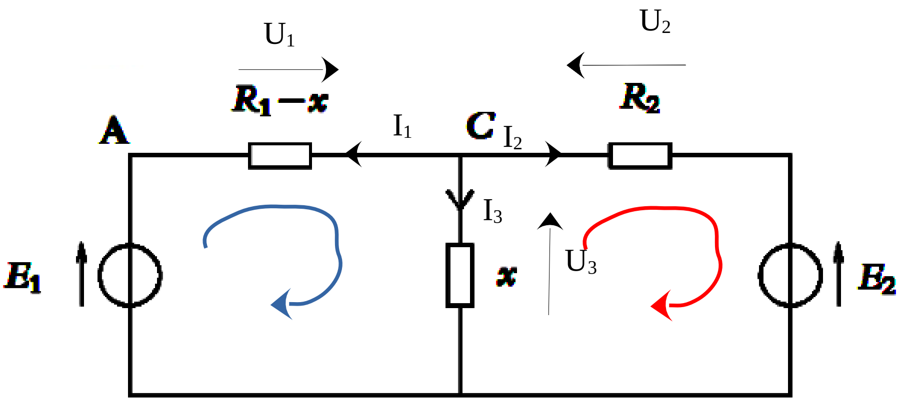
CORRECTION DM02

Exercice 1

a) On ne peut pas appliquer la relation du pont diviseur de tension pour calculer la tension aux bornes de x car l'intensité du courant circulant dans les résistances R_2 et $R_1 - x$ n'est pas la même que l'intensité traversant x



b) Le circuit comprend trois branches donc il faut a priori déterminer trois intensités. Ces trois intensités ne sont pas indépendantes puisqu'elles sont reliées par la loi des nœuds en C (avec les conventions choisies) :

$$I_1 + I_2 + I_3 = 0$$

ainsi $I_3 = -(I_2 + I_1)$ (*)

on peut écrire la loi des mailles dans la maille bleue et dans la maille rouge

$E_1 + (R_1 - x)\, I_1 = xI_3$

$x\, I_3 = R_2\, I_2 + E_2$

en remplaçant I_3 par (*) , on peut se ramener à un système avec pour inconnues seulement I_2 et I_2 :

$\mathbf{E_1 + (R_1 - x)\, I_1 = -x\,(I_2 + I_1)}$

$\mathbf{-x\,(I_2 + I_1) = R_2\, I_2 + E_2}$

c) en utilisant la méthode de substitution ou en faisant des combinaisons linéaires de ces deux équations pour éliminer I_1 puis I_2, on obtient I_1

$$\boxed{I_1 = \frac{xE_2 - (x + R_2)\, E_1}{x^2 - R_1\,(x + R_2)} \text{ et } I_2 = \frac{xE_1 - R_1 E_2}{x^2 - R_1\,(x + R_2)}.}$$

L'intensité dans x s'obtient alors par loi des nœuds soit

$$\boxed{I_3 = I_1 + I_2 = \frac{(x - R_1)\, E_2 - R_2 E_1}{x^2 - R_1\,(x + R_2)}}$$

e) Si la valeur de x est telle que $I_2 = 0$, On a alors $\boxed{\frac{E_2}{E_1} = \frac{x}{R_1}.}$

f) La connaissance de x et R_1 permet donc de comparer les deux tensions E_1 et E_2

Il faut s'assurer que $x<R_1$ pour que $R_1 - x > 0$, donc on a forcement $E_2 > E_1$

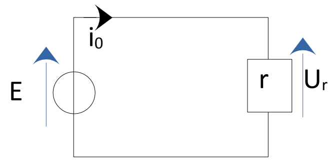
Il est possible d'effectuer cette comparaison si les tensions sont très différentes à condition de disposer de résistances de valeurs très différentes. Les gammes de valeurs de résistance seront donc un facteur limitant pour cette comparaison.

