Correction TD03 : **INSTRUMENTS D'OPTIQUE**

Exercice 2

1. Rappeler le modèle réduit de l'œil. Par quoi modélise-t-on l'iris ? Le cristallin ? La rétine ?

L'ensemble de l'œil est modélisé par un diaphragme (modélisant l'iris) placé devant une lentille mince convergente (modélisant le cristallin) formant une image sur la rétine modélisée par un écran.

2. Quel est le PR d'un œil emmétrope ?

D'après l'énoncé On peut voir un objet « à l'infini » avec un œil emmétrope. On a donc $\boxed{PR_{emmetrope} = \infty}$

3 Myopie.

Un œil myope est un œil **trop grand** ou **trop convergent**. Autrement dit, au repos, la distance focale du cristallin est située avant la rétine.

3.a *Comparer le PR d'un œil myope à celui d'un œil emmétrope.*

Un objet à l'infini ne peut pas être vu par un œil myope. Son PR est inférieur à celui d'un œil emmétrope

$$\boxed{PR_{myope} < PR_{emmétrope}}$$

3.b *Comparer le PP d'un œil myope à celui d'un œil emmétrope.*

Quand un objet est au punctum proximium on est dans le cas limite où $\boxed{f = f'_{min}}$ **et** $\overline{OA} = -P.P$ d'après la relation de conjugaison de Descartes

$$\frac{1}{d} - \frac{1}{(-PP)} = \frac{1}{f'_{min}} \Rightarrow \frac{1}{P.P} = \frac{1}{f'_{min}} - \frac{1}{d} \Rightarrow \boxed{P.P = \frac{f'_{min}\, d}{d - f'_{min}}}$$

- d est la taille de l'œil soit la distance cristallin/rétine
- f'_{min} est la plus faible distance focale que le cristallin peut adopter lorsqu'on accommode au maximum

un œil est myope si : $f'_{min\ myope} < f'_{min\ emmetrope}$ (œil trop convergent) ou si $d_{myope} > d_{emmétrope}$ (œil trop grand)

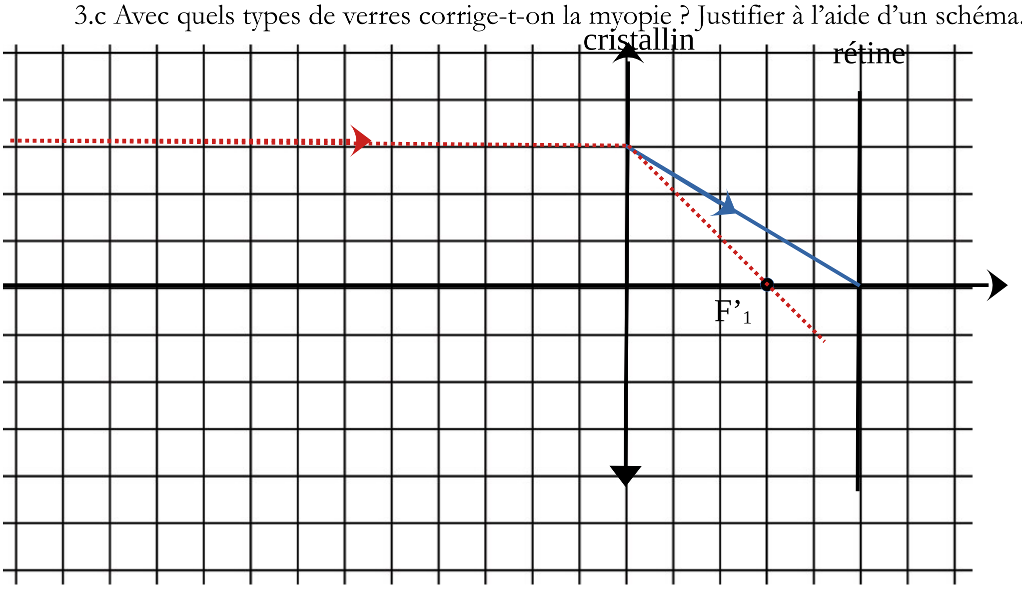
Si l'œil est trop convergent :

$$0 < f'_{min\,myope} < f'_{min\ emmétrope} \Rightarrow d - f'_{min\ myope} > d - f'_{min\,emmétrope}\ d > 0 \Rightarrow \frac{1}{d - f'_{min\,myope}} < \frac{1}{d - f'_{min\,emmétrope}}$$

$$f'_{min\,myope} < f'_{min\,emmétrope} \Rightarrow f'_{min\,myope}\, d < f'_{min\,emmétrope}\, d$$

on en déduit $\frac{f'_{min\ myope}\, d}{d - f'_{min\,myope}} < \frac{f'_{min\ emmétrope}\, d}{d - f'_{min\ emmétrope}} \Rightarrow \boxed{PP_{myope} < PP_{emmétrope}}$

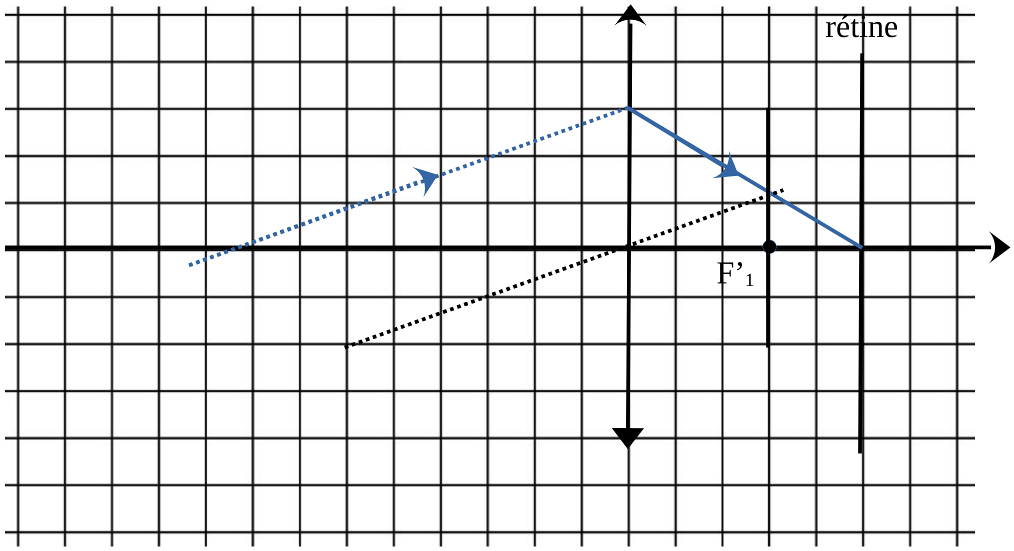
3.c Avec quels types de verres corrige-t-on la myopie ? Justifier à l'aide d'un schéma.



