow n \sin(r') = \sin(i')$$

Remarque notation : dans cet exercice l'angle de réfraction est noté r et pas i_2 comme dans le cours, il ne faut pas confondre cet angle r et l'angle de réflexion qu'on a aussi noté r dans le cours. Il faudra garder les notations de l'énoncé

2. Exprimer A en fonction de r et r' .



ATTENTION À L'ORIENTATION DES ANGLES

les angles r_1 r_1' introduit sont tels que :

$$r_1 = 90^\circ - r$$

$$r_1' = 90^\circ + r'$$

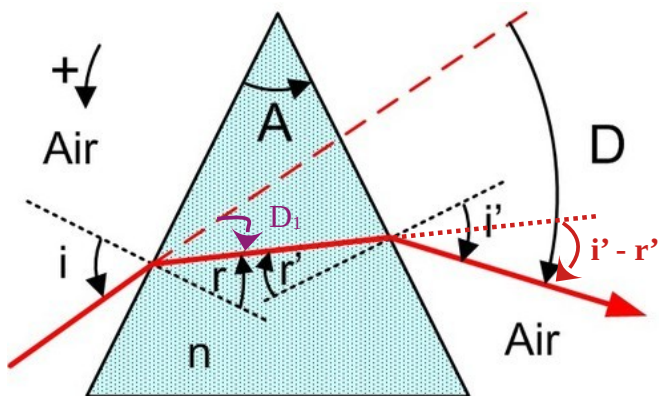
De plus comme la somme des angles orientés dans le même sens Dans un triangle est égale à 180°

$$\text{On a } A + r_1' + r_1 = 180^\circ$$

$$\text{Ainsi } A + 90^\circ - r + 90^\circ + r' = 180^\circ$$

$$\text{Soit } \boxed{A + r' - r = 0^\circ \text{ donc } r' - r = -A \text{ soit (1)}}$$

3. Établir la relation : $D = i + i' - A$



On a introduit sur le schéma l'angle D_1 tel que :

$$\boxed{D_1 + i' - r' = D} \quad (2)$$

$$\text{Mais on a aussi } D_1 = r - i \quad (3)$$

En réinjectant (3) dans (2) : $r - i + i' - r' = D$

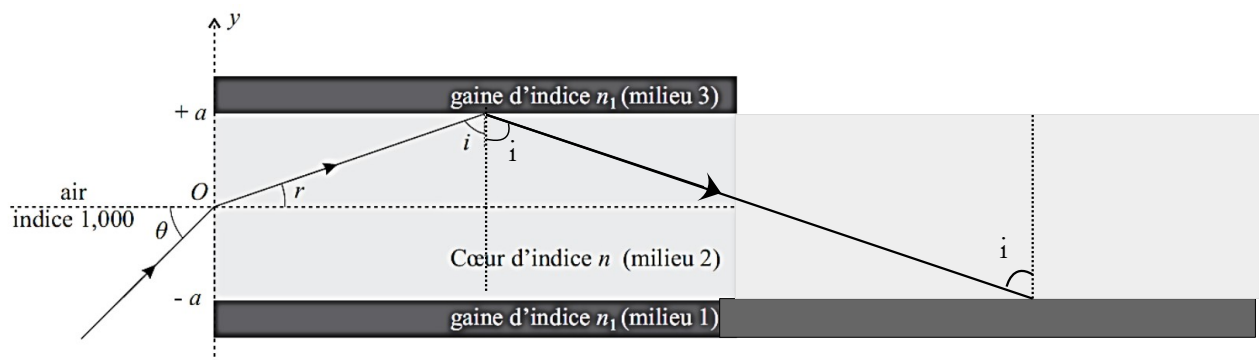
Or d'après (1) $r' - r = -A$ donc on a bien $\boxed{D = i' - i + A}$

Pour une valeur donnée de l'indice n , la déviation D est en fait seulement fonction de i . Lorsque i varie, la déviation D présente une valeur minimale, notée D_m dans la suite.

1. À quelle condition sur l'angle d'incidence à l'interface cœur/gaine, le rayon reste-t-il confiné à l'intérieur du cœur ? On note i_{lim} l'angle d'incidence limite.

Remarque notation : dans cet exercice l'angle de réfraction est noté r et pas i_2 comme dans le cours, il ne faut pas confondre cet angle r et l'angle de réflexion qu'on a aussi noté r dans le cours. Il faudra garder les notations de l'énoncé.

