CHAPITRE 06 : oscillateurs harmoniques

I Définition mathématique et forme des solutions

Dans ce chapitre, on introduit un modèle physique appelé l'oscillateur harmonique

I.1) Définition :

On appelle oscillateur harmonique un système physique décrit par une grandeur x dépendant du temps et vérifiant une équation différentielle de la forme :

$$\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_0^2 x(t)=b$$

Rmq notation on peut aussi écrire : $\ddot{x}+\omega_0^2 x=b$

- **b est une constante réelle qui peut être nulle.**
- ω_0 **est** une constante réelle positive qui est appelée **pulsation propre de l'oscillateur harmonique** et qui s'exprime en **rad.s^{-1}**.

Rmq : on peut aussi définir une **fréquence propre** $f_0=\frac{\omega_0}{2\pi}$ et une **période propre** $T_0=\frac{2\pi}{\omega_0}$

Rmq 2

On peut **toujours** se ramener à une équation différentielle de la forme $\frac{d^2x_1}{dt^2}+\omega_0^2 x_1=0$ en posant

$x_1=x-\frac{b}{\omega_0^2}$, on a alors $\frac{d^2x_1}{dt^2}=\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{-b}{\omega_0^2}\right)=\frac{d^2x}{dt^2}$

I.2) Notion de signal sinusoïdal (harmonique)

- On appelle signal physique une grandeur physique dépendant du temps.
- Un signal périodique est un signal qui se reproduit identique à lui-même au cours du temps.
- Le plus fondamental des signaux périodiques est le signal sinusoïdal définit par :

$$s(t)=A\sin(\omega t+\phi)$$

Vocabulaire :

- **A est l'amplitude du signal (A>0)**

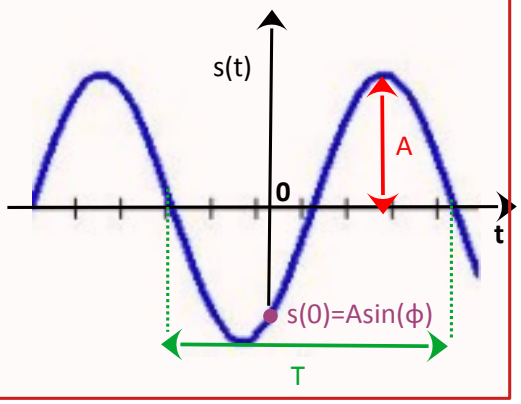
en TP on utilise V_{pp} amplitude crête à crête telle que $V_{pp}=2A$

- **ω est la pulsation du signal telle que** $\omega=\frac{2\pi}{T}$

T la période

- **ϕ est la phase initiale du signal**

animation



La phase initiale ϕ est liée à la valeur de départ du signal à t = 0. Elle dépend de l'origine des temps choisie $\phi=\arcsin\left(\frac{s(0)}{A}\right)$

Rmq : **sin(φ + 2nπ) = sin(φ) , la phase initiale n'est définie qu'à un multiple entier de 2π près**
on cherchera toujours à avoir $\phi\in[-\pi,\pi]$

Rmq2 : l'argument du sinus $\omega_0 t+\phi$ est appelée l**a phase instantanée** du signal

Rmq 3 : Acos($\omega_0 t+\phi$) est aussi un signal sinusoïdal

I.3) Résolution de l'équation différentielle homogène associée à un oscillateur harmonique

a) Solutions générales

On remarque que l'équation est une équation différentielle linéaire à coefficient constants **du deuxième (l'ordre de dérivation le plus grand qui apparaît dans l'équation)**

De plus, il n'y a pas de terme associé à la dérivée premier du signal dans l'équation (pas de $\frac{dx}{dt}$)

Les solution générales de l'équation $\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_0^2 x=0$ peuvent s'exprimer sous trois formes :

$x(t)=a\cos(\omega_0 t)+b\sin(\omega_0 t)$ **(1) Avec a et b des constantes réelles**

$x(t)=C\sin(\omega_0 t+\phi)$ **(2) Avec C et φ des constantes réelles (C positive)**

$x(t)=C'\cos(\omega_0 t+\phi')$ **(3)Avec C' et φ' des constantes réelles (C' positive)**

b) Lien entre les différentes expressions

Passage de (2) à (3) *(expression de C' et φ' en fonction de C et φ)*

Rappels sur la fonction sinus : $\sin(a)=\cos(\frac{\pi}{2}-a)=\cos(a+3\frac{\pi}{2})$

$x(t)=C\sin(\omega_0 t+\phi)=C\cos(\omega_0 t+\phi+\frac{3\pi}{2})\Rightarrow x(t)=C'\cos(\omega_0 t+\phi')$