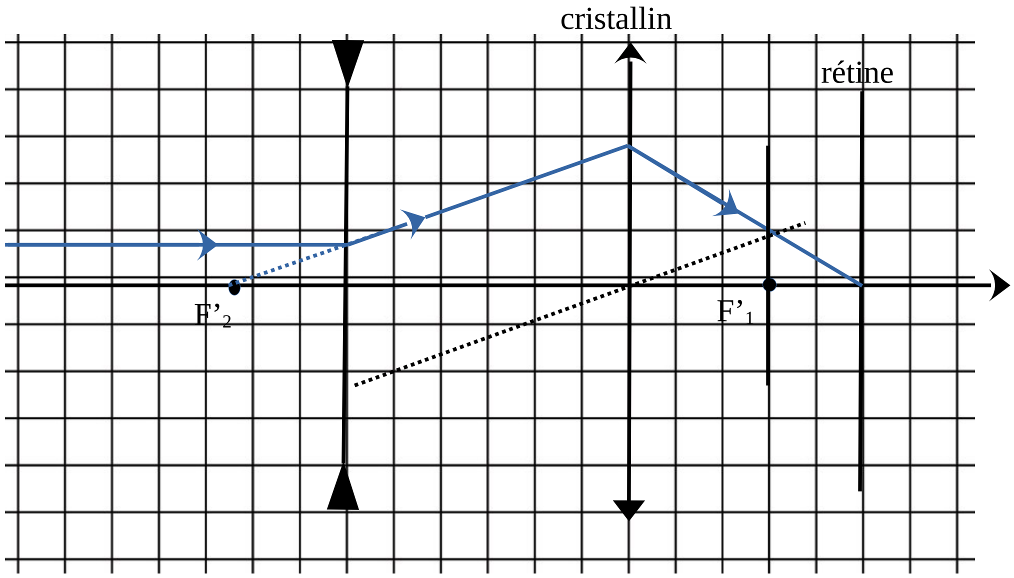
cristallin

$F_{1'}$ est le foyer focal du cristallin de l'oeil myope . C'est en ce point que convergent les rayons provenant de l'infini et parallèles à l'axe optique *sans verre correcteur* (rayon rouge).

Avec un verre correcteur (par encore représenté) on souhaite qu'un rayon arrivant sur le verre correcteur en étant parallèle à l'axe optique emprunte le trajet du rayon bleu pour converger sur la rétine



On cherche à tracer le rayon bleu avant le cristallin.
On sait que deux rayons parallèles entre eux se croisent dans le plan focal image de la lentille.
On trace donc le rayon non dévié passant par le centre optique du cristallin (en pointillé) et coupant le rayon bleu dans le plan focal image du cristallin
Le rayon bleu est donc parallèle à ce rayon avant le cristallin



On cherche à tracer le rayon bleu avant le verre correcteur
On sait qu'il est parallèle à l'axe optique avant le verre correcteur
Or un rayon parallèle à l'axe optique arrivant sur une lentille divergente (le verre correcteur) ressort de cette dernière en passant virtuellement par le foyer focal image.
L'intersection du rayon bleu avec l'axe optique est donc le foyer focal image du verre correcteur (F'_2) . On place ensuite la lentille modélisant le verre correcteur qui doit se trouver à droite du foyer focale image (lentille divergente

Le rayon bleu est parallèle à l'axe optique avant de rencontrer le verre correcteur. Ici on voit qu'il s'éloigne de l'axe optique après le verre correcteur. Le verre correcteur est donc nécessairement divergent !

3.d Donner le signe de la vergence des verres correcteurs d'un patient myope.

$V = \frac{1}{f'}$ **la distance focale image est négative pour une lentille divergente donc la vergence l'est aussi**

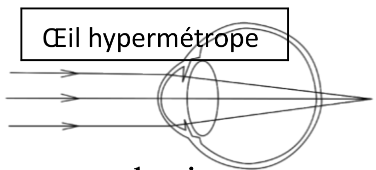
3.e Pourquoi les personnes myopes retirent-elles leurs lunettes pour voir quelque chose de très près ?

Leurs yeux des myopes sont capables d'accommoder pour rendre l'image nette sur la rétine sans l'aide du verre correcteur.

Hypermétropie.

Un œil hypermétrope est un œil trop petit ou pas assez convergent. Autrement dit, au repos, la distance focale du cristallin est située après la rétine.

4.a Comparer le PR d'un œil hypermétrope à celui d'un œil emmétrope.



Un Hypermétrope peut voir à l'infini en accommodant pour faire converger les rayons lumineux sur sa rétine le PR d'un œil hypermétrope est le même que celui d'un œil emmétrope soit l'infini

$$\boxed{PR_{hypermétrope} = PR_{emmétrope} = \infty}$$

4.b Comparer le PP d'un œil hypermétrope à celui d'un œil emmétrope.

Quand un objet est au punctum proximium on est dans le cas limite où $\boxed{f=f'_{min}}$ **et** $\overline{OA}=-P.P$
d'après la relation de conjugaison de Descartes

$$\frac{1}{d}-\frac{1}{(-PP)}=\frac{1}{f'_{min}} \Rightarrow \frac{1}{P.P}=\frac{1}{f'_{min}}-\frac{1}{d} \Rightarrow \boxed{P.P=\frac{f'_{min}d}{d-f'_{min}}}$$

- d est la taille de l'œil soit la distance cristallin/rétine
- f'_{min} est la plus faible distance focale que le cristallin peut adopter lorsqu'on accommode au maximum

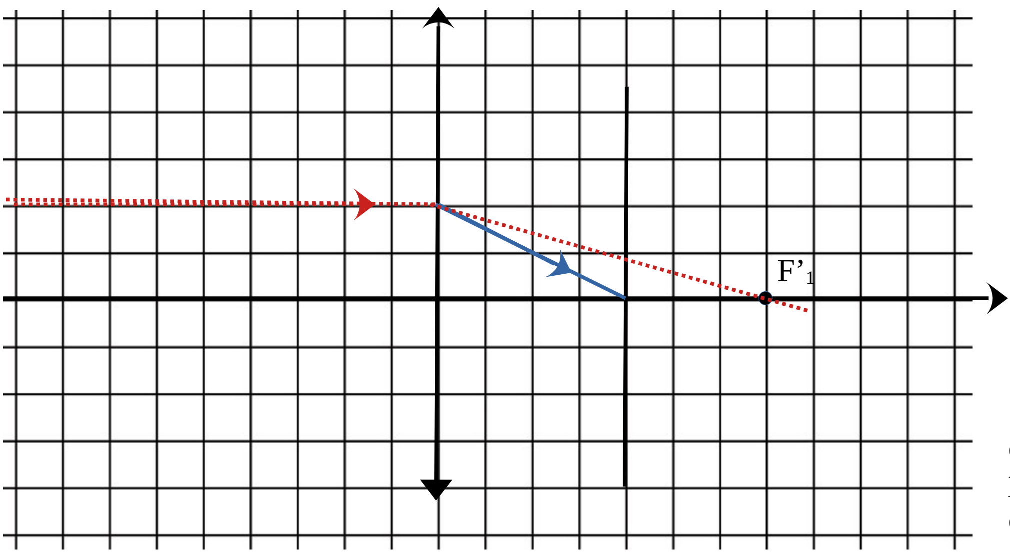
un œil est hypermétrope si : $f'_{min\ hypermétrope} > f'_{min\ emmetrope}$ (œil pas assez convergent) ou si $d_{hypermétrope} > d_{emmétrope}$ (œil trop court)

Si l'œil n'est pas assez convergent : $f'_{min\,hypermétrope}>f'_{min\,emmétrope} \Rightarrow d-f'_{min\,hypermétrope}<d-f'_{min\ emmétrope} \Rightarrow \frac{1}{d-f'_{min\,hypermétrope}}>\frac{1}{d-f'_{min\,emmétrope}}$

or $f'_{min\,hypermétrope}>f'_{min\,emmétrope} \Rightarrow f'_{min\,hypermétrope}d>f'_{min\,emmétrope}d$

