CHAPITRE 5: Circuits linéaires du premier ordre

Point Maths

Dans ce chapitre nous serons amené à résoudre des **équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constants et second membre constant.**

(de la forme y' = a y + b avec (a, b) ∈ $\mathbb{R}^2$)

Rappel

Soit (a, b) ∈ $\mathbb{R}^2$ avec a ≠ 0. **Les solutions** de l'équation différentielle **y' + a y = b (1)** sont les fonctions de la forme :

$$x \to \lambda e^{-ax} + \frac{b}{a}, \lambda \in \mathbb{R}.$$

Méthode de résolution:

Équation **homogène** associée à (1) : **y' = a y (H)**

Forme de la solution générale de (H): $y_H(x) = \lambda e^{-ax}, \lambda \in \mathbb{R}.$

Solution particulière de l'équation différentielle (1) (on choisit une constante) : $y'_p = 0 \Rightarrow a y_p = b \Rightarrow y_p = \frac{b}{a}$

Par superposition, les solutions de l'équation différentielle (1) sont de la forme : $\mathbf{y(x) = y_H(x) + y_p(x)}$

Remarque notation

En physique on dérive **par rapport à une grandeur physique.** Dans ce chapitre on dérivera par rapport au temps on écrira l'équation différentielle **(1)** sous la forme :

$$\frac{dy}{dt} + a\, y(t) = b$$

Les solutions seront sous la forme : $y(t) = \lambda e^{-at} + \frac{b}{a}, \lambda \in \mathbb{R}.$

Solution unique vérifiant la condition initiale

Il existe une unique solution qui correspond au système physique étudiée, pour trouvée cette solution il faut déterminer λ.

On trouve λ grâce à une condition initiale connue **a priori** sur la grandeur physique étudiée $\mathbf{y(t=0)=y_0}$

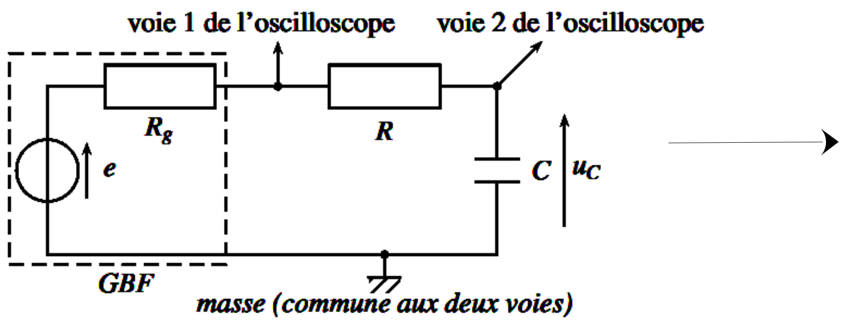
Remarque voc :

Un circuit linéaire du premier ordre est un circuit électrique dont une grandeur électrique (tension aux bornes d'un dipôle ou intensité du courant traversant un dipôle) vérifie une équation différentielle linéaire du premier ordre. C'est le sujet de ce chapitre.

I Circuit RC

1.1 Réalisation expérimentale

a) Schéma du montage

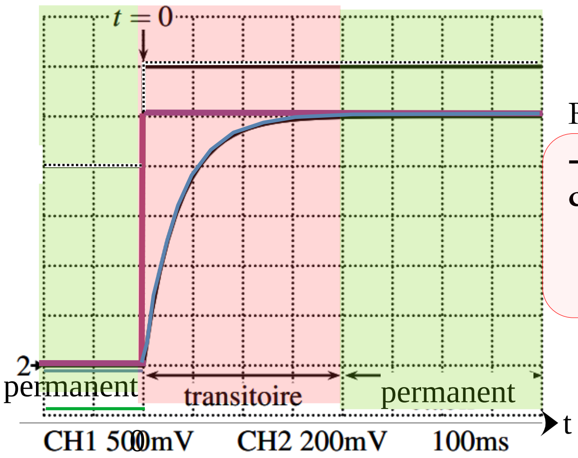


- On génère un **échelon de tension** avec le GBF (voir cours CH03) que l'on observe sur la **voie 1.**
- On observe simultanément la tension aux bornes du condensateur qui constitue le signal de sortie.