Par identification : **C' = C et $\phi'=\phi+\frac{3\pi}{2}$** (si $\phi'>2\pi\Rightarrow\phi'=\phi-\frac{\pi}{2}$)

Passage de (2) à (1) *(expression de a et b en fonction de C et φ)*

Rappels sur la fonction sinus : sin(a+b) = sin(a) cos(b) + sin(b) cos(a)

$x(t)=C\sin(\omega_0 t+\phi)\Rightarrow C(\sin(\omega_0 t)\cos(\phi)+\sin(\phi)\cos(\omega_0 t))\Rightarrow C\sin(\phi)\cos(\omega_0 t)+C\cos(\phi)\sin(\omega_0 t)$

Par identification : $a=C\sin(\phi)$ et $b=C\cos(\phi)$

Passe de (1) à (2) *(expression de C et φ en fonction de a et b)*

$\frac{a}{b}=\frac{C\sin(\phi)}{C\cos(\phi)}=\tan(\phi)\Rightarrow\phi=\arctan(\frac{a}{b})$

$b^2+a^2=C^2\cos^2(\phi)+C^2\sin^2(\phi)\Rightarrow a^2+b^2=C^2(\sin^2(\phi)+\cos^2(\phi))\Rightarrow C^2=a^2+b^2\Rightarrow C=\sqrt{a^2+b^2}$

c) Solution vérifiant les conditions initiales

Pour une équation du deuxième ordre, **les conditions initiales** consistent en la donnée :

• de la valeur de la fonction inconnue x(t) à l'instant initial t = 0 : **x(0) = x_0**

• de la valeur de la dérivée première de la fonction inconnue x(t) à l'instant initial : $\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0}=\dot{x}_0$

Expression de la solution unique en fonction de x_0 et $\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0}=\dot{x}_0$

Pour la forme (1)

$x(0)=x_0=a\cos(\omega_0 0)+b\sin(\omega_0 0)=a\Rightarrow x_0=a$

$\dot{x}(t)=-\omega_0 a\sin(\omega_0 t)+b\omega_0\cos(\omega_0 t)$

$\dot{x}(t=0)=\dot{x}_0=-\omega_0 a\sin(0)+b\omega_0\cos(0)\Rightarrow b=\frac{\dot{x}_0}{\omega_0}$

Finalement $x(t)=x_0\cos(\omega_0 t)+\frac{\dot{x}_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)$

Cette expression n'est valable que pour une équation différentielle homogène $\ddot{x}+\omega_0^2 x=0$

Remarque : on peut passer aux expressions sous la forme (2) et (3) en utilisant le paragraphe b)

cas particuliers :

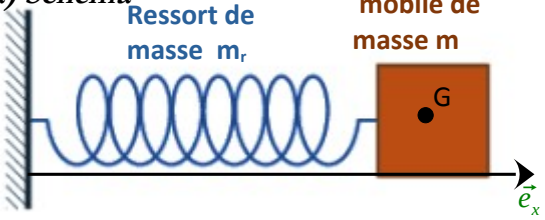
$\dot{x}_0=0\rightarrow x(t)=x_0\cos(\omega_0 t)$ $\qquad$ $x_0=0\rightarrow x(t)=\frac{\dot{x}_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)$

II Le système masse-ressort : un oscillateur harmonique mécanique

II.1) définition du système étudié

On considère dans ce paragraphe un mobile de masse m qui se déplace sans frottements le long d'un axe horizontal

a) Schéma



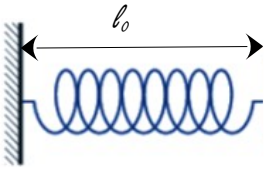
animation

b) hypothèses simplificatrices :

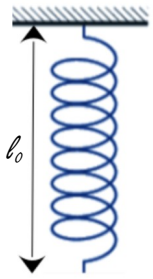
- On **néglige les frottements** de l'air sur le mobile et du sol sur le mobile.
- On modélise le mobile par **un point matériel G. G étant le centre de masse du mobile. (on néglige notamment la distance entre G et le point d'attache du ressort sur le mobile)**
- **On suppose que le mouvement s'effectue seulement selon l'axe passant par G et dirigé par $\vec{e}_x$ (mouvement à une dimension : 1D)**
- **On néglige la masse du ressort devant celle du mobile m_r <<m**
- On suppose que le ressort possède un **comportement linéaire** lorsqu'il subit une contrainte

c) Longueur à vide

Le ressort possède une longueur à vide notée l_0. C'est sa longueur lorsqu'il ne subit aucune contrainte (pas de mobile accroché et ressort immobile sur le sol



Si on néglige la masse du ressort c'est aussi sa longueur lorsqu'il est pendu verticalement sans mobile