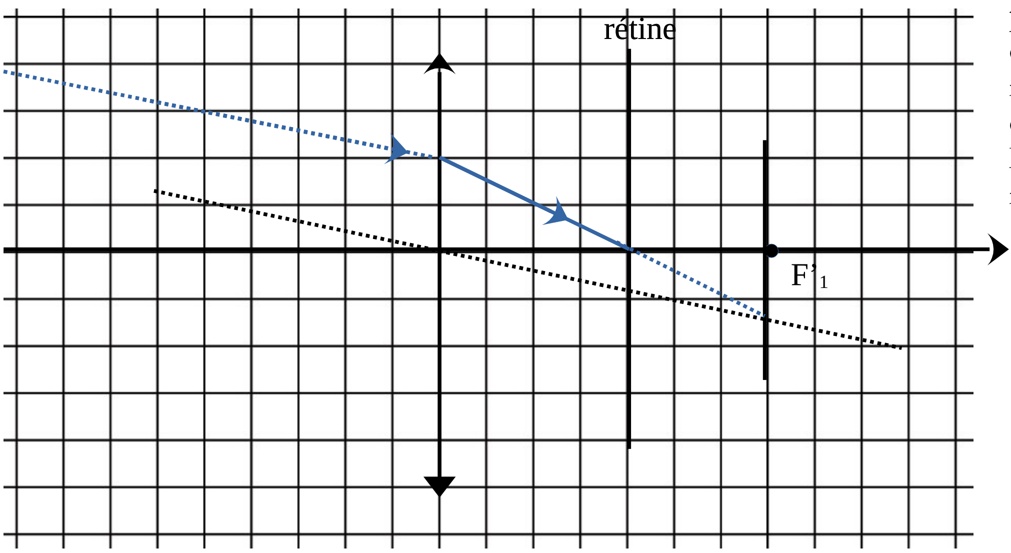
on en déduit $\frac{f'_{min\ hypermétrope}d}{d-f'_{min\ hypermétrope}}>\frac{f'_{min\,hypermétrope}d}{d-f'_{min\,emmétrope}} \Rightarrow \boxed{\boldsymbol{PP_{myope}>PP_{emmétrope}}}$

4.c Avec quels types de verres corrige-t-on l'hypermétropie ? Justifier à l'aide d'un schéma.



$F_{1'}$ est le foyer focal du cristallin de l'oeil hypermétrope . C'est en ce point que convergent les rayons provenant de l'infini et parallèles à l'axe optique *sans verre correcteur* (rayon rouge).

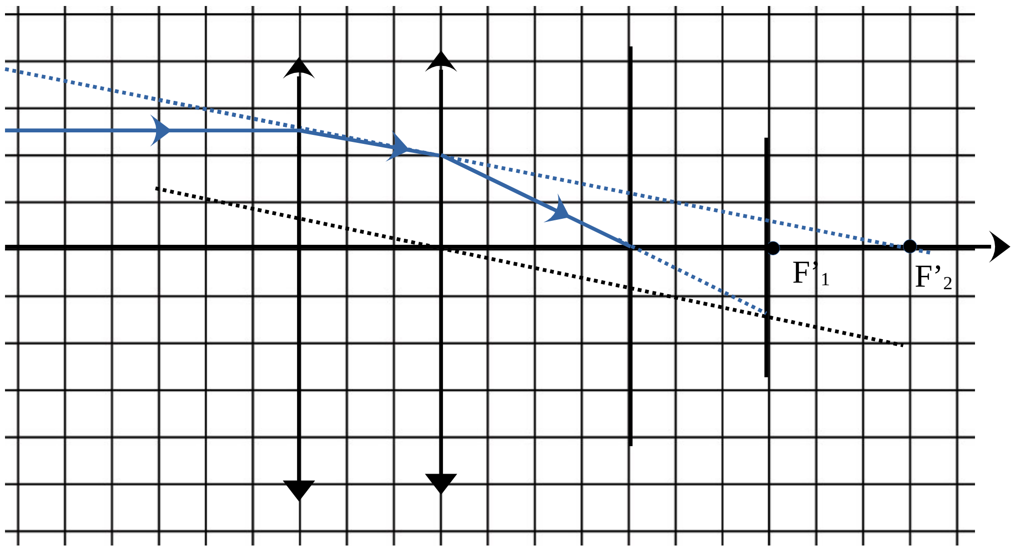
Avec un verre correcteur (par encore représenté) on souhaite qu'un rayon arrivant sur le verre correcteur en étant parallèle à l'axe optique emprunte le trajet du rayon bleu pour converger sur la rétine



rétine

On cherche à tracer le rayon bleu avant le cristallin.
On sait que deux rayons parallèles entre eux se croisent dans le plan focale image de la lentille.
On trace donc le rayon non dévié passant par le centre optique du cristallin (en pointillé) et coupant le rayon bleu dans le plan focal image du cristallin
Le rayon bleu est donc parallèle à ce rayon avant le cristallin

On cherche à tracer le rayon bleu avant le verre correcteur
On sait qu'il est parallèle à l'axe optique avant le verre correcteur
Or un rayon parallèle à l'axe optique arrivant sur une lentille divergente (le verre correcteur) ressort de cette dernière en passant virtuellement par le foyer focal image.
L'intersection du rayon bleu avec l'axe optique est donc le foyer focal image du verre correcteur (F'_2) . On place ensuite la lentille modélisant le verre correcteur qui doit se trouver à droite du foyer focal image (lentille divergente



Le rayon bleu est parallèle à l'axe optique avant de rencontrer le verre correcteur. Ici on voit qu'il se rapproche de l'axe optique après le verre correcteur. Le verre correcteur est donc nécessairement convergent !

4.d Donner le signe de la vergence des verres correcteurs d'un patient hypermétrope.

V>0

Pourquoi les patients hypermétropes ne portant pas leurs lunettes peuvent être sujets à de fortes migraines ?

Ils sont tout le temps en train d'accommoder (un objet peut être considéré à l'infini dès que la distance par rapport à la lentille est très supérieure à la distance focale de cette dernière).
Accommoder est fatiguant, ils ont donc des migraines.

Presbytie.
Un œil atteint de presbytie est un œil qui n'arrive plus à accommoder (l'œil est « usé », les muscles ciliaires fonctionnent mal). Autrement dit, pour un œil emmétrope atteint de presbytie, la distance focale du cristallin au repos est toujours située sur la rétine, mais elle est très peu modifiable.
5.a Comparer le PR d'un œil atteint de presbytie à celui d'un œil emmétrope.

Quand on regarde à l'infini, l'œil est au repos on n'accommode pas, l'œil presbyte est donc équivalent à un œil emmétrope

$$PR_{presbyte} = PR_{emmétrope} = \infty$$

5.b Comparer le PP d'un œil atteint de presbytie à celui d'un œil emmétrope.
La distance focale du cristallin ne peut pas beaucoup diminuer pour un œil presbyte. On se retrouve dans une situation similaire à l'œil hypermétrope(**lorsque le presbyte accommode)** : $\boxed{PP_{presbyte} > PP_{emmétrope}}$
5.c Donner le signe de la vergence des verres correcteurs d'un patient atteint de presbytie. Pourquoi les patients doivent-il porter des verres dits « progressifs » ?

comme pour les hypermétropes V>0

la valeur minimale que peut atteindre la distance focale du cristallin va progressivement augmenter chez un presbyte. Il faudra donc augmenter aussi progressivement la vergence des verres correcteurs pour compenser.

5.d Quelle est la différence entre un patient hypermétrope et un patient presbyte ?
L'hypermétrope doit accommoder quand il regarde à l'infini alors qu'un presbyte n'en a pas besoin.
5.e Pourquoi les patients atteints de forte myopie ont une presbytie qui se déclare plus tard que les autres (voire jamais) ?
Le PP de l'œil myope est plus proche du cristallin que celui d'un œil emmétrope. Comme la presbytie fait reculer petit à petit le PP, les deux effets se compensent : on ne remarque pas la presbytie du myope.

Amplitude d'accommodation. On note $d_0=\overline{OA_0}$ la mesure algébrique repérant la position d'un objet lumineux A_0B_0 perpendiculaire à l'axe optique du cristallin et dont l'image se forme sur la rétine. La position de l'image est repérée par la grandeur algébrique $d_i=\overline{OA_1}$

Données :

La distance entre le cristallin et la rétine est fixe et vaut D=16,7mm.

