

PROGRAMME DE COLLES N° 5

Semaine du 14/10/2024 au 18/10/2024

👉 *Ensembles, nombres complexes* 👈

Format de la colle :

- Automatismes de calcul (env. 10 min) : quelques items simples parmi les thèmes de la liste (actualisée chaque semaine) en page 2.
- Restitution du cours (env. 15 min) : définition et/ou théorème des chapitres au programme, puis démonstrations, exemples ou exercices exigibles listés plus bas.
- Exercice(s) libre(s) (env 30 min).

Chapitre 3 – Ensembles

Révisions du programme précédent.

— Chapitre 4 : Nombres complexes —

Tout le chapitre.

⚠ Les automatismes de cette semaine consistent à mettre sous forme trigonométrique, trouver les racines carrées d'un nombre complexe sous forme algébrique ou en une linéarisation d'expression polynomiale en cos et sin.

1 Définition, forme algébrique

- 1.1 Construction
- 1.2 Représentation géométrique d'un nombre complexe
- 1.3 Conjugué
- 1.4 Module : inégalités triangulaires

2 Exponentielle complexe, forme trigonométrique

- 2.1 Nombres complexes de module 1
- 2.2 Forme trigonométrique, argument
- 2.3 Application à la géométrie plane : alignement, parallélisme, orthogonalité, translation, homothétie et rotation de centre O , symétrie par rapport aux abscisses
- 2.4 Applications à la trigonométrie
- 2.5 Exponentielle d'un nombre complexe

3 Nombres complexes et équations polynomiales

- 3.1 Équations algébriques
- 3.2 Un premier cas d'équation algébrique : les racines carrées complexes
- 3.3 Équations de degré 2 dans \mathbb{C}
- 3.4 Racines n -ièmes d'un nombre complexe

Démonstrations, exemples ou exercices exigibles comme questions de cours

- Chapitre 3. Exercice 7 : pour A, B, C trois parties d'un ensemble E , démontrer que les trois assertions ci-dessous sont équivalentes :

$$(i) (A \setminus B) \subset C$$

$$(ii) (A \setminus C) \subset B$$

$$(iii) A \subset (B \cup C)$$

- Chapitre 4. Développement de $|z + z'|^2$ et inégalité triangulaire (sans le cas d'égalité pour la démo).
- Chapitre 4. Proposition décrivant les racines n -ièmes de l'unité.

Automatismes de calcul

On donne quelques exemples de capacité attendue pour chaque thème.

[Le cahier de calcul](#) fournit également une excellente source d'entraînement/inspiration.

- **Logique, raisonnement**

Exemples : montrer que $x^2 + y^2 \geq 2xy$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, savoir écrire en langage symbolique qu'une suite est majorée, qu'une fonction est 2π -périodique et savoir nier ces assertions.

- **Trigonométrie.**

Exemples : formule $\cos(2a)$, résolution de $\sin a = \sin b$, $\cos(2x + 1) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos x = \sin x$.

- **Inégalités : résoudre/prouver des inégalités simples**

Exemples : résoudre $|x| \leq 3x + 2$, montrer que $|\sin(nx)| \leq n |\sin x|$ pour tous $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$, encadrer rapidement $x \mapsto \frac{\cos x + 2}{x^2 + 4}$ sur $[0; 1]$.

- **Calcul élémentaire de nombres complexes** (module, argument, linéarisation, angle moitié, racines carrées, n -ièmes).

Exemples : calculer la forme exponentielle de $\sqrt{3} - 3i$, les racines carrées de $3 - 4i$, linéarisation de $\cos^3 x$, résolution de $z^n = 1$ dans \mathbb{C} .