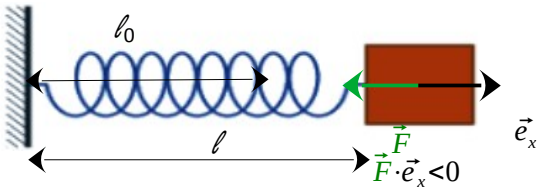
II.2 Forces s'exerçant sur le système

a) Force de rappel du ressort (Loi de Hooke)

on note ℓ la longueur du ressort à un instant t

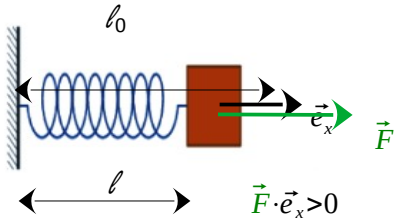
Expérimentalement on remarque que :

Si $\ell > \ell_0$ (extension du ressort)



la force de rappel tend à réduire la taille du ressort

Si $\ell < \ell_0$ (compression du ressort)



la force de rappel tend a augmenter la taille du ressort

De plus : Lorsqu'on suspend verticalement des masses à un ressort on remarque que l'allongement ($\ell - \ell_0$) du ressort **est proportionnelle** au poids des masses que l'on accroche.

Pour assurer l'équilibre des forces, la force de rappel doit donc aussi être proportionnelle à l'allongement du ressort.

Cette proportionnalité traduit le caractère linéaire du ressort.

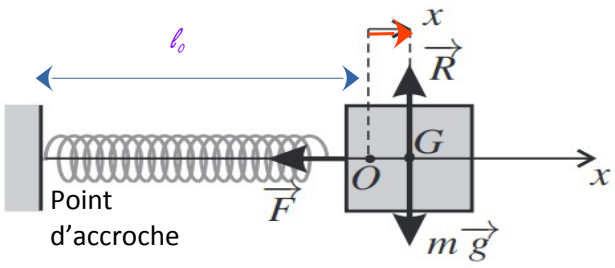
La force de rappel d'un ressort est défini par la loi de Hooke $\vec{F} = -k\,(\ell - \ell_0)\,\vec{e}_x$ ♥

- k est une constante appelée **constante de raideur du ressort, exprimée en (N m^{-1})**
- $\vec{e}_x$ est le vecteur unitaire orienté du point d'attache vers le mobile
- ℓ est la longueur du ressort à un instant t **(c'est une grandeur positive)** ♥
- ℓ_0 est la longueur à vide du ressort **(c'est une grandeur positive)**

Rmq si $\vec{e}_x$ est orienté vers le point d'accroche(très rare en pratique) on a alors $\vec{F} = k\,(\ell - \ell_0)\,\vec{e}_x$

b) Autres forces :

Le mobile subit aussi son poids $\vec{P}=m\vec{g}$ **et à la réaction du support** $\vec{R}$



Modélisation du système

Remarque : Pour simplifier l'expression de la force de rappel du ressort , on choisit souvent l'origine O de l'axe du mouvement au niveau de la position d'équilibre*. Pour des oscillations horizontales **cela correspond à placer l'origine à une distance** ℓ_0 **du point d'accroche du ressort**

La position du centre de masse est alors repérée par la variable x (t) telle que $\ell(t)=\ell_0+x(t)$

La force de rappel a alors pour expression $\vec{F}=-k\,x(t)\vec{e}_x$

* Attention ! Quand ce n'est pas le cas il faut toujours faire le lien entre la longueur du ressort $\ell(t)$ positif et la coordonnée x(t) pas forcement positive **voir ex2 du TD06**

II.3 Obtention de l'équation différentielle (à savoir refaire!)

Système étudié : mobile assimilé à un point G tel que OG(t) =x(t) =OM(t)

Bilan des forces : force de rappel $\vec{F}=-k\,x\vec{e}_x$, poids $\vec{P}=m\vec{g}$, réaction du support $\vec{R}$

Référentiel : terrestre (ou du laboratoire) supposé galiléen

Principe fondamental de la dynamique (ou deuxième loi de Newton) appliquée au mobile dans le référentiel galiléen du laboratoire :

On commence toujours une étude mécanique en définissant le système, les forces qu'il subit et le référentiel d'étude

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=\vec{F}+m\vec{g}+\vec{R}$$

Avec $\vec{p}=m\vec{v}_G$ la quantité de mouvement du mobile

$\vec{v}_G$ le vecteur vitesse du centre de masse du mobile, ici $\vec{v}_G=\dot{x}\vec{e}_x$

→ **Comme le mouvement s'effectue seulement sur l'axe (O,** $\vec{e}_x$ **) les forces verticales se compensent on a donc** $m\vec{g}+\vec{R}=\vec{0}$

Ainsi le PFD se simplifie : $\frac{d\vec{p}}{dt}=\frac{d}{dt}(m\vec{v}_G)=\vec{F}$