On prendra, pour un œil emmétrope, un punctum proximum de PPe = 25cm et pour un œil presbyte, PPp=35cm.

6.a Donner la relation entre la vergence du cristallin V, d_0 et d_i. Donner la dimension de V et son unité.
D'après la relation de conjugaison de Descartes on a :

$$\frac{1}{\overline{OA_1}}-\frac{1}{\overline{OA_0}}=\frac{1}{f'} \qquad V=\frac{1}{f'} \qquad \boxed{V=\frac{1}{d_i}-\frac{1}{d_0}}$$

or

6.b Calculer la valeur maximale de la vergence V_{max} quand l'œil emmétrope regarde un objet au PP.
Pour un objet au PP on a d_0 = - PP_e = -25 cm
La distance entre l'image et le cristallin est toujours la même car l'image doit se former sur la rétine : d_i = D = 16,7 mm

ainsi $V_{max}=\frac{1}{D}-\frac{1}{-PP_e}\Rightarrow V_{max}=\frac{1}{16{,}7\cdot 10^{-3}}+\frac{1}{25\cdot 10^{-2}}=\boxed{64\,\delta}$

6.c Calculer la valeur minimale de la vergence V_{min} quand l'œil emmétrope regarde un objet au PR.

Pour un objet au PR on a d_0 qui tend vers moins l'infini donc $\boxed{\frac{1}{d_0}\approx 0}$

$$\boxed{V_{min}=\frac{1}{D}-\frac{1}{0}\Rightarrow V_{min}=\frac{1}{16{,}7\cdot 10^{-3}}=60\,\delta}$$

6.d La variation de la vergence de l'œil $A=V_{max}-V_{min}$ est appelée amplitude d'accommodation. Calculer A pour un œil emmétrope.

$\boxed{\mathbf{A = 4{,}0\ \delta}}$

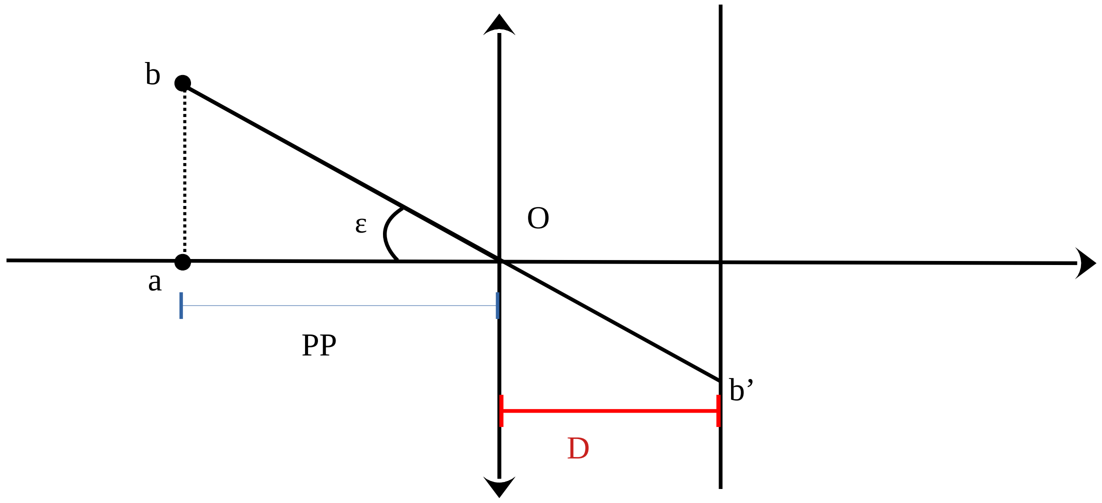
6.e Calculer l'amplitude d'accommodation pour un œil atteint de presbytie. Comparer à l'œil emmétrope.
Un œil presbyte a le même PR qu'un œil emmetrope donc $V_{min\,p}$ = 60 δ
Pour un objet au PP on a d_0 = - PP_p = -35 cm
La distance entre l'image et le cristallin est toujours la même car l'image doit se former sur la rétine : d_i = D = 16,7 mm

ainsi $\boxed{V_{max\,p}=\frac{1}{D}-\frac{1}{-PP_p}\Rightarrow V_{max\,p}=\frac{1}{16{,}7\cdot 10^{-3}}+\frac{1}{35\cdot 10^{-2}}=62{,}7\,\delta}$

Pour un œil presbyte $\boxed{A=V_{max\,p}-V_{min\,p}=2{,}8\,\delta}$. On trouve une valeur plus faible que pour l'œil emmétrope

Pouvoir séparateur. L'expérience montre que deux images ponctuelles a' et b' sur la rétine ne sont différenciées par le cerveau que si elles sont écartés au moins d'une distance minimum d. Les points objets correspondants ne sont donc différenciés que si l'angle sous lequel l'œil les voit est supérieur à la valeur limite ε appelé pouvoir séparateur.

7.a Sachant que ε est de l'ordre d'une minute d'arc (soit (1/60)°), déterminer la distance minimale ab entre les points a et b que peut distinguer un œil normal de PP=25cm.



$$\boxed{\tan(\epsilon)\approx\epsilon=\frac{ab}{PP}\Rightarrow ab=\epsilon\times PP \quad \text{et} \quad \epsilon=\frac{1}{60}\frac{\pi}{180} \quad \text{A.N} \quad ab=\frac{1}{60}\frac{\pi}{180}\cdot 25\cdot 10^{-2}=7{,}3\cdot 10^{-5}m=73\,\mu m}$$

7.b Quel est dans ce cas la distance focale f' du cristallin et la distance a'b' des images ?

$\boxed{\frac{1}{f'}=V_{max}=64\,\delta}$ on utilise ensuite la formule du grandissement de Descartes :

$\gamma=\frac{\overline{Oa'}}{\overline{Oa}}=\frac{\overline{a'b'}}{\overline{ab}}$ avec $\overline{Oa}=-PP$ et $\overline{Oa'}=D$ donc $\boxed{\gamma=\frac{\overline{Oa'}}{\overline{Oa}}=\frac{D}{-PP}=-6{,}68\cdot 10^{-2}}$

$\boxed{a'b'=|\gamma|\cdot ab=6{,}68\cdot 10^{-2}\cdot 7{,}3\cdot 10^{-5}=4{,}8\,\mu m}$

7.c Calculer ab pour un œil myope de PP=7,5cm. Conclure.

$ab=\epsilon\times PP$ $\boxed{ab=\frac{1}{60}\frac{\pi}{180}\cdot 7{,}5\cdot 10^{-2}=2{,}3\cdot 10^{-5}m=22\,\mu m}$

Un myope peut distinguer des objets plus petits qu'une personne sans défaut de vision !

Une histoire pour enfant. On lit dans un livre pour enfant l'histoire suivante : « Mattéo fait la sieste après avoir posé ses lunettes à côté de lui. Au bout d'un certain temps, l'herbe s'enflamme ! Mattéo cherche alors désespérément à récupérer ses lunettes mais il ne les voit pas car il est très myope ! ». L'auteur de cette histoire a-t-il fait des études scientifiques ? Justifier

Les verres correcteurs d'un œil myope sont divergents, l'énergie lumineuse transportée par les rayons lumineux est donc moins concentrée à la sortie du verre correcteur, l'herbe ne peut pas s'enflammer avec des verres correcteurs pour myope, cette histoire est donc abracadabrantesque.

Exercice 3* (type DS/concours) : la lunette astronomique

On représente une lunette astronomique par deux lentilles minces convergentes : l'objectif L_1 de focale f'_1 = 80 cm et de diamètre D= 60 mm, et l'oculaire L_2 de focale f'_2 = 6 mm. La lunette est réglée à l'infini, c'est-à-dire qu'elle donne d'un objet à l'infini une image à l'infini.

