

## TD06- OSCILLATEUR HARMONIQUE

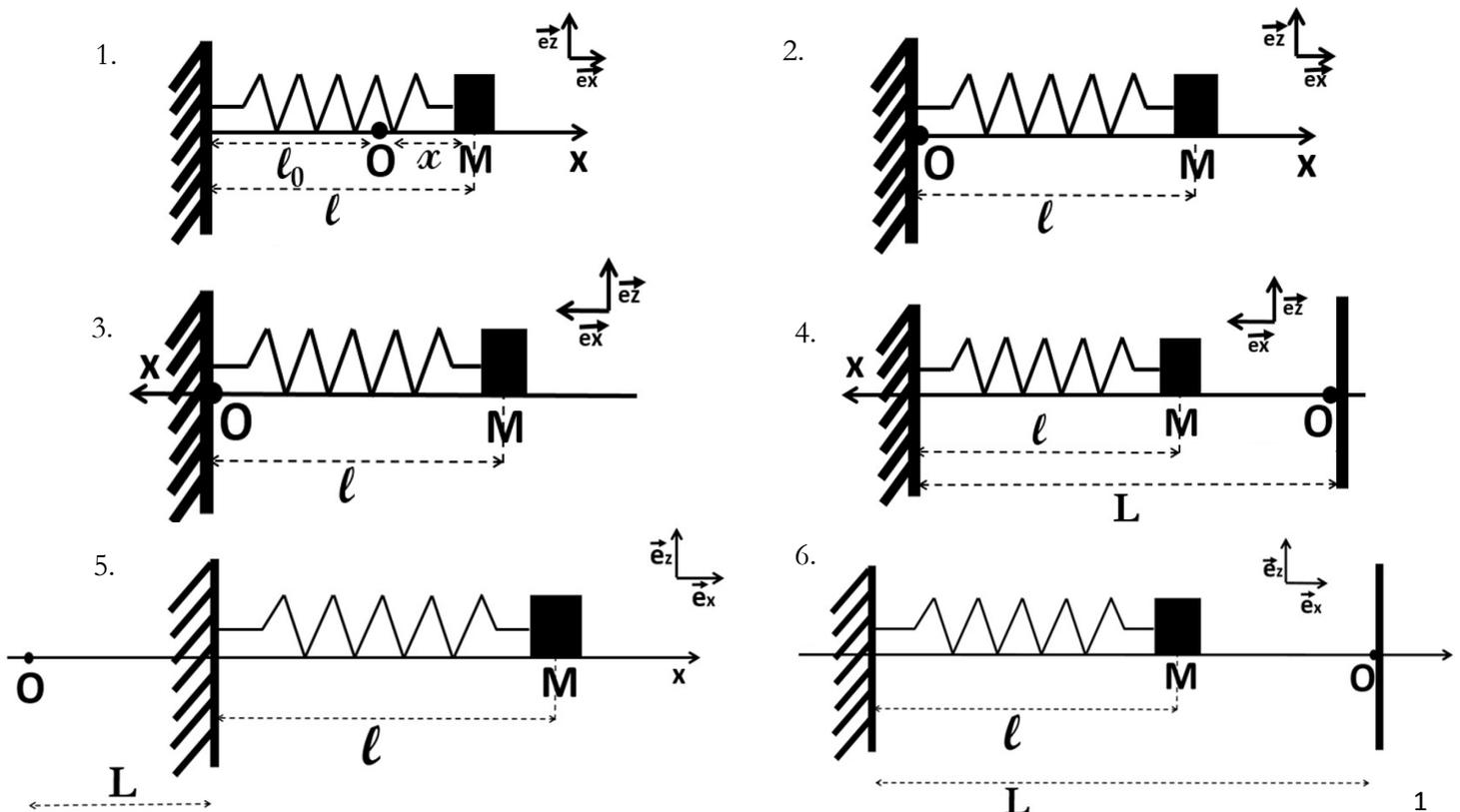
**Exercice 1 : Questions de cours (à savoir faire sans le cours sous les yeux)**