La masse étant constante on a $m\frac{d\vec{v}_G}{dt}=-k\,x(t)\vec{e}_x$

→ En projetant sur l'axe (O, $\vec{e}_x$) (produit scalaire de chaque terme avec $\vec{e}_x$)

$$m\frac{d\vec{v}_G}{dt}\cdot\vec{e}_x=-k\,x(t)\vec{e}_x\cdot\vec{e}_x$$

$m\frac{dx}{dt}=-k\,x(t)$ avec $v_G(t)$ la coordonnée sur l'axe Ox du vecteur vitesse

Or $\vec{v}_G(t)\cdot\vec{e}_x=\frac{dOG(t)}{dt}=\frac{dx(t)}{dt}=\dot{x}$ finalement $m\frac{d^2x(t)}{dt^2}=-k\,x(t)\Rightarrow\frac{d^2x(t)}{dt^2}=\frac{-k}{m}x(t)$ ou $\boxed{\frac{d^2x(t)}{dt^2}+\frac{k}{m}x(t)=0}$

Rmq : $\dot{x}$ **est une grandeur algébrique : si** $\dot{x}>0$ **le système se déplace dans le sens des x croissants**

si $\dot{x}<0$ le système se déplace dans le sens des x décroissants

II.4) Résolution de l'équation différentielle

On reconnaît l'équation différentielle associée à un oscillateur harmonique

On identifie la pulsation propre $\omega_0^2=\frac{k}{m}\Rightarrow\boxed{\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}}$

On peut aussi introduire **une fréquence propre** $\boxed{f_0=\frac{\omega_0}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}}$ et une période propre $\boxed{T_0=\frac{1}{f_0}=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$

a) cas général où $x_0 \neq 0$ et $v_0 \neq 0$

$x(t)=x_0\cos(\omega_0 t)+\frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)=C\sin(\omega_0 t+\phi)$ avec $C=\sqrt{x_0^2+\left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2}$ et $\phi=\arctan\left(\frac{x_0\omega_0}{v_0}\right)$

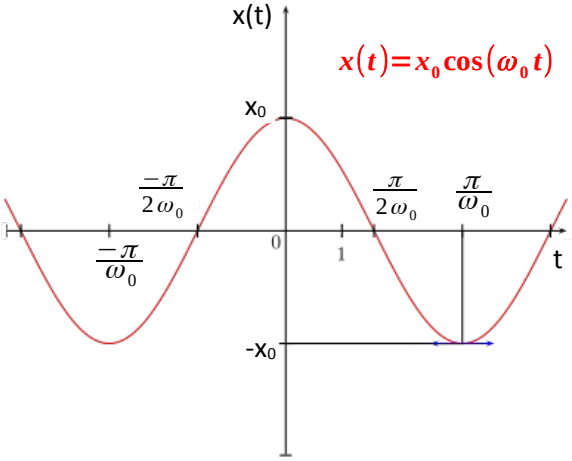
b)Solutions dans deux cas particuliers

- **Cas 1 : $x_0 \neq 0$ et $v_0 = 0$**

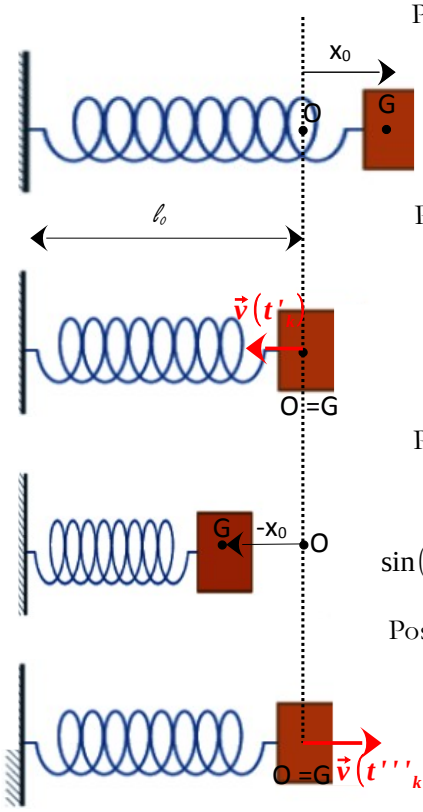
physiquement : On éloigne le mobile de l'origine O et on le lâche sans vitesse initiale

On a alors $x(t)=x_0\cos(\omega_0 t)$ et $\frac{dx(t)}{dt}=-x_0\omega_0\sin(\omega_0 t)$

Évolution temporelle de x(t)



Positions particulières du mobile



Positions du mobile aux instants $t_k=2k\frac{\pi}{\omega_0}, k\in\mathbb{N}$

$\sin(\omega_0(2k\frac{\pi}{\omega_0}))=0\Rightarrow v(t_k)=0$

Positions du mobile aux instants $t'_k=(2k+\frac{1}{2})\frac{\pi}{\omega_0}, k\in\mathbb{N}$

