CHAPITRE 06 : oscillateurs harmoniques

I Définition mathématique et forme des solutions

Dans ce chapitre, on introduit un modèle physique appelé l'oscillateur harmonique

I.1) Définition :

On appelle oscillateur harmonique un système physique décrit par une grandeur x dépendant du temps et vérifiant une équation différentielle de la forme :

Rmq notation on peut aussi écrire :

- **b est une constante réelle qui peut être nulle.**
- **est** une constante réelle positive qui est appelée

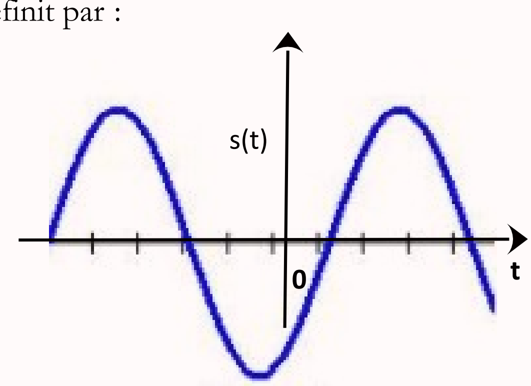
Rmq : on peut aussi définir une

Rmq :

On peut **toujours** se ramener à une équation différentielle de la forme $\boxed{\frac{d^2x_1}{dt^2}+\omega_0^2x_1=0}$ en posant

I.2) Notion de signal sinusoïdal

- On appelle signal physique une grandeur physique dépendant du temps.
- Un signal périodique est un signal qui se reproduit identique à lui-même au cours du temps.
- Le plus fondamental des signaux périodiques est le signal sinusoïdal définit par :



Vocabulaire :

-

en TP on utilise V_{pp} amplitude <u>crête à crête</u> telle que V_{pp} =2 A

- **ω est la pulsation du signal telle que**

La phase initiale ϕ donne la valeur de départ du signal à t = 0. Elle dépend de l'origine des temps choisie

Rmq : **sin(φ + 2nπ) = sin(φ) , la phase initiale n'est définie qu'à un multiple entier de 2π près on cherchera toujours à avoir** $\phi\in[-\pi,\pi]$

Rmq : l'argument du sinus $\omega_0 t+\phi$ est appelée

I.3) Résolution de l'équation différentielle homogène associée à un oscillateur harmonique

a) Solutions générales

On remarque que l'équation est une équation différentielle linéaire à coefficient constants **du deuxième (l'ordre de dérivation le plus grand qui apparaît dans l'équation)**

De plus, il n'y a pas de terme associé à la dérivée premier du signal dans l'équation (pas de $\frac{dx}{dt}$)

Les solution générales d'une telle équation peuvent s'exprimer sous trois formes :

(1)

Avec a et b des constantes réelles

(2)

Avec C et φ des constantes réelles (C positive)

(3)

Avec C' et φ' des constantes réelles (C' positive)

b) Lien entre les différentes expressions

Passage de (2) à (3) *(expression de C' et φ' en fonction de C et φ)*

Rappels sur la fonction sinus : $\sin(a)=\cos(\frac{\pi}{2}-a)=\cos(a+3\frac{\pi}{2})$

$$x(t)=C\sin(\omega_0 t+\phi)=C\cos(\omega_0 t+\phi+\frac{3\pi}{2})\Rightarrow x(t)=C'\cos(\omega_0 t+\phi')$$

Par identification : (si $\phi'>2\pi\Rightarrow\phi'=\phi-\frac{\pi}{2}$)

Passage de (2) à (1) *(expression de a et b en fonction de C et φ)*

Rappels sur la fonction sinus : sin(a+b) = sin(a) cos(b) + sin(b) cos(a)

$$x(t)=C\sin(\omega_0 t+\phi)\Rightarrow C(\sin(\omega_0 t)\cos(\phi)+\sin(\phi)\cos(\omega_0 t))\Rightarrow C\sin(\phi)\cos(\omega_0 t)+C\cos(\phi)\sin(\omega_0 t)$$

