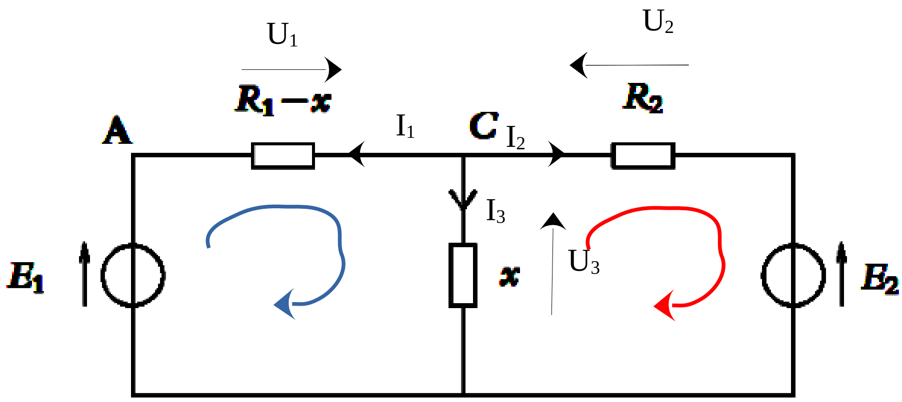
CORRECTION DM02

Exercice 1

a) On ne peut pas appliquer la relation du pont diviseur de tension pour calculer la tension aux bornes de x car l'intensité du courant circulant dans les résistances R_2 et $R_1 - x$ n'est pas la même que l'intensité traversant x



b) Le circuit comprend trois branches donc il faut a priori déterminer trois intensités. Ces trois intensités ne sont pas indépendantes puisqu'elles sont reliées par la loi des nœuds en C (avec les conventions choisies) :

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

ainsi $I_3 = -(I_2 + I_1)$ (*)

on peut écrire la loi des mailles dans la maille bleue et dans la maille rouge

$E_1 + (R_1 - x)\, I_1 = xI_3$

$x\, I_3 = R_2\, I_2 + E_2$

en remplaçant I_3 par (*) , on peut se ramener à un système avec pour inconnues seulement I_2 et I_2 :

$\mathbf{E_1 + (R_1 - x)\, I_1 = -x\,(I_2 + I_1)}$

$\mathbf{-x\,(I_2 + I_1) = R_2\, I_2 + E_2}$

c) en utilisant la méthode de substitution ou en faisant des combinaisons linéaires de ces deux équations pour éliminer I_1 puis I_2, on obtient I_1

$$\boxed{I_1 = \frac{xE_2 - (x + R_2)\,E_1}{x^2 - R_1\,(x + R_2)} \quad \text{et} \quad I_2 = \frac{xE_1 - R_1E_2}{x^2 - R_1\,(x + R_2)}.}$$

L'intensité dans x s'obtient alors par loi des nœuds soit

$$\boxed{\mathbf{I_3} = I_1 + I_2 = \frac{(x - R_1)\,E_2 - R_2E_1}{x^2 - R_1\,(x + R_2)}}$$

e) Si la valeur de x est telle que $I_2 = 0$, On a alors $\boxed{\dfrac{E_2}{E_1} = \dfrac{x}{R_1}.}$

f) La connaissance de x et R_1 permet donc de comparer les deux tensions E_1 et E_2

Il faut s'assurer que $x<R_1$ pour que $R_1 - x > 0$, donc on a forcement $E_2 > E_1$

Il est possible d'effectuer cette comparaison si les tensions sont très différentes à condition de disposer de résistances de valeurs très différentes. Les gammes de valeurs de résistance seront donc un facteur limitant pour cette comparaison.

Exercice 2

a) Comme cela a été établi dans le cours, l'association en parallèle des résistances s'obtient par la relation

$$\boxed{R_{éq} = \frac{1}{\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{R_i}}.}$$

b)

$$V_1 = R_{éq} I_0 = \frac{I_0}{\displaystyle\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{R_i}} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{I_0 = \left(\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{R_i}\right) V_1}$$

c) $$\boxed{R'_{éq} = \sum_{i=1}^{N} R_i.}$$

d) $$\boxed{V_0 = R'_{éq} I_0 = \left(\sum_{i=1}^{N} R_i\right)\left(\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{R_i}\right) V_1}$$

e) $$\boxed{\frac{V_0}{V_1} = \left(\sum_{i=1}^{N} R_i\right)\left(\sum_{i=1}^{N} \frac{1}{R_i}\right)}$$

f) $$\boxed{\frac{U_0}{U_1} = N^2}$$

g) $$\boxed{\frac{104}{1} = N^2 \Rightarrow N = \sqrt{104} \approx 10}$$

h) On a $$R - \delta R \leqslant R_i \leqslant R + \delta R$$

cela permet d'écrire un encadrement des deux termes soit

$$NR\left(1 - \frac{\delta R}{R}\right) \leqslant \sum_{i=1}^{N} R_i \leqslant NR\left(1 + \frac{\delta R}{R}\right)$$

L’hypothèse dR << R permet d’effectuer un développement limité de $\frac{N}{R}\left(1-\frac{\delta R}{R}\right) \leqslant \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{R_i} \leqslant \frac{N}{R}\left(1+\frac{\delta R}{R}\right)$

On peut écrire alors :

$$\frac{N}{R}(1-\frac{\delta R}{R})\times NR(1-\frac{\delta R}{R})\leq\sum_{i=1}^{N} R_i\times\sum_{i=1}^{N}\frac{1}{R_i}\leq\frac{N}{R}(1+\frac{\delta R}{R})\times NR(1+\frac{\delta R}{R})$$

soit $\boxed{N^2(1-\frac{\delta R}{R})^2\leq\frac{U_0}{U_1}\leq N^2(1+\frac{\delta R}{R})^2}$

i) si il n’y a pas d’erreur $\frac{U_0}{U_1}=N^2$ dans le pire des cas $\frac{U_0}{U_1}=N^2(1+\frac{\delta R}{R})^2$

D’après la question précédente, l’erreur maximale est $N^2-N^2(1+\frac{\delta R}{R})^2=N^2(1-(1+2\frac{\delta R}{R}+\frac{\delta R^2}{R^2}))$

soit $\boxed{N^2(2\frac{\delta R}{R}+\frac{\delta R^2}{R^2})}$

j) La méthode du diviseur série-parallèle étudiée la question 3 pour comparer les tensions n’est pas limitée par la gamme des résistances utilisées car on utilise des résistors de même résistance. On peut donc comparer des tensions sur plusieurs ordres de grandeur si on dispose d’un nombre de résistor N suffisamment grand

de plus l’erreur augmente moins vite que l’ordre de grandeur entre les tensions, ce qui est donc intéressant pour la comparaison