Le rayon reste confiné s'il le phénomène de réflexion totale a lieu à l'interface cœur/gaine. En effet si le rayon est totalement réfléchi une première fois il arrivera sur l'autre côté de la fibre avec exactement le même angle que pour la première réflexion (si la fibre est rectiligne). Il sera donc totalement réfléchi à chaque fois qu'il rentre en contact avec l'interface cœur / gaine.



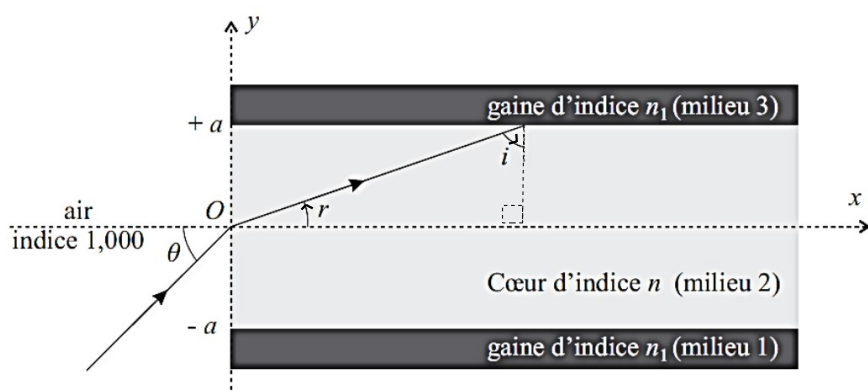
Remarque : Les angles ne sont pas orientés , on les orientera tous dans le sens trigonométrique pour simplifier.

Pour avoir réflexion totale il faut que le milieu d'incidence soit plus réfringent que le milieu où se propagerait le rayon réfracté. **C'est bien le cas ici car $n > n_1$**

De plus, **il faut que l'angle d'incidence i soit supérieur à un angle limite de réfraction i_{lim}** tel que pour cet angle d'incidence le rayon réfracté r serait parallèle au dioptre ($r = 90^\circ$)

D'après la loi de Snell-Descartes pour la réfraction : $n \sin(i_{\text{lim}}) = n_1 \sin(r) \Rightarrow n \sin(i_{\text{lim}}) = n_1 \Rightarrow i_{\text{lim}} = \arcsin\left(\frac{n_1}{n}\right)$

2.



Les angles i et r sont reliés par la relation $i = \pi/2 - r$ (1)

Condition sur Θ :
 réflexion totale $\Rightarrow i > i_{\text{lim}} \xrightarrow{(1)} \frac{\pi}{2} - r > i_{\text{lim}} \Rightarrow r - \frac{\pi}{2} < -i_{\text{lim}} \Rightarrow r < \frac{\pi}{2} - i_{\text{lim}}$
 on pose $r_{\text{lim}} = \frac{\pi}{2} - i_{\text{lim}}$

On applique $\sin$
 (croissante entre 0 et 90°)

Pour avoir réflexion totale il faut donc $r < r_{\text{lim}} \Rightarrow \sin(r) < \sin(r_{\text{lim}}) \xrightarrow{x \cdot n} n \sin(r) < n \sin(r_{\text{lim}})$

Or en appliquant la loi de Snell-Descartes à l'interface air/cœur au point O on trouve :

$$n_{\text{air}} \sin(\theta) = n \sin(r) \Rightarrow \sin(\theta) = n \sin(r)$$

Ainsi pour avoir réflexion totale il faut $\sin(\theta) < n \sin(r_{\text{lim}})$ soit encore $\sin(\theta) < n \sin\left(\frac{\pi}{2} - i_{\text{lim}}\right)$

$$\text{or } \sin\left(\frac{\pi}{2} - i_{\text{lim}}\right) = \cos(i_{\text{lim}})$$

$$\sin(\theta) < n \cos(i_{\text{lim}}) \Rightarrow \theta < \arcsin(n \cos(i_{\text{lim}}))$$

on en déduit qu'il faut $\theta < \theta_{\text{lim}}$ avec $\theta_{\text{lim}} = \arcsin(n \cos(i_{\text{lim}}))$ pour que le rayon se propage dans la fibre.

$$\sin(\theta_{\text{lim}}) = n \cos(i_{\text{lim}})$$

Comme d'après la question précédente $i_{\text{lim}} = \arcsin\left(\frac{n_1}{n}\right)$ on en déduit $O.N = \sin(\theta_{\text{lim}}) = n \cos\left(\arcsin\left(\frac{n_1}{n}\right)\right)$

Remarque : on peut encore simplifier l'expression.