Par identification :

Passe de (1) à (2) *(expression de C et φ en fonction de a et b)*

$$\frac{a}{b}=\frac{C\sin(\phi)}{C\cos(\phi)}=\tan(\phi)\Rightarrow$$

$$b^2+a^2=C^2\cos^2(\phi)+C^2\sin^2(\phi)\Rightarrow a^2+b^2=C^2(\sin^2(\phi)+\cos^2(\phi))\Rightarrow$$

c) Solution vérifiant les conditions initiales

Pour une équation du deuxième ordre, **les conditions initiales** consistent en la donnée :

- De la valeur de la fonction inconnue x(t) à l'instant initial t = 0 :
- De la valeur de la dérivée première de la fonction inconnue x(t) à l'instant initial :

Expression de la solution unique en fonction de x_0 et $\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0}=\dot{x}_0$

Pour la forme (1)

$$x(0)=x_0=a\cos(\omega_0 0)+b\sin(\omega_0 0)=a \quad\Rightarrow$$

$$\dot{x}(t)=$$

$$\dot{x}(t=0)=\dot{x}_0=-\omega_0 a\sin(0)+b\,\omega_0\cos(0)\quad\Rightarrow$$

Finalement

Cette expression n'est valable que pour une équation différentielle homogène $\ddot{x}+\omega_0^2x=0$

Remarque : on peut passer aux expressions sous la forme (2) et (3) en utilisant le paragraphe b)

Cas particuliers :

$\dot{x}_0=0$

$x_0=0$

II Le système masse-ressort : un oscillateur harmonique mécanique

II.1) Définition du système étudié

On considère dans ce paragraphe un mobile de masse m qui se déplace sans frottements le long d'un axe horizontal

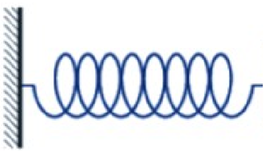
a) Schéma

b) hypothèses simplificatrices :

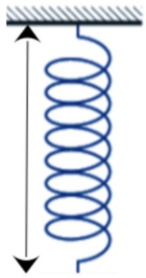
- On **néglige les frottements** de l'air sur le mobile et du sol sur le mobile.
- On modélise le mobile par **un point matériel G. G étant le centre de masse du mobile. (on néglige notamment la distance entre G et le point d'attache du ressort sur le mobile)**
- **On suppose que le mouvement s'effectue seulement selon l'axe passant par G et dirigé par (mouvement à une dimension : 1D)**
- **On néglige la masse du ressort devant celle du mobile m_r <<m**
- On suppose que le ressort possède un **comportement linéaire** lorsqu'il subit une contrainte

- ### *c) Longueur à vide*

Le ressort possède une longueur à vide notée l_0. C'est sa longueur lorsqu'il ne subit aucune contrainte (pas de mobile accroché et ressort immobile sur le sol



Si on néglige la masse du ressort c'est aussi sa longueur lorsqu'il est pendu verticalement sans mobile



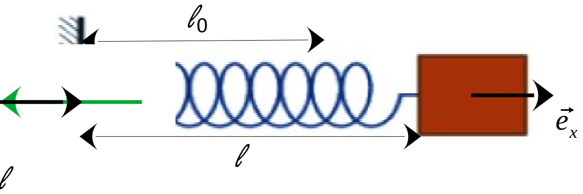
II.2 Forces s'exerçant sur le système

a) Force de rappel du ressort (Loi de Hooke)

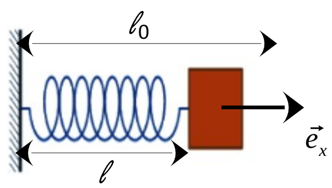
on note ℓ la longueur du ressort à un instant t

Expérimentalement on remarque que :

Si $\ell > \ell_0$



Si $\ell < \ell_0$ (compression du ressort)



Lorsqu'on suspend verticalement des masses à un ressort on remarque que l'allongement ($\ell - \ell_0$) du ressort **est proportionnelle** au poids des masses que l'on accroche.