1 Quelle est la distance h entre L_1 et L_2 ? Quel est l'intérêt de ce réglage ?

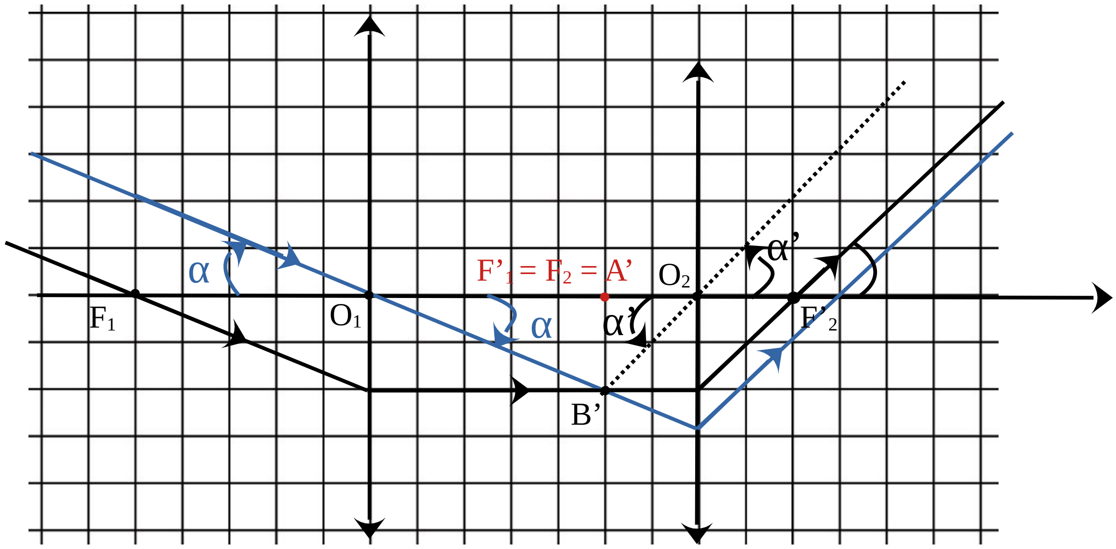
$\infty \xrightarrow{L_1} A'B' \xrightarrow{L_2} \infty$

- L'objectif L_1 forme une image intermédiaire A'B' à partir d'un objet à l'infini. Cette image est donc forcement dans le plan focal image de cette lentille L_1 : A'=F_1' donc $\overline{O_1A'}=\overline{O_1F_1'}=f'_1$

- l'oculaire doit former une image à l'infini de cet image intermédiaire **A'B'(qui joue le rôle d'objet pour l'oculaire) ainsi, A'B' doit être dans le plan focal objet de L_2 A' = F_2** donc $\overline{O_2A'}=\overline{O_2F_2}=-f'_2$

Ainsi $\boxed{h=\overline{O_1O_2}=\overline{O_1A'}+\overline{A'O_2}=\overline{O_1A'}-\overline{O_2A'}=f'_1+f'_2}$

2 Représenter sur un schéma**, sans respecter l'échelle,** le devenir de deux rayons incidents parallèles (l'un passant par le centre optique de l'objectif, et l'autre passant par le foyer objet de l'objectif) faisant un angle α avec l'axe optique et émergeant de la lunette sous un angle α' dans les conditions de Gauss. On appellera A'B' l'image intermédiaire.



3 Le grossissement d'une lunette est défini comme le rapport entre l'angle sous lequel est vu l'objet en présence de la lunette et l'angle sous lequel est vu l'objet à l'œil nu (sans la présence de la lunette).
Montrer que $G=\frac{\alpha'}{\alpha}$ puis déterminer l'expression de G en fonction de f_1' et f_2'.

Dans le triangle $O_1B'A'$ on a $\tan(\alpha)=\frac{\overline{A'B'}}{f'_1}$ Dans le triangle $A'B'O_2$ on a $\tan(\alpha')=\frac{\overline{A'B'}}{-f'_2}$

Dans les conditions de Gauss $\tan(\alpha)\approx\alpha$ et $\tan(\alpha')\approx\alpha'$

$$\boxed{G=\frac{\alpha'}{\alpha}=\frac{\frac{\overline{A'B'}}{-f'_2}}{\frac{\overline{A'B'}}{f'_1}}\Rightarrow \mathbf{G=\frac{-f'_1}{f'_2}}}$$

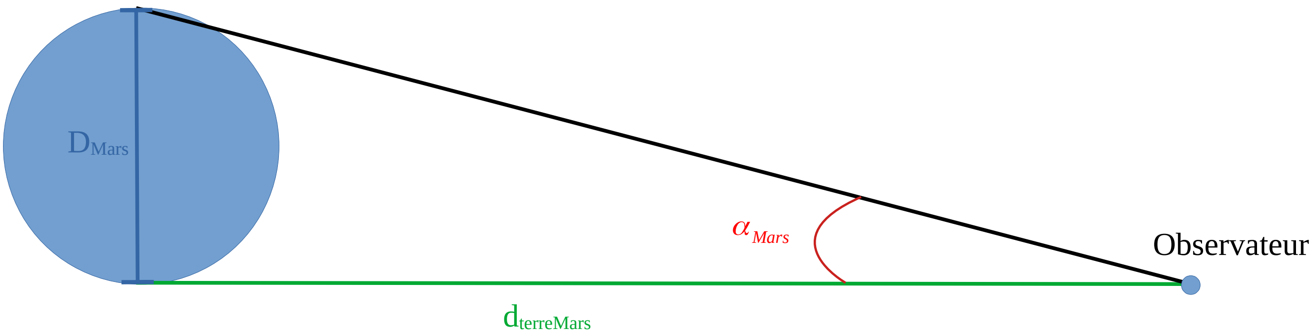
4 Si on estime à environ 30° l'angle maximal sous lequel un observateur voit l'image d'un objet à travers la lunette, cet observateur peut-il voir Mars en entier dans la lunette ? Même question pour la Lune.
Données : au moment de l'observation, la distance Terre Mars est égale à $7{,}0.10^7$km et la distance Terre Lune est égale à $3{,}8.10^5$km. Le diamètre de Mars vaut 6800km ; le diamètre de la Lune vaut 3400km.

$\alpha'_{max}=30°$ On peut donc calculer l'angle maximal α_{max} sous lequel on peut voir un objet sans lunette (pour lequel on a en sortie de la lunette $\alpha' = \alpha_{max}' = 30°$)

pour la lunette étudiée $G=\frac{-80\cdot10^{-2}}{6\cdot10^{-3}}=-133$

En effet $G=\frac{\alpha'_{max}}{\alpha_{max}}\Rightarrow|\alpha_{max}|=\frac{\alpha'_{max}}{|G|}\Rightarrow\alpha_{max}=\frac{30°}{100}=0{,}3°$ on peut convertir en radians $\boxed{\alpha_{max}=\frac{(0{,}3°)\times\pi}{(180°)}=5{,}2\cdot10^{-3}rad}$

On note α_{mars} l'angle sous lequel on voit mars en entier sans lunette.
Pour pouvoir la voir en entier à travers la lunette il faut $\alpha_{mars} < \alpha_{max}$
Déterminons α_{mars}