$\sin(\omega_0((2k+\frac{1}{2})\frac{\pi}{\omega_0}))=1$

$v(t'_k)=-x_0\omega_0$

Positions du mobile aux instants $t''_k=(2k+1)\frac{\pi}{\omega_0}, k\in\mathbb{N}$

$\sin(\omega_0((2k+1)\frac{\pi}{\omega_0}))=0\Rightarrow v(t'_k)=0$

Positions du mobile aux instants $t'''_k=(2k+\frac{3}{2})\frac{\pi}{\omega_0}, k\in\mathbb{N}$

$\sin(\omega_0((2k+\frac{3}{2})\frac{\pi}{\omega_0}))=-1$

$v(t'''_k)=x_0\omega_0$

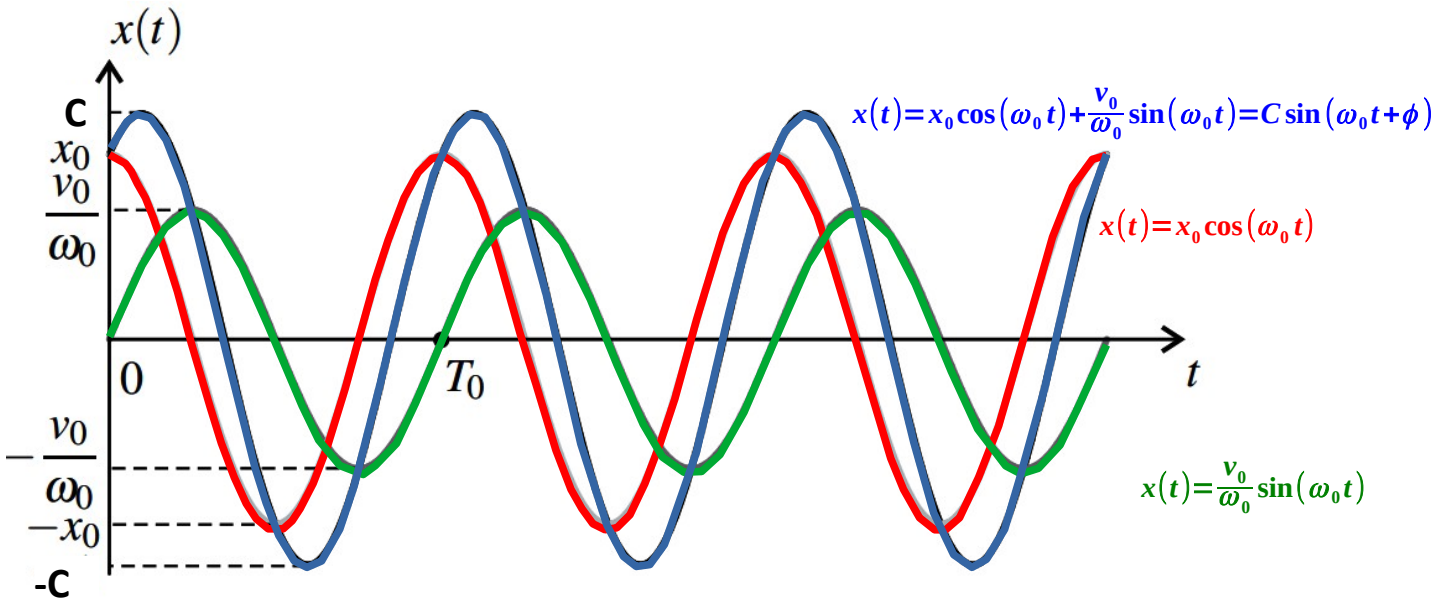
[animation]

- **Cas 2 où $x_0 = 0$ et $v_0 \neq 0$**

physiquement :on place le mobile en O (force de rappel nulle) et on lui communique une vitesse initiale avec une « pichenette »

On a alors $x(t)=\frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)$ et $\frac{dx(t)}{dt}=v_0\cos(\omega_0 t)$

Représentation du signal dans les différents cas



II.5) Conservation de l'énergie mécanique du système {mobile (ou masse) + ressort }

Attention ce n'est pas le système : {mobile} !

a) Énergie cinétique

Lorsqu'il est en mouvement le mobile possède une énergie cinétique qui se calcule par la formule :

$$E_c(t)=\frac{1}{2}m\,v_G^2=\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

b) Énergie potentielle élastique

Le ressort quant à lui n'a **pas de masse donc pas d'énergie cinétique**, mais il possède une énergie **appelée énergie potentielle élastique** liée à sa déformation et dont on admettra ici l'expression :

$$\boxed{E_p(t)=\frac{1}{2}k(l(t)-l_0)^2}$$

avec les conventions choisies pour l'origine du repère : $E_p(t)=\frac{1}{2}k\,x^2(t)$

c) Énergie mécanique (à savoir retrouver)

le système {masse + ressort} possède une énergie mécanique E_m qui est la somme des énergies mécaniques de la masse et du ressort :

$$E_m(t)=E_c(t)+E_p(t)=\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\frac{1}{2}k\,x^2(t)$$