Pour assurer l'équilibre des forces, la force de rappel doit donc aussi être proportionnelle à l'allongement du ressort.

Cette proportionnalité traduit le caractère linaire du ressort.

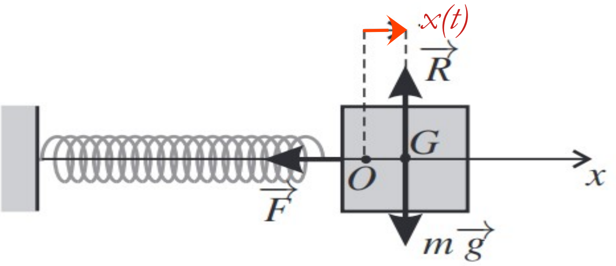
La force de rappel d'un ressort est définie par la loi de Hooke

- k est une constante appelée
- $\vec{e}_x$ est le vecteur unitaire orienté du point d'attache vers le mobile
- ℓ est la longueur du ressort à un instant t
- ℓ_0 est la longueur à vide du ressort

Rmq si $\vec{e}_x$ est orienté dans l'autre sens dans un énoncé (très rare en pratique) $\boldsymbol{\vec{F} = k\ (\ell - \ell_0)\ \vec{e}_x}$

b) Autres forces :

Modélisation du système



Remarque : Pour simplifier l'expression de la force de rappel du ressort , on peut introduire l'origine O de l'axe du mouvement. La position du centre de masse est repérée par la variable x

La force de rappel a alors pour expression $\vec{F}=-k\,x(t)\vec{e}_x$

<u>II.3 Obtention de l'équation différentielle (à savoir refaire!)</u>

Système étudié :

Bilan des forces :

Référentiel :

On commence toujours une étude mécanique en définissant le système, les forces qu'il subit et le référentiel d'étude

Principe fondamental de la dynamique (ou deuxième loi de Newton) appliquée au mobile dans le référentiel galiléen du laboratoire :

Rmq :

- **si $v_G(t)$ >0 le système se déplace dans le sens**
- **si $v_G(t)$ <0 le système se déplace dans le sens**

<u>II.4) Résolution de l'équation différentielle</u>

On reconnaît l'équation différentielle associée à un oscillateur harmonique

On identifie la pulsation propre $\boxed{}$

On peut aussi introduire **une fréquence propre** $\boxed{}$ et une **période propre** $\boxed{}$

a) cas général où $x_0 \neq 0$ et $v_0 \neq 0$

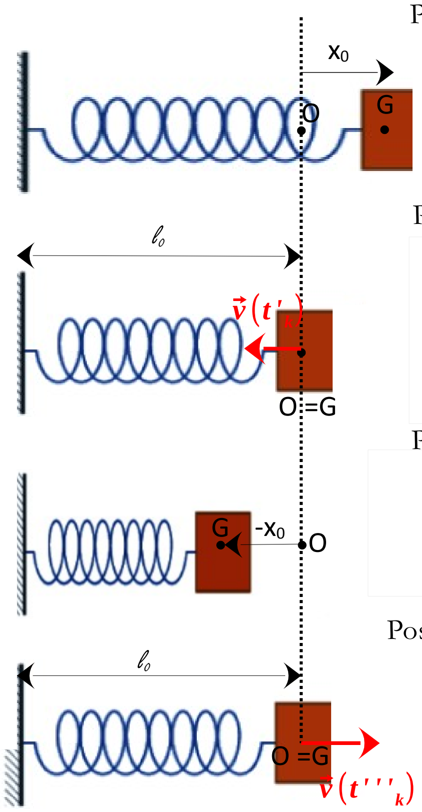
b)Solutions dans deux cas particuliers

- **Cas 1 :**
  physiquement : On éloigne le mobile de l'origine O et on le lâche sans vitesse initiale