Entrée : Sortie :

Rmq Voc

b) ***Observations***



- La tension de sortie **(voie 2)** n'est pas instantanément égale à la tension d'entrée **(voie 1)**

e(t) est discontinue mais $u_c(t)$ doit forcement être continue

Rmq Voc :

-On appelle régime permanent (ou établi) le fonctionnement du circuit où

Attention :

- *Un régime stationnaire est un régime permanent.*

-Un régime sinusoïdal $s(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$ *est un régime permanent si l'amplitude, la phase initiale et la pulsation ne varient pas au cours du temps.*

On remarque sur l'évolution de la réponse (voie 2) deux régimes :

- le régime régime permanent (dans ce cas stationnaire) pour lequel la sortie est constante et égale à l'entrée. C'est le cas pour t<0 car $u_c(t) = e(t) = 0$ et à partir d'un certain temps T_R car $u_c(t) = e(t) = 1$ V

- le régime transitoire, entre l'instant initial et le début du régime permanent.

La durée de ce régime transitoire **…….**

I.2) Réponse temporelle d'un circuit RC à un échelon de tension

a) *Équation différentielle vérifiée par $u_C(t)$* *(À Savoir retrouver)*

- **La loi des mailles** impose :
- En utilisant la **loi d'ohm** pour le résistor on a :
- En utilisant **la relation tension-courant pour C** en convention récepteur :

En injectant **(3)** dans **(2)** :

On peut réécrire la loi des mailles en fonction de e(t) et $u_c(t)$:

Une telle relation est une équation différentielle d'ordre un, car elle contient $u_C(t)$ et sa dérivée première.

On sait **presque** la résoudre… Problème e(t) est une fonction discontinue en 0 !**<u>On va résoudre (*) seulement pour t>0</u>.** Dans ce cas on a (*) qui devient :

Rappel : [RC] =

on peut réécrire l'équation différentielle (*) :

b) Résolution

On reconnaît une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants, les solutions sont de la forme :

(voir méthode dans le point math)

On détermine λ grâce à la condition initiale.

<u>Remarque notation :</u>

Comme l'équation différentielle (*) n'est vraie que pour t>0 , la condition initiale **<u>ne peut pas</u>** correspondre à l'instant **t =0 s**

Dans ce cas la condition initiale correspondra à l'instant t=0⁺ s tel que $0^{+} = \lim_{t \to 0 \text{ par valeurs supérieures}} t$

<u>Comment trouver une grandeur électrique à l'instant t= 0⁺ ?</u>

- Étape 1 :

En général à l'instant **$t=0^-$** le régime permanent stationnaire est établi depuis longtemps, on peut facilement trouver les grandeurs électriques à l'instant $t=0^-$ en écrivant la **loi des mailles** et **en simplifiant les dipôles L et C par leurs équivalents en régime stationnaire.**

- Étape 2 :

On détermine par continuité entre $t=0^-$ et $t=0^+$ **certaines grandeurs** qui sont forcement continues :

- **On aura toujours**

Car l'intensité du courant traversant une bobine est une grandeur continue (explication à la fin du chap 04 , **continuité de l'énergie stockée dans la bobine**)

- **On aura toujours**

Car la tension aux bornes d'un condensateur est une grandeur continue (**continuité de l'énergie stockée dans C**)

- **Étape 3 (si nécessaire)**

On détermine les autres grandeurs à l'instant $t=0^+$ en écrivant la loi des nœuds et/ou des mailles.

<u>Application au cas étudié</u>

- étape 1 :

à $t=0^-$ le régime permanent est établi depuis longtemps (la tension du générateur est nulle depuis longtemps) comme le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert, $i(0^-)=0$ on en déduit que la tension au bornes de R est nulle, et par la loi des mailles la tension aux bornes du condensateur est nulle aussi **$u_C(0^-) = 0$ V**

remarque : en exercices l'énoncé précise souvent « le condensateur est déchargé à $t=0^-$ » on peut directement en déduire que $u_c(0^-)= 0$V

- étape 2 :

- étape 3 : pas nécessaire ici.