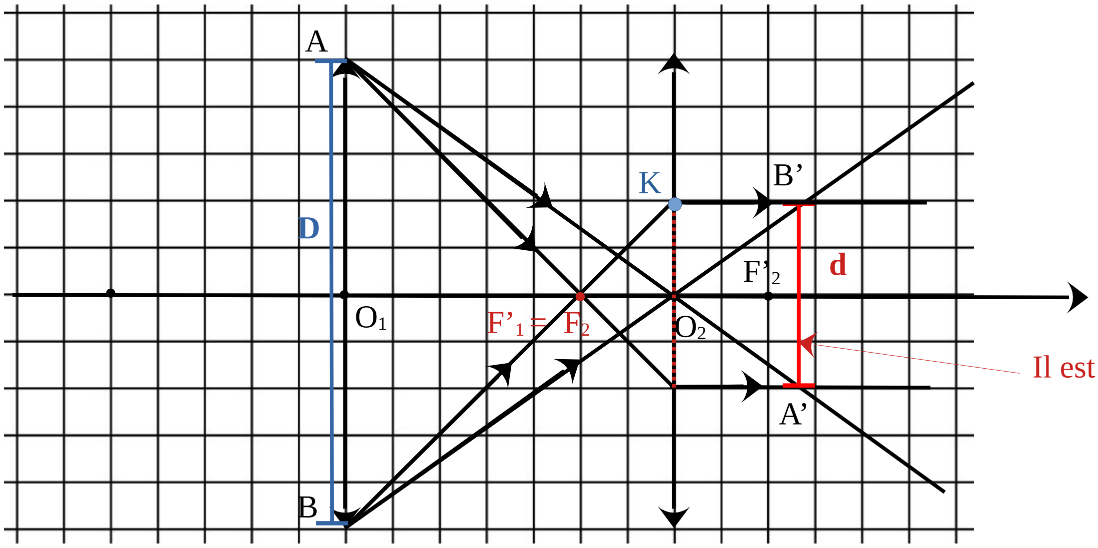
$$\tan(\alpha_{Mars})=\frac{D_{mars}}{d_{terreMars}}=\frac{6800}{7\cdot10^7}=9{,}7\cdot10^{-5}rad$$

$$\boxed{\tan(\alpha_{Mars}) <<1 \text{ donc on peut faire l'approximation } \alpha_{Mars}\approx\tan(\alpha_{Mars})=9{,}7\cdot10^{-5}rad}$$

on a bien $\alpha_{Mars}< \alpha_{max}$ on peut donc voir mars en entier de même pour la Lune $\boxed{\alpha_{Lune} \approx \frac{D_{Lune}}{d_{terreLune}} = \frac{3400}{3{,}8 \cdot 10^5} = 9{,}6 \cdot 10^{-5} = 8{,}9 \cdot 10^{-3} > \alpha_{max} \Rightarrow on\, ne\, peut\, pas\, voir\, la\, Lune\, en\, entier}$

5 Tous les rayons incidents qui pénètrent dans l'objectif de la lunette donnent des rayons émergents qui, à la sortie de l'instrument, passent à l'intérieur d'un cercle appelé cercle oculaire.

5.a Le cercle oculaire est l'image de l'objectif par l'oculaire. Déterminer graphiquement sa position.



5.b Établir la relation qui lie le diamètre d du cercle oculaire, le diamètre D de l'objectif et G. Faire l'AN.

On utilise le théorème de Thalès dans les triangles $O_1F'_1B$ et F_2O_2K :

$$\frac{\overline{O_1F'_1}}{\overline{F_2O_2}} = \frac{\overline{O_1A}}{\overline{O_2K}} \Rightarrow \frac{f'_1}{f'_2} = \frac{\frac{D}{2}}{\frac{d}{2}} \Rightarrow \frac{f'_1}{f'_2} = \frac{D}{d} \Rightarrow -G = \frac{D}{d} \Rightarrow \boxed{d = \frac{D}{-G} \quad \text{A.N d = 0,45 mm}}$$

5.c Quelle est la position du cercle oculaire par rapport à l'oculaire ?

Soit A un point de l'objectif sur l'axe optique (on A = O_1)

On peut calculer la position du cercle oculaire en calculant la position de A' image de A à travers l'oculaire en utilisant la relation de conjugaison de Newton:

$\overline{F_2'A'} \times \overline{F_2A} = -f'^2_2$ avec $\overline{F_2A} = \overline{F_1'O_1}$ car O_1 = A et F_1' = F_2 or $\overline{F_1'O} = -f'_1$ donc $\overline{F_2'A'} = \frac{-f'^2_2}{-f'_1}$

et finalement $\overline{O_2A'} = \overline{O_2F_2'} + \overline{F_2'A'} \Rightarrow \boxed{\overline{O_2A'} = f'_2 + \frac{f'^2_2}{f'_1}}$

A.N $\boxed{\overline{O_2A'} = ¿6{,}45\,cm \quad \text{le cercle oculaire se trouve à 6,45 cm derrière l'oculaire}}$

5.d Où faut-il placer l'œil pour avoir une observation optimale ?

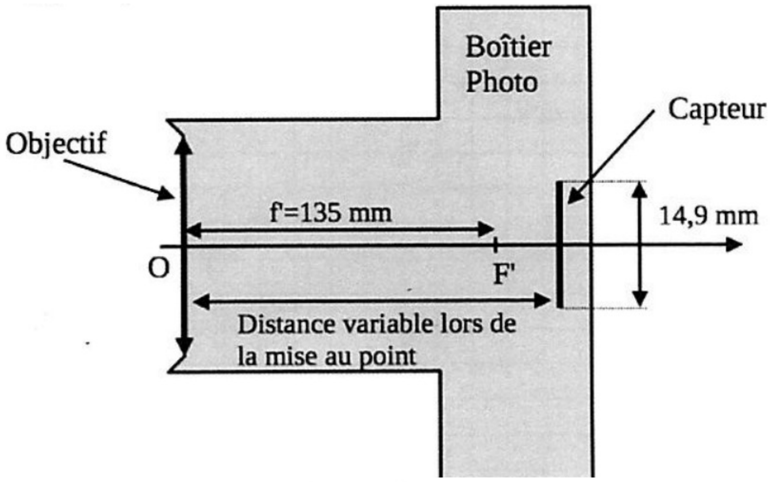
C'est au niveau du cercle oculaire que la luminosité est maximale, c'est donc ici qu'il faut placer son œil

5.e Quelle taille maximale le cercle oculaire ne doit-il pas dépasser lors d'une observation visuelle ?

On peut supposer que le cercle oculaire doit être plus petit que le diamètre de l'oeil : d< d_{oeil}

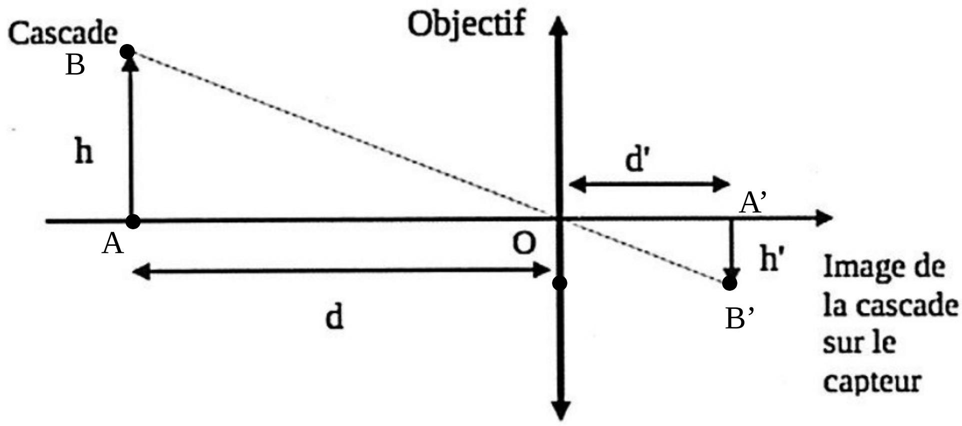
Exercice 4* : Cascade au Yellowstone

Modélisation de l'appareil photographique :