On a alors

Évolution temporelle de x(t)

<u>Positions particulières du mobile</u>



Positions du mobile aux instants

Positions du mobile aux instants

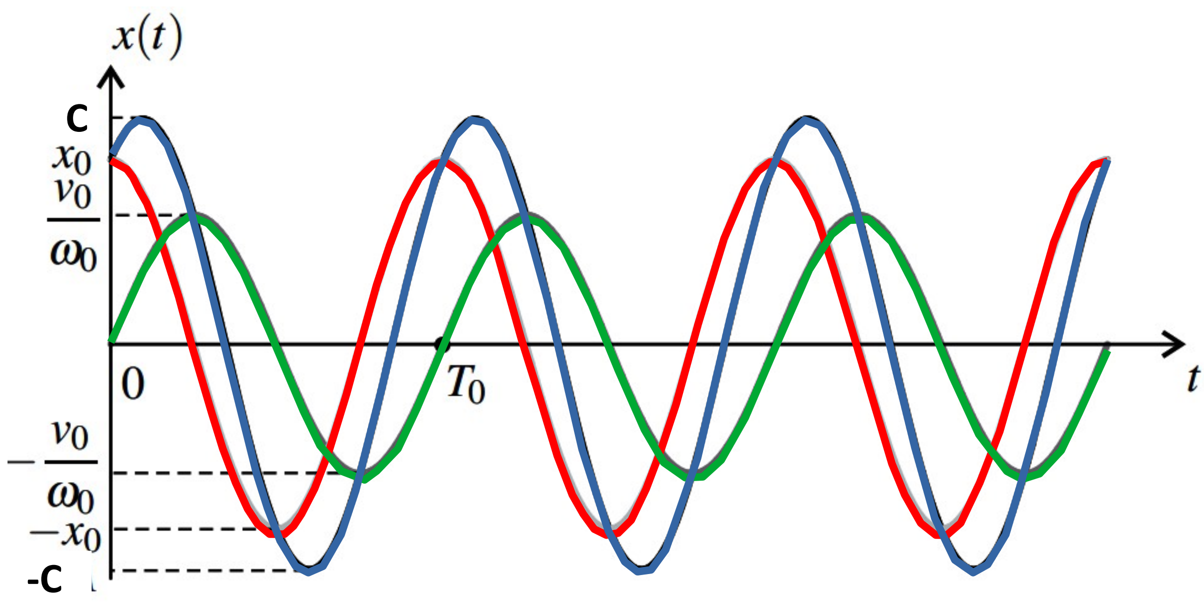
Positions du mobile aux instants

Positions du mobile aux instants

- **Cas 2 où**

physiquement :on place le mobile en O (force de rappel nulle) et on lui communique une vitesse initiale avec une « pichenette »

<u>Représentation du signal dans les différents cas</u>



II.5) Conservation de l'énergie mécanique du système {mobile (ou masse) + ressort }

Attention ce n'est pas le système : {mobile} !

a) Énergie cinétique

Lorsqu'il est en mouvement le mobile possède une énergie cinétique qui se calcule par la formule :

b) Énergie potentielle élastique

Le ressort quant à lui n'a **pas de masse donc pas d'énergie cinétique**, mais il possède une énergie **appelée énergie potentielle élastique** liée à sa déformation et dont on admettra ici l'expression :

Avec les conventions choisies pour l'origine du repère :

c) Énergie mécanique (à savoir retrouver)

le système {masse + ressort} possède une énergie mécanique E_m qui est la somme des énergies mécaniques de la masse et du ressort :

Évolution temporelle des énergies dans le cas général (on utilise la forme (2) des solutions) :

Si l'on injecte la solution générale de x(t) dans l'expression de l'énergie potentielle :