En effet, comme $\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) = 1$ on a $\cos(\theta) = \sqrt{1 - \sin^2(\theta)}$

$$\text{donc } O.N = \sin(\theta_{\text{lim}}) = n \sqrt{1 - \sin^2\left(\arcsin\left(\frac{n_1}{n}\right)\right)}$$

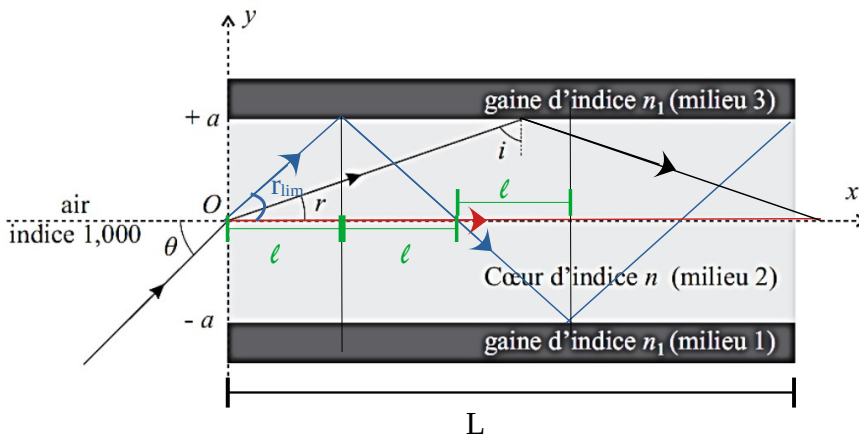
$$\text{finalement } O.N = \sin(\theta_{\text{lim}}) = n \sqrt{1 - \left(\frac{n_1}{n}\right)^2} = \sqrt{n^2 - n_1^2}$$

$$3. \quad \text{A.N } O.N = \sqrt{1,5^2 - 1,47^2} = 0,299$$

4. la célérité de la lumière dans la fibre est $v = \frac{c}{n}$ pour tout les rayons peut importe la valeur de Θ .

ce qui va changer selon Θ c'est la longueur parcourue par le rayon dans la fibre.

En effet, plus Θ est important, plus le nombre de réflexion totale sera important, plus la distance parcourue par la lumière (pour une même longueur de fibre optique) sera importante et plus la lumière passera de temps dans la fibre (voir schéma ci-dessous)



La durée du parcours est la plus faible s'il n'y a aucune réflexion totale. la distance parcourue par la lumière dans la fibre est L (rayon rouge)

le temps de parcours minimal est donc obtenu pour $\Theta = 0$ $t_{\text{min}} = \frac{L}{v} = n \frac{L}{c}$

Le temps de parcours maximal sera obtenu pour $\Theta = \Theta_{\text{lim}}$ car i prendra la plus faible valeur et le nombre de réflexion sera maximal.

il faut maintenant calculer la distance d_{tot} réellement parcourue par un rayon lumineux dans la fibre de longueur L dans ce cas.

Pour chaque tronçon de fibre de longueur l (voir schéma) le rayon lumineux parcourt une distance $\frac{l}{\cos(r_{\text{lim}})}$

la fibre étant composée d'environ $\frac{L}{l}$ tronçons de longueur l ($L = \left(\frac{L}{l}\right) \cdot l$) le rayon lumineux va donc

parcourir environ $\frac{L}{l}$ fois la distance $\frac{l}{\cos(r_{\text{lim}})}$ avant de sortir de la fibre, soit une distance totale :