Évolution temporelle des énergies dans le cas général (on utilise la forme (2) des solutions) :

c'est à dire qu'on a $x(t)=C\sin(\omega_0 t+\phi)$ $\frac{dx(t)}{dt}=C\,\omega_0\cos(\omega_0 t+\phi)$ avec $C=\sqrt{x_0^2+\left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2}$

Si l'on injecte la solution générale de x(t) dans l'expression de l'énergie potentielle :

$$E_P(t)=\frac{1}{2}k(C\sin(\omega_0 t+\phi))^2=\frac{1}{2}kC^2\sin^2(\omega_0 t+\phi)=\boxed{\frac{1}{2}k\left(x_0^2+\left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2\right)\sin^2(\omega_0 t+\phi)}$$

Si on injecte l'expression de $\frac{dx(t)}{dt}$ dans l'expression de $E_c(t)$

$$E_C(t)=\frac{1}{2}m(C\,\omega_0\cos(\omega_0 t+\phi))^2=\frac{1}{2}m\,\omega_0^2C^2\cos^2(\omega_0 t+\phi)=\frac{1}{2}m\omega_0^2\left(x_0^2+\left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2\right)\cos^2(\omega_0 t+\phi)$$

Or par définition de la pulsation propre $\omega_0^2=\frac{k}{m}\Rightarrow m\omega_0^2=k$ donc $\boxed{E_C(t)=\frac{1}{2}k\left(x_0^2+\left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2\right)\cos^2(\omega_0 t+\phi)}$

ainsi $E_m(t)=E_c(t)+E_p(t)=\frac{1}{2}k\left(x_0^2+\left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2\right)(\sin^2(\omega_0 t+\phi)+\cos^2(\omega_0 t+\phi))$

Comme $\cos^2(\omega_0 t+\phi)+\sin^2(\omega_0 t+\phi)=1$ finalement $E_m(t)=\frac{1}{2}k\,x_0^2+\frac{1}{2}k\left(\frac{v_0}{\omega_0}\right)^2$

comme $\frac{k}{\omega_0^2}=m$ $\boxed{E_m=\frac{1}{2}k\,x_0^2+\frac{1}{2}m\,v_0^2}$

- **Remarque 1 :**

L'énergie mécanique est donc constante dans le temps (on dit qu'elle se conserve) .

Ce résultat est cohérent avec le fait que l'on étudie un système idéalisé dont l'amortissement est négligé : on ne prend en compte aucun type de frottement. C'est pourquoi il y a conservation de l'énergie mécanique. (Théorème de l'énergie mécanique)

On reconnaît dans la dernière expression la valeur de l'énergie mécanique à l'instant initial (somme de l'énergie cinétique initiale et de l'énergie potentielle initiale)

- **Remarque 2**

Dans les deux cas particuliers du paragraphe précédent, on fournit son énergie au système :

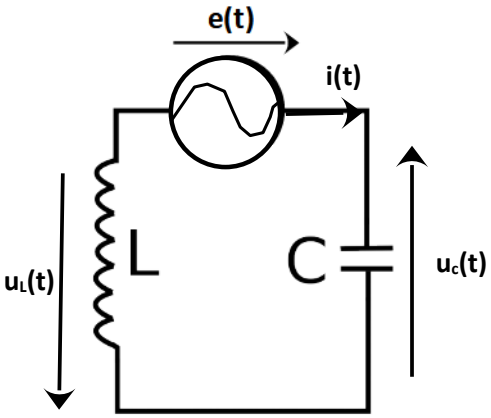
- sous forme **d'énergie potentielle uniquement** quand $x_0 \neq 0$ et $v_0 = 0$; $E_m=E_p(t=0)=\frac{1}{2}kx_0^2$
- sous forme **d'énergie cinétique uniquement** quand $x_0 = 0$ et $v_0 \neq 0$. $E_m=E_c(t=0)=\frac{1}{2}mv_0^2$

- **Remarque 3 : Le choix de la forme des solutions de l'équation différentielle peut grandement modifier la difficulté des calculs à mener**