On peut maintenant trouver la solution unique vérifiant la condition déterminer $u_{c(t)}$

finalement

c) Durée du régime transitoire

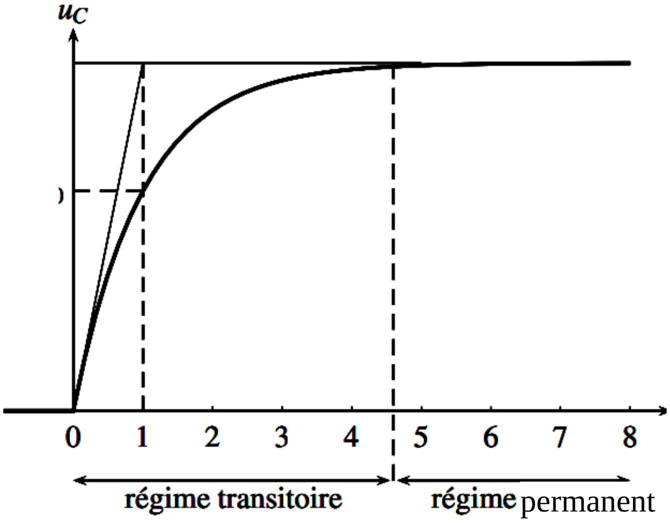
Le régime transitoire se termine lorsque **t= T_R**
on considère qu'alors **$u_c(t=T_R) = 0{,}99E_0$**

Comme $u_c(t=T_R)=E_0(1-e^{\frac{-T_R}{\tau}})$

on en déduit $E_0(1-e^{\frac{-T_R}{\tau}})=0{,}99\,E_0 \Rightarrow 0{,}01\,E_0=E_0 e^{-\frac{T_R}{\tau}}$

$T_R \approx 5\tau$ $\ln(0{,}01)=\frac{-T_R}{\tau} \Rightarrow T_R=-\mathbf{ln(0{,}01)}\,\tau$

Le régime permanent est atteint au bout de 5τ



d) Comment déterminer τ ?

- **Méthode 1 : on connaît R et C , on calcule** $\tau=RC$

- **Méthode 2 : valeur de la tension à t=τ**

- **Méthode 3 : tangente à l'instant initial.**

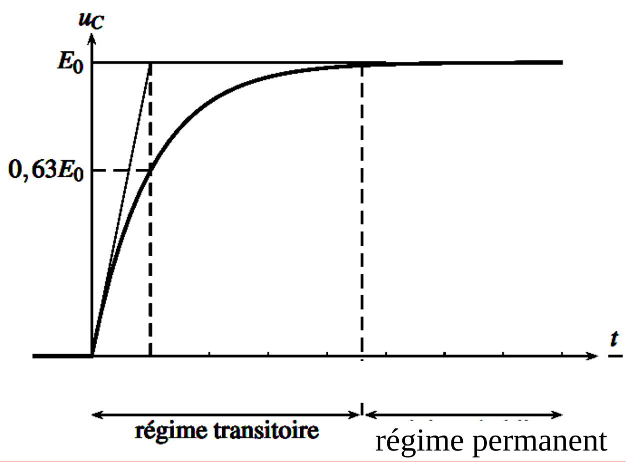
Rappel

la droite tangente à la fonction f en x_0 a pour équation $y(x)\approx\frac{df}{dx}(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$

Ainsi la tangente à la u_c à l'instant $t=0^+$ a pour équation :