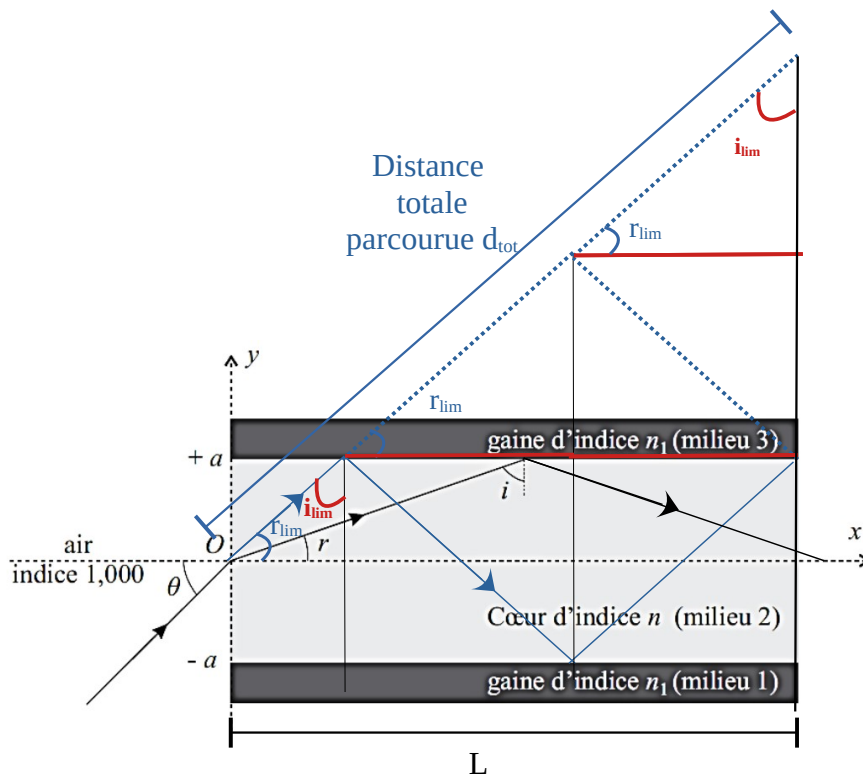
$$d_{\text{tot}} = \frac{L}{l} \times \left(\frac{l}{\cos(r_{\text{lim}})}\right) = \frac{L}{\cos(r_{\text{lim}})}$$

$$d_{\text{tot}} = \frac{L}{\sin(i_{\text{lim}})} = \frac{L}{\sin(\arcsin(\frac{n_1}{n}))} = \frac{L}{\frac{n_1}{n}} = n \frac{L}{n_1}$$

Or comme d'après (1) $r_{\text{lim}} = \frac{\pi}{2} - i_{\text{lim}}$ on en déduit

Donc $t_{\text{max}} = \frac{d_{\text{tot}}}{v} = n^2 \frac{L}{n_1 c}$. Au final $\delta t = t_{\text{max}} - t_{\text{min}} = n \frac{L}{c} \left(\frac{n}{n_1} - 1 \right)$

Autre méthode pour trouver d_{tot}



$$\sin(i_{\text{lim}}) = \frac{L}{d_{\text{tot}}} \Rightarrow d_{\text{tot}} = \frac{L}{\sin(i_{\text{lim}})}$$

Mais il faut avoir l'idée de faire cette construction géométrique....

5. dans notre expression de δt on a $\frac{n}{n_1}$

exprimons $\frac{n}{n_1}$ en fonction de Δ : $2\Delta = 1 - \left(\frac{n_1}{n}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{n_1}{n}\right)^2 = 1 - 2\Delta \Rightarrow \left(\frac{n}{n_1}\right)^2 = \frac{1}{1 - 2\Delta} \Rightarrow \frac{n}{n_1} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\Delta}}$

d'après l'énoncé $\Delta \ll 1$, donc $2\Delta \ll 1$. On peut alors utiliser l'indication mathématique avec $x = 2\Delta$:

$$\frac{n}{n_1} \approx 1 + \frac{1}{2} 2\Delta = 1 + \Delta$$

finalement : $\delta t = n \frac{L}{c} \left[\frac{n}{n_1} - 1 \right] \approx n \frac{L}{c} \cdot (1 + \Delta - 1) = \frac{nL\Delta}{c}$

Remarque : $\Delta = \frac{n^2 - n_1^2}{2n^2} = \frac{(\sqrt{n^2 - n_1^2})^2}{2n^2} = \frac{(O.N)^2}{2n^2}$ donc on a aussi $\delta t \approx \frac{L(O.N)^2}{2nc}$

6. Le signal transporté par la fibre est constitué d'impulsions lumineuses d'une durée T_1 à intervalle régulier T . Quelle valeur minimale de T faut-il choisir pour que les impulsions soient distinctes à la sortie de la fibre ?

Il ne faut pas que les rayons les plus rapides d'une impulsion rattrapent les plus lents de l'impulsion précédente.
Il faut donc $T > \delta t$

$$\text{A.N } \delta t \approx \frac{L(O.N)^2}{2nc} = \frac{1 \cdot 10^3 \cdot (0,299)^2}{2 \cdot 1,5 \cdot 3,0 \cdot 10^8} \approx 1,0 \cdot 10^{-7} \text{ s} = 0,1 \mu \text{ s}$$

les impulsions sont espacés d'environ $0,1 \mu \text{ s}$, la fréquence des impulsion est donc $f = \frac{1}{\delta t} = 1,0 \cdot 10^7 \text{ Hz}$

soit 10 Mbits par seconde. **La fibre étudiée convient pour le téléphone mais pas pour la télévision.**