Notations :
On appelle h la hauteur de la cascade d la distance cascade/objectif
h' la hauteur de l'image de la cascade sur le capteur
d' la distance objectif/capteur
La distance focale est f' = 135 mm

Schématisation de la situation étudiée :



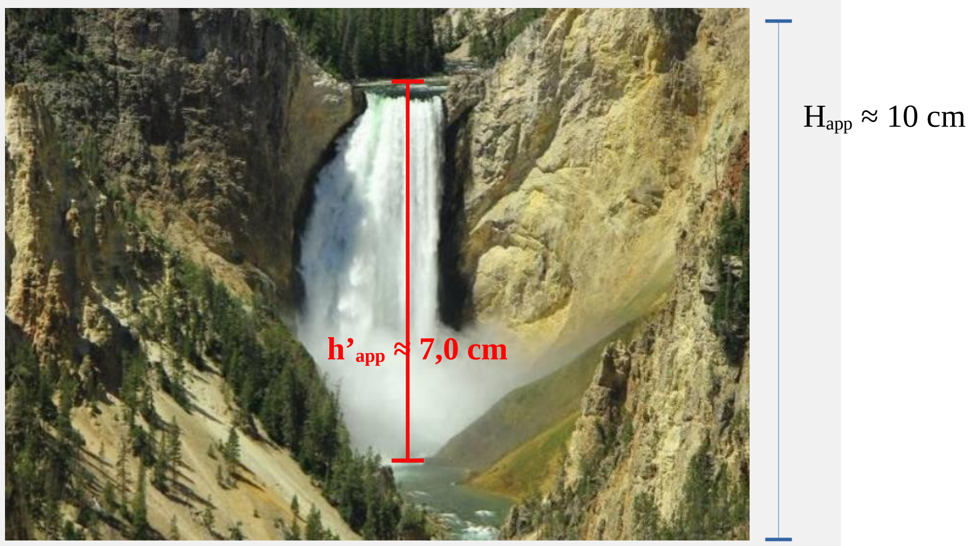
Nous allons utiliser les relations de conjugaison de Descartes pour trouver h :

$$\frac{1}{\overline{OA'}}-\frac{1}{\overline{OA}}=\frac{1}{f'} \quad \text{et} \quad \gamma=\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}=\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$$

Application au schéma ci-dessus :

$$\boxed{\frac{1}{d'}-\frac{1}{-d}=\frac{1}{f'} \qquad \gamma=\frac{d'}{-d}=\frac{-h'}{h}}$$

Pour déterminer la hauteur de la cascade il faut donc déterminer h' , d et d'
Détermination de h'
On note H_{app} la hauteur de l'image apparente (imprimée sur le polycopié)
On note h'_{app} la hauteur apparente de l'image de la cascade (imprimée sur le polycopié



D'après le document 2 , la hauteur réelle de l'image sur le capteur est égale à la dimension verticale du capteur soit H = 14,9 mm

on peut en déduire par proportionnalité la hauteur réelle de la cascade sur le capteur :

$$\boxed{h' = h'_{app} \cdot \frac{H}{H_{app}} \approx 10\, mm}$$

Détermination de d :

On mesure la distance apparente sur l'image du document 4 entre le photographe et la cascade puis on en déduit d grâce à l'échelle. $\boxed{d \approx 1{,}2 \cdot 10^3\, m}$

détermination de d'
Comme d>> f' on peut supposer que la cascade est à l'infini. Or l'image d'un objet à l'infini se forme dans le plan focale image de la lentille. On en dédit que le capteur se trouve à une distance d' ≈ f' = 135 mm de l'objectif

Détermination de h :
on utilise la formule du grandissement :

$$\boxed{\gamma = \frac{d'}{-d} = \frac{-h'}{h} \Rightarrow \boldsymbol{h = \frac{d}{d'} h'}}$$

A.N $\boxed{h = \frac{1200}{135 \cdot 10^{-3}} 10 \cdot 10^{-3}\, donc\, \boldsymbol{h \approx 89\, m}}$

Le résultat est cohérent, on trouve une valeur environ égale à 6 fois la hauteur d'un arbre ce qui est cohérent avec la photographie

Exercice 14* : Appareil photo et effet de filé (sujet oral concours Centrale/Supélec)

L'effet de filé est illustré sur la photographie d'un ciel étoilé ci-contre :
Un photographe amateur souhaite prendre en photo un satellite de télécommunication (assimilé à un point matériel de masse m) en orbite circulaire basse (altitude 750 km).

1. Quel est l'influence du temps de pose sur l'image ? Expliquer le phénomène de filé.

Plus le temps de pose est long, plus la quantité de lumière collectée par les capteurs est importante.
lorsqu'on photographie un objet en mouvement, la position de l'image de cet objet se déplace sur le capteur de l'appareil photographique (elle se forme sur des pixels différents au court du temps). Si l'image d'un point de l'objet a le temps de se déplacer d'un pixel à un autre sur le capteur durant le temps de pose, l'appareil affichent donc sur la même photographie les différentes positions successives de ce point de l'objet. On voit donc une portion de la trajectoire complète de l'objet, c'est l'effet de filé

2. Afin d'éviter l'effet de filé, déterminer le temps de pose maximal que le photographe doit régler sur son appareil photographique numérique.

Hypothèse simplificatrice :
- On suppose que l'objet photographié (noté A) est ponctuelle et qu'il va former une image ponctuelle (A') sur le capteur de l'appareil photographique, c'est à dire qu'elle occupe un seul pixel.

Reformulation de la problématique
Supposons que pendant la durée du temps de pause, l'image de l'objet à le temps de se déplacer de 10 pixels, on suppose que l'effet de filé sera visible.

(le choix de 10 pixels est arbitraire, mais on imagine que l'œil n'arrive pas à distinguer l'effet de filé sur seulement 2 pixels, on prend donc l'ordre de grandeur supérieur)

Il faut donc évaluer la durée nécessaire pour que l'image de l'objet se déplace de 10 pixels sur le capteur

Notation
- On note d_p la taille d'un pixel
- t_p le temps de pose
-A(t) le point objet à l'instant t et A($t+t_p$) le point objet après le temps de pose
- A'(t) l'image de A(t) sur le capteur et A'(t+ t_p) l'image de A($t+t_p$) sur le capteur
- la distance réelle parcourue par l'objet pendant le temps de pose est $|\overline{A(t)A(t+t_p)}|$

Reformulation mathématique de la condition d'observation de l'effet de filé :

L'effet de filé sera visible si $\boldsymbol{|\overline{A'(t)A'(t+t_p)}|>10\,d_p}$

Pour déterminer la valeur de t_p à partir de laquelle l'effet de filé sera visible il faut donc déterminer d_p et $\overline{A'(t)A'(t+t_p)}$

- Détermination de d_p:

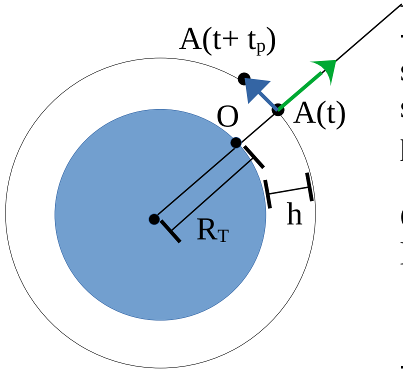
hypothèse : on suppose que les pixels sont carrés de côté dp et qu'ils sont collés les uns aux autres
(en pratique ce n'est pas le cas)
La surface d'un pixel est donc Spixel = d_p^2

$$S_{capteur}=N_{pixel}\cdot S_{pixel}\Rightarrow 24\cdot 36\,mm^2=24\cdot 10^6\cdot d_p^2\Rightarrow d_p=\sqrt{\frac{24\cdot 36}{24\cdot 10^6}}\,mm=6\cdot 10^{-6}\,mm=6\,\mu m$$

<u>Détermination de</u> $|\overline{A'(t)A'(t+t_p)}|$

Pour déterminer $\overline{A'(t)A'(t+t_p)}$ **nous allons dans un premier temps déterminer la distance algébrique** $|\overline{A(t)A(t+t_p)}|$
Puis utiliser les caractéristiques de l'appareil photographie pour trouver $\overline{A'(t)A'(t+t_p)}$

- Détermination de la distance $|\overline{A(t)A(t+t_p)}|$ **parcourue par le satellite pendant le temps de pose :**



Hypothèses simplificatrices :
- On suppose que le temps de pose est suffisamment court pour que la trajectoire du satellite puisse être considérée **rectiligne** pendant cette durée.