- 1 Donner l'expression de la force de rappel exercée par un ressort sur un point matériel ne pouvant se déplacer que selon une direction. On fera un schéma, et on donnera la signification et la dimension de tous les termes introduits.
- 2 Soit une masse  $m$  posée sur le sol et reliée à un mur à sa gauche par un ressort de longueur à vide  $l_0$  et de constante de raideur  $k$ . On considère qu'il n'y a pas de frottements. On place l'origine du repère en  $l_0$ .
  - a Etablir avec la plus grande rigueur dans la rédaction l'équation du mouvement. On introduira la pulsation  $\omega_0$  dont on donnera l'expression et la dimension.
  - b Donner la solution de l'équation du mouvement si le ressort est lâché sans vitesse initiale à une distance  $x_0 \neq 0$  de sa position d'équilibre.
  - c Donner la solution de l'équation du mouvement si le ressort est lâché de sa position d'équilibre avec une vitesse initiale  $v_0 \neq 0$ .
  - d Établir l'expression de la période  $T$  et de la fréquence  $f$  des oscillations de la masse  $m$ , d'abord en fonction de  $\omega_0$ , puis en fonction de  $k$  et  $m$ .
  - e On admet que l'énergie potentielle élastique correspondant à la force de rappel d'un ressort est telle que  $E_p = \frac{1}{2}k(l-l_0)^2$  où  $l$  est la longueur du ressort à l'instant  $t$ . Contrôler la cohérence de la solution de l'équation obtenue à la question 2.a. avec la conservation de l'énergie mécanique.
- 3 Définir l'amplitude, la phase à l'origine et la phase instantanée d'un signal sinusoïdal.
- 4 Soit un circuit LC comportant un condensateur chargé à  $t=0^-$  sous une tension  $U_0$  qui évolue en régime libre à partir de  $t=0^+$ .
  - 4.a établir l'équation différentielle vérifier par la charge accumulée sur l'armature positive du condensateur. On introduira la pulsation  $\omega_0$  dont on donnera l'expression et la dimension.
  - 4.b Donner la solution de l'équation différentielle en définissant les conditions initiales
  - 4.c Effectuer un bilan énergétique sur le système et contrôler la cohérence de la solution de l'équation obtenue à la question 4.a. avec ce bilan.

**Exercice 2 : expression de la force de rappel** 

★

Donner l'expression de la force de rappel du ressort (de raideur  $k$  et de longueur à vide  $l_0$ ) qui s'exerce sur le point  $M$  en fonction de  $x$ ,  $\vec{e}_x$ , et éventuellement d'autres paramètres à déterminer.



**Exercice 3 : Pour mieux comprendre le cours (1)** ●\*

On considère l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation propre  $\omega_0$ :  $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$

- 1 Vérifier que  $x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$  est solution de l'équation, avec  $(A, B) \in \mathbb{R}^2$
- 2 Vérifier que  $x(t) = C \sin(\omega_0 t + \psi)$  est solution de l'équation, avec  $(C, \psi) \in \mathbb{R}^2$ .
- 3 Vérifier que  $x(t) = D \cos(\omega_0 t + \varphi)$  est solution de l'équation, avec  $(D, \varphi) \in \mathbb{R}^2$ .

**Exercice 4 : Pour mieux comprendre le cours (2)** ●\*

Résoudre les équations différentielles suivantes en introduisant une pulsation propre  $\omega_0$  et en représentant le système physique correspondant pour  $t > 0$ .

1.  $(L_1 + L_2) \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{C_1 + C_2}{C_1 C_2} q(t) = 0$  avec  $q_0 = C_1 U_0$  et  $\dot{q}_0 = 0$
2.  $(m_1 + m_2) \frac{d^2 x}{dt^2} + k x(t) = 0$  avec  $x_0 = 0$  et  $\dot{x}_0 = A$
3.  $L \frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{1}{C_1 + C_2} q(t) = E_0$  avec  $q_0 = (C_1 + C_2) U_0$  et  $\dot{q}_0 = 0$

**Exercice 5 : Tension aux bornes d'un oscillateur à quartz** ●\*

La tension électrique  $v(t)$  aux bornes d'un oscillateur à quartz (tel qu'on en trouve dans les montres) vérifie l'équation différentielle :