III Le circuit LC: un oscillateur harmonique électronique

III.1) définition du système étudié

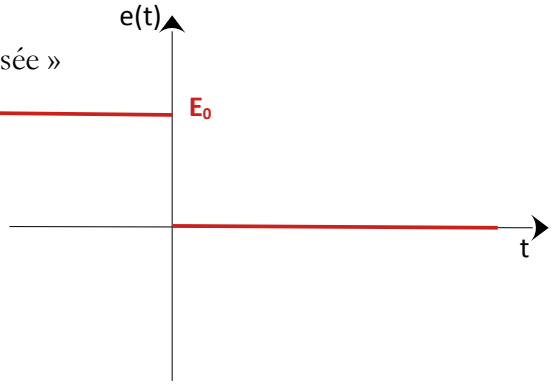
a) schéma électrique



b) signal délivré par le GBF

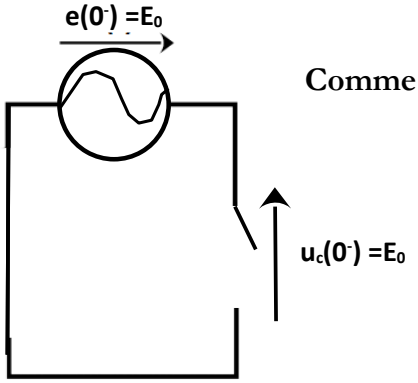
e(t) échelon « inversée »

$$\begin{cases} e(t)=E_0 \text{ si } t<0, \\ 0 \text{ si } t>0 \end{cases}$$



le condensateur est chargée depuis longtemps, le régime stationnaire est établi :

Schéma équivalent à t=0⁻ :



$$q(0^-)=Cu(0^-)=\boldsymbol{CE_0}$$

Comme l'énergie stockée dans le condensateur est continue :

$$u(0^-)=u(0^+)=E_0 \quad \text{et} \quad \boldsymbol{q_0=q(0^+)=q(0^-)=CE_0}$$

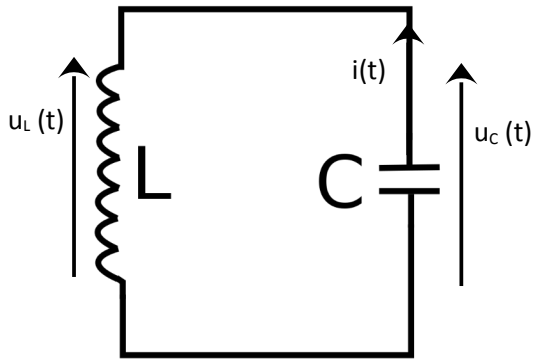
Le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert en régime stationnaire : $i(0^-)=0$

Comme l'énergie stockée dans la bobine est continue :

$$\boldsymbol{i(0^-)=i(0^+)=\dot{q}_0=0}$$

II.2) Équation vérifiée par la charge q(t) accumulée sur l'armature positive du condensateur

schéma équivalent pour t=0⁺



Loi des mailles : $u_c(t)=u_L(t)$

Relation charge accumulé sur l'armature positive et tension condensateur en **convention générateur** : $\boldsymbol{q(t)=-Cu_C(t)}$

Relation tension-courant pour une bobine en convention récepteur

$$u_L(t)=L\frac{di}{dt}$$

en réinjectant dans la loi des mailles $\frac{q(t)}{C}+L\frac{di}{dt}=0$

or $i(t)=\frac{dq}{dt}$ donc finalement :

$$\boldsymbol{\frac{q(t)}{C}+L\frac{d^2q}{dt^2}=0} \text{ que l'on peut aussi écrire } \boxed{\boldsymbol{\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{1}{LC}q(t)=0}}$$

Remarque : Comme $q(t)=-Cu_C(t)$ on a aussi $\boxed{\boldsymbol{\frac{d^2u_C}{dt^2}+\frac{1}{LC}u_c(t)=0}}$

III.3) Résolution de l'équation différentielle

On reconnaît l'équation différentielle associée à un oscillateur harmonique

$$\frac{d^2q}{dt^2}+\omega_0^2 q=0$$

De pulsation propre $\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$ **, de fréquence propre** $f_0=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$ **et de période propre** $T_0=2\pi\sqrt{LC}$

Utilisation des conditions initiales

on est dans le cas ou $\dot{q}_0=0$ et $q_0\neq 0$

les solutions sont de la forme $q(t)=q_0\cos(\omega_0 t)$ soit $q(t)=C E_0\cos(\omega_0 t)$

Remarque : on a aussi $u_c(t)=E_0\cos(\omega_0 t)$

III.4) Analyse énergétique

Puissance reçue par L (conv géné) Puissance cédée par C (conv géné)

Bilan de puissance dans les conventions choisies pour t>0 : $u_L(t)i(t)=u_C(t)i(t)$