Correction DM02 exercice 2

A.1. Si le régime permanent et stationnaire est établi, la bobine se comporte comme un fil

De plus, si l'interrupteur est fermé, le résistor de résistance R est court-circuité

on peut faire un schéma équivalent



Loi des mailles : $E = U_r$

En utilisant la loi d'Ohm : $E = r\, i_0$

Finalement $\boxed{i_0 = \frac{E}{r}}$

A.N $\boxed{i_0 = 4\text{ A}}$

A.2 .

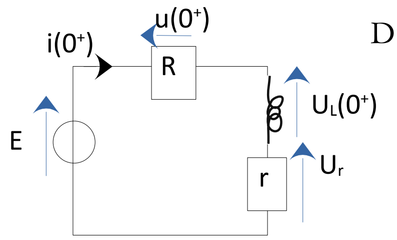
$E_L = \frac{1}{2} L i_0^2$ A.N : $\boxed{E_L = 8\ 10^{-3}\text{ J}}$

A.3. Si l'interrupteur est fermé la tension à ses bornes est nulle : $\boxed{u(t=0^-) = 0}$

A.4 L'intensité traversant une bobine étant continue : $\boxed{\mathbf{i(0^+) = i(0^-) = i_0}}$

Le schéma équivalent est le suivant :

à $t = 0^+$:

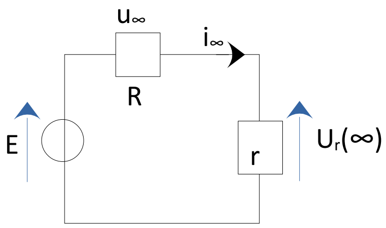


D'après la loi d'Ohm $\boxed{u(0^+) = R\, i(0^+)}$

$$\boxed{u(0^+) = R\frac{E}{r}}$$

A.5. On considère maintenant le régime permanent établi longtemps après ouverture de l'interrupteur. Déterminer i_∞ et u_∞ dans le circuit.

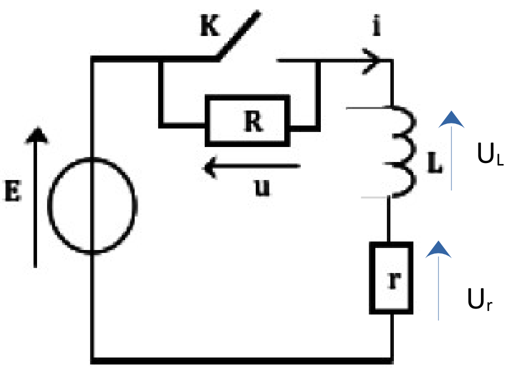
En régime permanent, la bobine se comporte toujours comme un fil, le schéma équivalent est le suivant



en appliquant le pont diviseur de tension : $\boxed{u_\infty = \frac{R}{r+R} E}$

la loi d'ohm dans R donne : $\boxed{i_\infty = \frac{u_\infty}{R} = \frac{E}{r+R}}$

A.6. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par i(t) pour t > 0. Commenter.



Loi des mailles : $E = U_r + U_R + U_L$

En utilisant la loi d'Ohm : $E = r\, i(t) + R\, i(t) + U_L$

En utilisant la relation tension-courant pour la bobine :

$$E = r\, i(t) + R\, i(t) + L\frac{di}{dt}$$

On peut la mettre sous la forme : $\boxed{\frac{E}{L} = \frac{r+R}{L} i(t) + \frac{di}{dt}}$

C'est une équation différentielle linéaire à coefficients constants du premier ordre

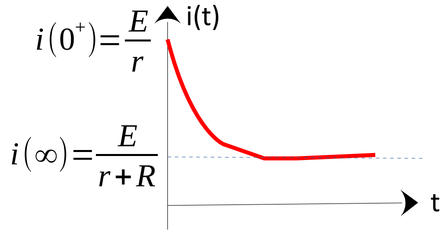
A.7. Solution particulière $i_p = \frac{E}{R+r}$