On peut donc exprimer simplement la norme de la vitesse v du satellite :
$$\boldsymbol{v=\frac{|A(t)A(t+t_p)|}{t_p}}$$

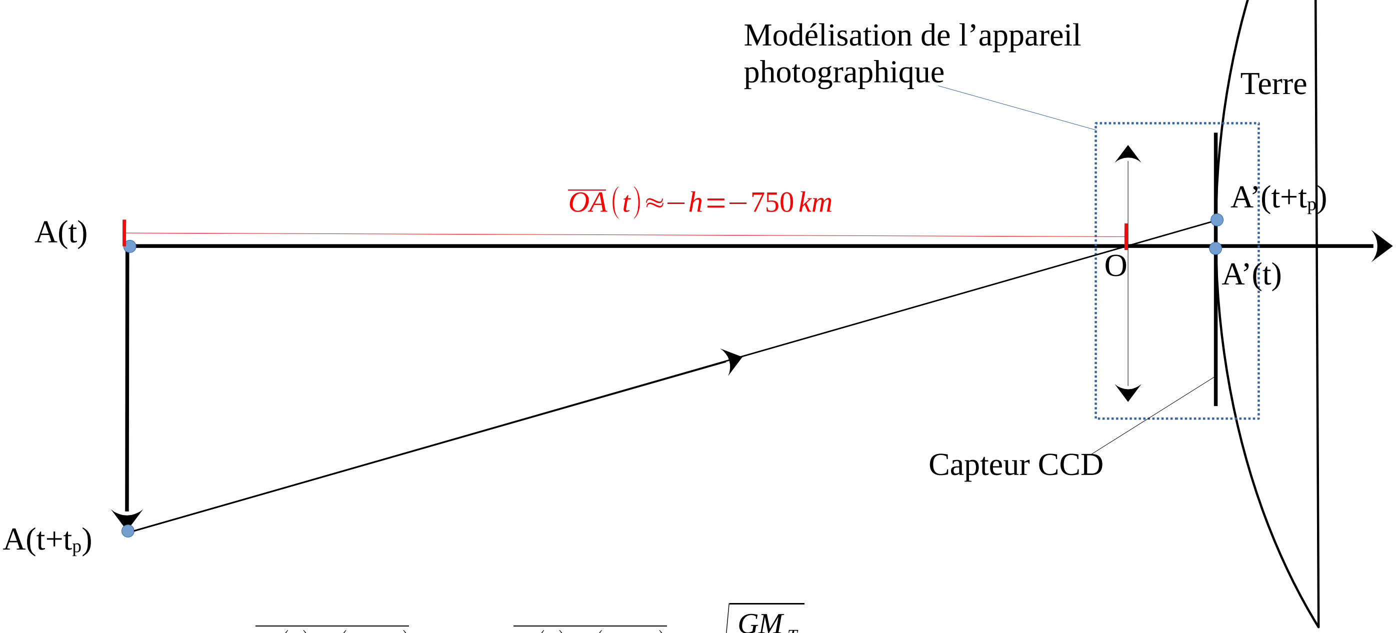
- On suppose aussi que t_p est suffisamment court pour qu'on puisse négliger la rotation de la terre sur elle même.
- On suppose que la trajectoire du satellite est circulaire (sur l'ensemble de sa trajectoire) et que le mouvement est uniforme

- Détermination de v
D'après la deuxième loi de Newton :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{-GM_Tm}{(R_T+h)^2}\vec{u}\Rightarrow -m\frac{v^2}{R_T+h}\vec{u}=\frac{-GM_Tm}{(R_T+h)^2}\vec{u}\Rightarrow v=\sqrt{\frac{GM_T}{R_T+h}}$$

ainsi avec les hypothèses : $|\overline{A(t)A(t+t_p)}|=\sqrt{\frac{GM_T}{R_T+h}}t_p$

- Détermination de $\overline{A'(t)A'(t+t_p)}$¿ grâce aux caractéristiques de l'appareil



Sur le schéma précédent $\overline{A(t)A(t+t_p)}<0\,donc\,\overline{A(t)A(t+t_p)}=-\sqrt{\frac{GM_T}{R_T+h}}t_p$

Calculons la taille de l'image $|\overline{A'(t)A'(t+t_p)}|$

Pour cela nous allons utiliser les relations de conjugaison de Descartes :

$$\gamma=\frac{\overline{OA'(t)}}{\overline{OA(t)}}=\frac{\overline{A'(t)A'(t+t_p)}}{\overline{A(t)A(t+t_p)}}$$

$$\frac{1}{\overline{OA'(t)}}-\frac{1}{\overline{OA(t)}}=\frac{1}{f'}\Rightarrow\frac{1}{\overline{OA'(t)}}=\frac{f'+\overline{OA(t)}}{f'\cdot\overline{OA(t)}}\Rightarrow\overline{OA'(t)}=\frac{f'\cdot\overline{OA(t)}}{f'+\overline{OA(t)}}$$

on a donc :

$$\boxed{\gamma=\frac{\overline{OA'(t)}}{\overline{OA(t)}}=\frac{f'}{f'+\overline{OA(t)}}=\frac{f'}{f'-h}}$$

Remarque $h\gg f'\,donc\,\boldsymbol{\gamma\approx\frac{f'}{-h}}$

On peut maintenant exprimer $\left|\overline{A'(t)A'(t+t_p)}\right|$ en fonction du temps de pose :

$$\boxed{\overline{A'(t)A'(t+t_p)} = \gamma\, \overline{A(t)A(t+t_p)} = \frac{f'}{h}\sqrt{\frac{GM_T}{R_T+h}}\, t_p}$$

Au final pour ne pas avoir l'effet de filet il faut :

$$\overline{A'(t)A'(t+t_p)} < 10\, d_p \Rightarrow \frac{f'}{h}\sqrt{\frac{GM_T}{R_T+h}}\, t_p < 10\, d_p \Rightarrow \boxed{t_p < 10\frac{h\, d_p}{f'\sqrt{\frac{GM_T}{R_T+h}}}}$$

A.N $\boxed{10\frac{750\cdot 10^3\cdot 6\,10^{-6}}{50\cdot 10^{-3}\sqrt{\frac{6{,}67\cdot 10^{-11}\,5{,}973\cdot 10^{24}}{(6371+750)\cdot 10^3}}} = 0{,}12\,s \quad \text{il faut donc} \quad t_p < 0{,}12\,s \quad \text{c'est cohérent !}}$

Données	Données techniques de l'appareil photographique
• Rayon de la Terre : R_T = 6371 km • Masse de la Terre : M_T = $5{,}973.10^{24}$ kg • Masse du satellite : m = 1292 kg • Constante de gravitation G = $6{,}674.10^{-11}$ SI	• Capteur : CMOS 24 millions de pixels • Taille du capteur : 24x36 mm^2 • Distance focale de l'objectif : 50mm • Vitesse d'obturation : 30 à 1/8000s