Convention générateur pour le condensateur $L\frac{di}{dt}i(t)=u_C(t)(-C\frac{du_C}{dt})$ donc $\frac{d}{dt}(\frac{1}{2}Li^2(t))=\frac{-d}{dt}(\frac{1}{2}Cu_C^2(t))$

soit $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}Li^2(t)+\frac{1}{2}Cu_C^2(t)\right)=0$

En primitivant $E_L(t) + E_c(t) = E_{tot}$

avec $E_c(t)=\frac{1}{2}Cu_C^2(t)=\frac{1}{2}\frac{q^2(t)}{C}$ l'énergie stockée à t dans le condensateur

$E_L(t)=\frac{1}{2}Li^2(t)=\frac{1}{2}L\dot{q}^2(t)$ l'énergie stockée à t dans la bobine

E_{tot} l'énergie totale stockée dans le circuit, qui est constante au cours du temps

Pour trouver la valeur de la constante on peut se placer à t =0 :

$$E_{tot}=\frac{1}{2}L\dot{q}_0^2+\frac{1}{2}\frac{q_0^2}{C}$$

$$E_C(t)+E_L(t)=\frac{1}{2}CE_0^2$$

dans les conditions expérimentales étudiées $E_{tot}=0+\frac{1}{2}\frac{q_0^2}{C}=\frac{1}{2}CE_0^2$

III.5) Analogies électro-mécaniques

	Mécanique	Électronique
Équation différentielle	$m\ddot{x} + kx = 0$	$L\ddot{q} + \frac{1}{C}q = 0$
Pulsation propre	$\sqrt{\frac{k}{m}}$	$\sqrt{\frac{1}{LC}}$
Variables	élongation x vitesse $v = \dot{x}$ masse m ressort de raideur k énergie cinétique $\frac{1}{2}m\dot{x}^2$ énergie potentielle $\frac{1}{2}kx^2$	charge q intensité $i = \dot{q}$ inductance L capacité $\frac{1}{C}$ énergie magnétique $\frac{1}{2}Li^2$ énergie électrostatique $\frac{1}{2}\frac{1}{C}q^2$

Limites du modèle de l'oscillateur harmonique

En pratique il est **impossible** d'obtenir un oscillateur harmonique (mécanique ou électrique) en TP car :

- Électronique : les bobines sont toujours constituées de fils électriques qui ont une résistance électrique non négligeable. Le caractère résistif entraîne une perte d'énergie par effet Joule donc une dissipation d'énergie électrique.
- Mécanique : les frottements de l'air/ mobile et du sol/mobile entraîne une dissipation de l'énergie mécanique

Remarque : On peut retrouver l'équation différentielle de l'O.H dérivant par rapport au temps l'équation de conservation de l'énergie :

$$E_m = E_c(t) + E_p(t) \quad \textbf{donc} \quad \frac{dE_m}{dt} = \frac{dE_c(t)}{dt} + \frac{dE_p(t)}{dt}$$

Pour le système masse ressort :

$\frac{d}{dt}(E_m) = 0$ car l'énergie mécanique se conserve

donc $\frac{d}{dt}(E_m) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}kx^2(t)\right) = \frac{1}{2}m\frac{d}{dt}(\dot{x}(t))^2 + \frac{1}{2}k\frac{d}{dt}(x^2(t)) = 0$

$\frac{1}{2}m2\ddot{x}\dot{x}(t) + \frac{1}{2}k2\dot{x}(t)x(t)(t) = 0 \Rightarrow \dot{x}(t)(m\ddot{x}(t) + kx(t)) = 0$

soit $\dot{x}(t) = 0$ la vitesse est nulle à chaque instant, le mobile est immobile, l'énergie se conserve

soit $\boldsymbol{m\ddot{x}(t) + kx(t) = 0}$ à tout instant, c'est l'équation différentielle du mouvement !

Pour le circuit LC

$\frac{d}{dt}(E_{tot}) = 0$

Car l'énergie mécanique se conserve

donc $\frac{d}{dt}(E_{tot}) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}L\left(\frac{dq}{dt}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{C}q^2(t)\right) = \frac{1}{2}L\frac{d}{dt}(\dot{q}(t))^2 + \frac{1}{2}\frac{1}{C}\frac{d}{dt}(q^2(t)) = 0$

$\frac{1}{2}L2\ddot{q}\dot{q}(t) + \frac{1}{2}\frac{1}{C}2\dot{q}(t)q(t)(t) = 0 \Rightarrow \dot{q}(t)(L\ddot{q}(t) + \frac{1}{C}q(t)) = 0$

soit $\dot{q}(t) = \frac{dq}{dt} = i(t) = 0$ l'intensité du courant est nulle à chaque instant, le circuit n'est pas alimenté en courant (interrupteur ouvert dans le circuit)

soit $\boldsymbol{L\ddot{q}(t) + \frac{1}{C}q(t) = 0}$ à tout instant, c'est l'équation différentielle du mouvement !