Solution générale : $i(t)=\frac{E}{R+r}+\lambda e^{\frac{-t}{\tau}}$ On peut identifier un temps caractéristique $\tau=\frac{L}{r+R}$

A.N $\tau=10^{-8}s$

Condition initiale : $i(0^+)=\frac{E}{r}\Leftrightarrow\frac{E}{R+r}+\lambda=\frac{E}{r}\Rightarrow\lambda=\frac{E}{r}-\frac{E}{r+R}=\frac{E\,R}{r(r+R)}$ donc $\boxed{i(t)=\frac{E}{R+r}+\frac{R}{(R+r)r}E\,e^{\frac{-t}{\tau}}}$

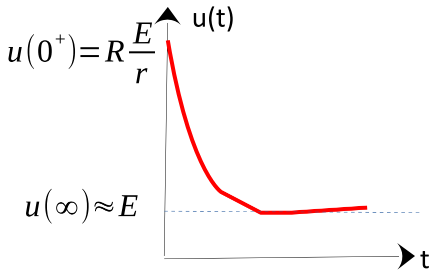
A.8. Tracer la courbe i(t).



A.9. Quand R tend vers l'infini, le temps caractéristique tend vers 0 et l'intensité finale tend vers 0

A.10. Déterminer la loi u(t). Tracer u(t) et commenter le cas R >> r.

D'après la loi d'Ohm pour la résistance R : $u(t)=R\,i(t)$ donc $\boxed{u(t)=R\frac{E}{R+r}+\frac{R^2}{(R+r)r}E\,e^{\frac{-t}{\tau}}}$



A.11. À l'ouverture $\boxed{u(0^+)=E\frac{R}{r}}$ comme r et faible R importante, la tension sera importante.

A.N : $u(0^+)=400\,kV$ c'est largement plus grand que la tension du réseau EDF (230 V)

A.12. A.N $\boxed{u(0^+)=400\,kV}$ cette tension peut faire claquer l'air sur $\frac{400}{30}=13{,}3\,cm$ ce qui est largement plus grand que l'espacement entre les deux bornes d'un interrupteur en général. **Une étincelle de rupture apparaît donc.**

A.13. $\boxed{T_R\approx 5\tau \quad \textbf{A.N :}\ T_R\approx 5\times 10^{-8}s}$

A.14. Bilan de puissance : $E\,i=R\,i^2+r\,i^2+u_l\,i(t)$ soit $E\,i=(R+r)\,i^2+\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}L\,i(t)^2\right)$

On suppose qu'à T_R

$$E_R=\int_{0^+}^{T_R}R\,i(t)^2dt = \int_{0^+}^{T_R}R\left(\frac{E}{R+r}+\frac{R}{(R+r)r}E\,e^{\frac{-t}{\tau}}\right)^2dt=\frac{R\,E^2}{(R+r)^2}T_R+2R^2\frac{E^2}{r(R+r)^2}[-\tau\,e^{\frac{-t}{\tau}}]_0^{T_R}+R^3\frac{E^2}{r^2(r+R)^2}[\frac{-\tau}{2}e^{-2\frac{t}{\tau}}]_0^{T_R}$$

$e^{\frac{-T_R}{\tau}}\approx 0$ donc $\boxed{E_R=\frac{R\,E^2}{(R+r)^2}\left(T_R+2\frac{R}{r}\tau+\frac{R^2}{r^2}\frac{\tau}{2}\right)}$ A.N : $\boxed{E_R = 8\text{ mJ}}$

A.15. Estimer la puissance de l'étincelle de rupture en supposant que l'étincelle disparaît quand t= T_R Toute l'énergie absorbée par R est dissipée en une durée T_R on a donc $\boxed{P_e=\frac{E_R}{T_R}}$

A.N $\boxed{P_R\approx 1{,}6\,10^5\,W}$ ce qui est un ordre de grandeur très important (une machine à laver consomme une puissance de l'ordre de 100 W)