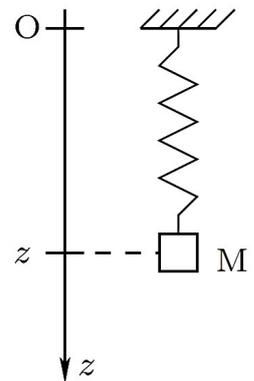
$$\frac{d^2 v}{dt^2} + A^2 v(t) = 0 \quad \text{Avec } A = 4,239 \times 10^{10} \text{ SI}$$

- 1 Quelle est la dimension de A ? Donner son unité dans le système international.
- 2 Exprimer en fonction de A puis calculer la fréquence et la période de cet oscillateur.

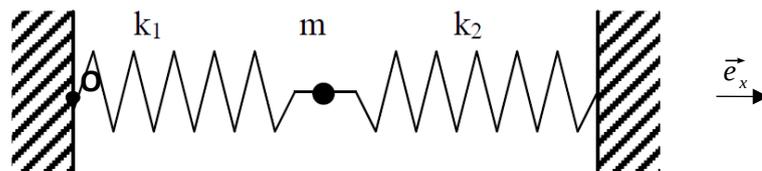
**Exercice 6 : Oscillations verticales** ●\* ●\* ★ ★ ★

Un ressort de longueur à vide  $l_0$  et de raideur  $k$  est fixé en O au plafond (voir figure). À son autre extrémité est attaché un mobile M de masse  $m$ , repéré par son abscisse  $z$  telle que la position du mobile soit :  $\vec{OM} = z \vec{u}_z$ . L'origine du repère est imposée comme sur la figure ci-contre.

- 1 Effectuer un bilan des forces sur la masse. On considère qu'il n'y a pas de frottements.
- 2 Établir l'équation du mouvement de la masse.
- 3 Quelle est l'expression de la position d'équilibre  $z_{EQ}$  ?
- 4 On pose  $u(t) = z(t) - z_{EQ}$ . Trouver l'équation différentielle satisfaite par  $u(t)$ .
- 5 Quelle est la période des oscillations ? Commenter.

**Exercice 7 : Ressorts reliés horizontalement** ●\* ●\* ★ ★ ★

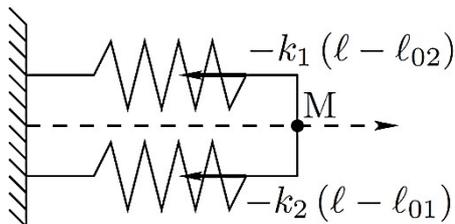
Deux ressorts linéaires sont reliés à une masse  $m$ , leur autre extrémité restant fixée à un support vertical (voir schéma). Le premier ressort a une raideur  $k_1 = 3,0 \text{ N.m}^{-1}$  et une longueur à vide  $l_{10} = 10 \text{ cm}$  ; le second a une raideur  $k_2 = 10 \text{ N.m}^{-1}$  et une longueur à vide  $l_{20} = 20 \text{ cm}$ . Les 2 supports sont distants de  $L = 1 \text{ m}$ . La masse  $m$  est susceptible d'osciller horizontalement (on ne tient pas compte du poids), sans frottement.



- 1 Rechercher la position d'équilibre de la masse. L'origine en O et le sens de  $\vec{e}_x$  sont imposés comme ci-dessus.
- 2 Déterminer l'équation différentielle qui caractérise le mouvement de la masse.
- 3 En déduire que ce dispositif est équivalent à un ressort unique dont on déterminera la raideur équivalente.
- 4 Calculer la période d'oscillation de la masse  $m$  (on prendra  $m = 100 \text{ g}$ )

**Exercice 8 : Association de ressorts en parallèle** ★ ★ ★

On associe en parallèle (cf figure) deux ressorts élastiques, alignés, de raideurs  $k_1$  et  $k_2$ , de longueur à vide  $\ell_{01}$  et  $\ell_{02}$ , formant un système élastique unique de longueur  $\ell = \ell_1 = \ell_2$ .



- 1 Déterminer la raideur  $k_{EQ}$  et la longueur à vide  $\ell_{0EQ}$  du ressort élastique unique équivalent à cette association.
- 2 Ce ressort est-il plus souple ou plus raide que chacun des deux ressorts dont il est formé ?