or

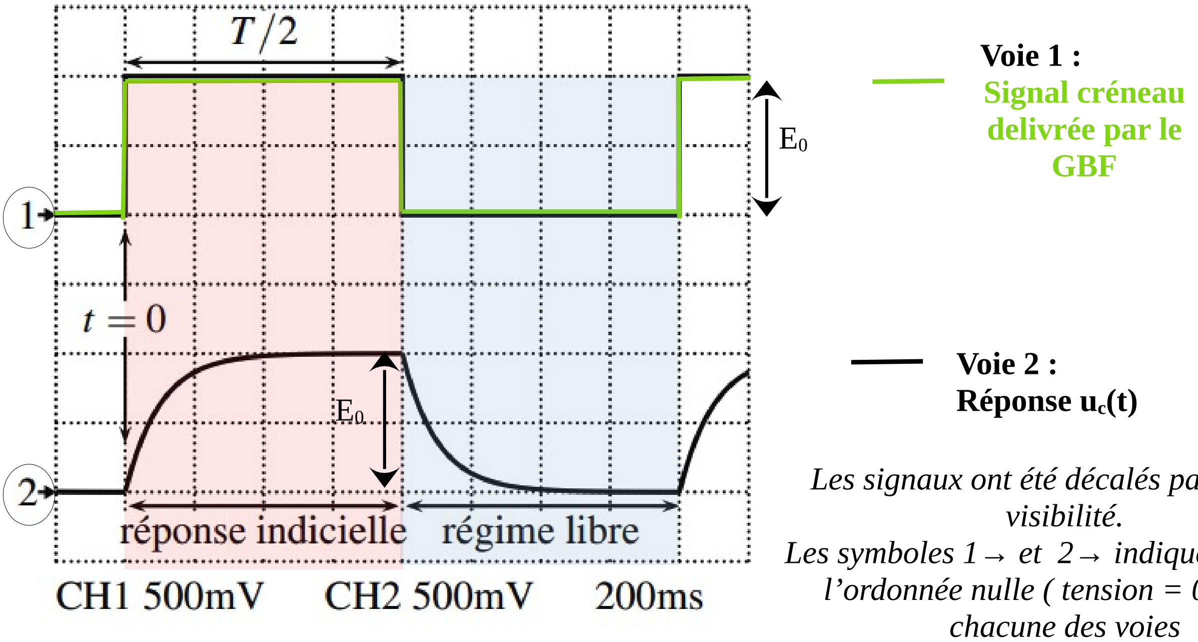
On remarque que lorsque t= τ on a y(τ) =E_0



I.3) Réponse temporelle d'un circuit RC en régime libre

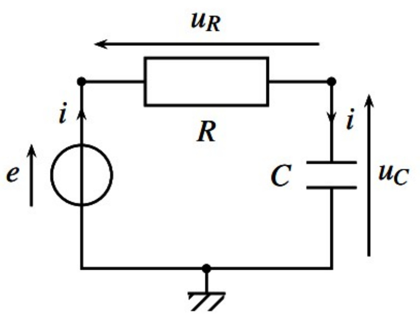
a) Observations expérimentales

Lorsque le GBF fournit une **tension créneau** de période T valant E_0 sur une demi-période et 0 sur l'autre, on observe à l'oscilloscope les signaux e(t) et $u_c(t)$:



Les signaux ont été décalés par souci de visibilité.
Les symboles 1→ et 2→ indique ou se situe l'ordonnée nulle (tension = 0 V) pour chacune des voies

Schéma équivalent du circuit en régime libre :



circuit étudié

pour $\frac{T}{2} < t < T$ on a $e(t) = 0$ $\Rightarrow$

Remarque voc :

b) Équation différentielle vérifiée par $u_C(t)$ en régime libre

On a toujours $e(t) = RC\frac{du_c}{dt}(t) + u_c(t)$

c) Résolution ***(à savoir faire!)***

Cette équation différentielle est homogène. **Les solutions**, sont donc :

La constante λ se calcule avec la condition initiale de ce régime, c'est à dire la valeur de $u_C(\frac{T}{2}^{+})$ *immédiatement après le changement de valeur de e(t).*

- **Utilisation de la condition initiale pour trouver λ :**
-

La tension aux bornes du condensateur étant continue :

On en déduit **λ** :

ainsi

Si on pose $t' = t - \frac{T}{2}$ on a donc la solution unique qui s'écrit :

Représentation temporelle de la réponse $u_c(t')$

En régime libre

Rmq : Parfois, le condensateur commence la décharge à t=0, on a alors directement $u_c(0)=E_0$

I.4) Évolution de l'intensité (ou de la tension u_R) pour une réponse indicielle (échelon)

Nous étudions un circuit similaire à celui du I.1) sauf que la **sortie est différente**

Entrée : tension échelon délivrée par le GBF → circuit *R*, *C* → sortie : tension aux bornes de *R*

-Rmq : étudier la tension u_R (t) revient à étudiée i(t) car les deux grandeurs sont reliées par une relation de proportionnalité d'après la loi d'Ohm **u_R(t) = R i(t)**

a) *Équation différentielle vérifiée par $u_R(t)$*

Pour établir l'équation différentielle, on applique la loi des mailles :

pour t>0

On veut avoir une équation différentielle sur u_R . On va donc dériver la loi des mailles pour f aire apparaître la dérivée première de $u_R(t)$:

D'après la relation tension-courant aux bornes d'un condensateur en convention récepteur :

b) Résolution

Les solutions sont de la forme $i(t)=\lambda e^{\frac{-t}{\tau}}$ **avec** $\tau=RC$

Remarque importante : i(t) **traversant le condensateur n'a aucune raison d'être une grandeur continue dans ce circuit.** *(contrairement à la tension aux bornes du condensateur qui doit être continue par continuité de l'énergie stockée)*

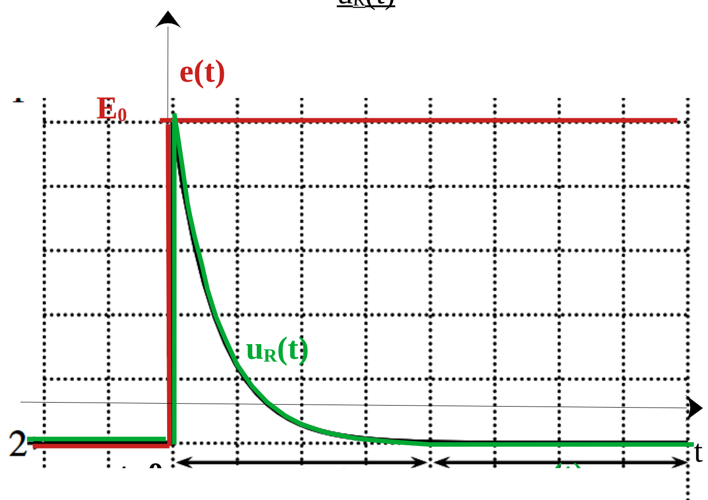
Continuité de l'énergie stockée dans C donc on a :

La loi des mailles à l'instant t = 0^+ s'écrit :

or $e(0^+)$ = donc $u_R(0^+)$.

Ainsi d'après la loi d'Ohm dans R :

Évolution temporelle de l'entrée e(t) et de la sortie $u_R(t)$



I.5) Aspect énergétique

a) Bilan de puissance

D'après la loi des mailles

En multipliant par l'intensité du courant :

Cette égalité met en jeu différentes puissances (le produit d'une tension par une intensité est une puissance) :

La puissance instantanée cédée par le GBF au circuit à l'instant t

La puissance instantanée reçue et dissipée par effet Joule par la résistance à l'instant t

La puissance instantanée échangée par le condensateur avec l'énergie stockée à l'instant t dans le condensateur $E_C(t)=\frac{1}{2}C\,u_c^2(t)$

b) Bilan d'énergie

- L'énergie totale délivrée par le GBF depuis le moment où on ferme l'interrupteur est :

- Énergie stockée dans le condensateur :

- l'énergie dissipée dans le résistor est :

Finalement

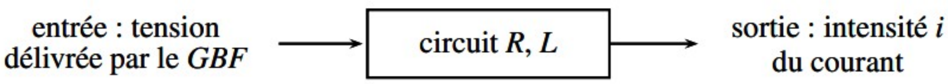
Remarque interprétative:

II Circuit RL

II.1) Réalisation expérimentale

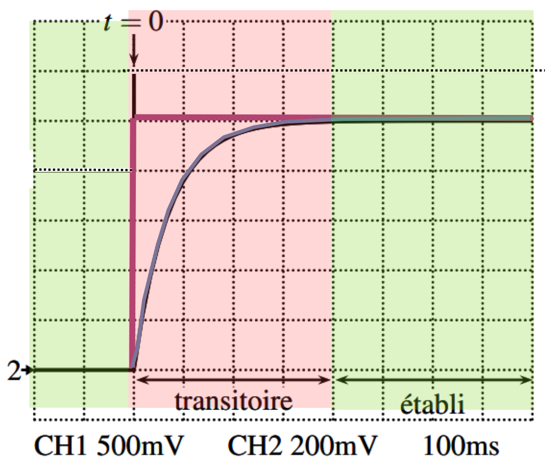
a) Schéma du montage

Ici la réponse du circuit est l'intensité du courant
(ou la tension aux bornes de la résistance)



b)Observation

Évolution de e(t) et u_R(t) pour la réponse à un échelon



On remarque un comportement similaire à celui de la tension aux bornes d'un condensateur.
mais attention !