**Exercice 9 : Mouvement d'un électron piégé dans un puits de potentiel** ★ ★

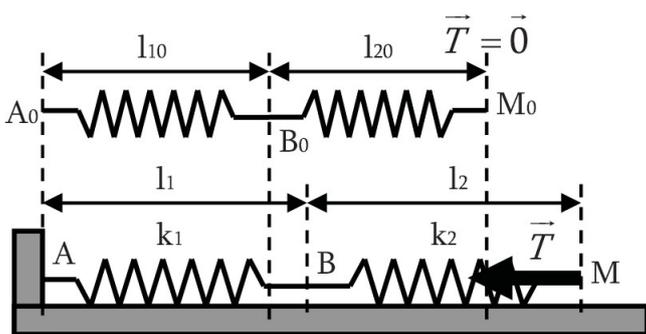
Un électron de masse  $m_E = 9,11 \times 10^{-31} \text{ kg}$  et de charge  $q = -1,60 \times 10^{-19} \text{ C}$  est piégé à l'intérieur d'un dispositif tel que son énergie potentielle est :

$$E_p = \frac{1}{2} \frac{qV_0}{d^2} z^2 \text{ où } V_0 = -5,0 \text{ V et } d = 6,0 \text{ mm.}$$

On considère que l'électron peut se déplacer uniquement sur l'axe (Oz).

- 1 Exprimer l'énergie mécanique de l'électron en fonction de  $z(t)$  et de  $\frac{dz}{dt}$ .
- 2 On suppose que l'énergie mécanique est constante dans le temps. Exprimer puis calculer la fréquence des oscillations des électrons dans le piège.

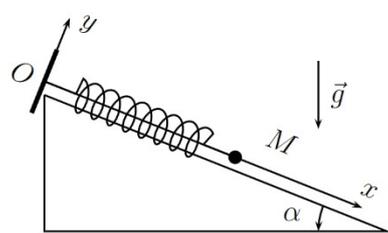
**Exercice 10 : Association de ressorts en série** ★ ★ ★



On associe en série (cf figure) deux ressorts élastiques sans masse, alignés, de raideurs  $k_1$  et  $k_2$ , de longueur à vide  $\ell_{01}$  et  $\ell_{02}$ , formant un système élastique unique de longueur totale  $\ell = \ell_1 + \ell_2$ .

1. Montrer que l'ensemble est équivalent à un ressort élastique unique de longueur à vide  $\ell_{0EQ} = \ell_{01} + \ell_{02}$  dont on exprimera la constante de raideur  $k_{EQ}$  en fonction de  $k_1$  et  $k_2$ .
2. Ce ressort est-il plus souple ou plus raide que chacun des deux ressorts dont il est formé ?

**Exercice 11 : Oscillateur incliné** ★ ★ ★



Un ressort linéaire de longueur à vide  $l_0$  et de raideur  $k$  est fixé en O (voir figure). À son autre extrémité est attaché un mobile M de masse  $m$ , repéré par son abscisse  $x$  telle que la position du mobile soit :  $\vec{OM} = x\vec{e}_x$ . Le ressort se trouve sur un plan incliné d'un angle  $\alpha$  par rapport à l'horizontale. On considère que le ressort est de masse négligeable devant  $m$ . L'origine du repère est imposée en O comme sur la figure ci-contre. On considère qu'il n'y a pas de frottements.

- 1 Effectuer un bilan des forces sur le mobile M de masse  $m$ . On donnera en particulier les composantes de chaque force sur les axes (Ox) et (Oy).
- 2 Etablir l'expression de la position d'équilibre  $x_{EQ}$ . Vérifier son homogénéité et sa cohérence physique.
- 3 Établir l'équation du mouvement de la masse. La résoudre pour  $x(0) = x_0 \neq x_{EQ}$  et  $v(0) = 0$ .
- 4 Comment aurait été modifiée l'équation différentielle si on avait choisi l'origine du repère en  $x_{EQ}$  ? Justifier.
- 5 Quelle est la période des oscillations ? Commenter (homogénéité, cohérence physique) ?