CHAP. 07 : NOTIONS DE CINÉMATIQUE

Objectifs ♥

1 Différencier un solide d'un système déformable.

2 Comprendre la notion de référentiel, le caractère relatif du mouvement et le caractère absolu des distances et des intervalles de temps.

3 Établir les expressions des composantes du vecteur position, du vecteur vitesse et du vecteur accélération dans le seul cas des coordonnées cartésiennes et cylindriques.

4 Exprimer à partir d'un schéma le déplacement élémentaire dans les différents systèmes de coordonnées, construire le trièdre local associé et en déduire les composantes du vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes et cylindriques.

5 Choisir un système de coordonnées adapté au problème posé.

6 **Identifier les degrés de liberté d'un mouvement. Choisir un système de coordonnées adapté au problème.**

7 Exemple 1 : mouvement de vecteur accélération constant : exprimer la vitesse et la position en fonction du temps. Obtenir la trajectoire en coordonnées cartésiennes.

8 Exemple 2 : mouvement circulaire uniforme et non uniforme : exprimer les composantes du vecteur position, du vecteur vitesse et du vecteur accélération en coordonnées polaires. Identifier les liens entre les composantes du vecteur accélération, la courbure de la trajectoire, la norme du vecteur vitesse et sa variation temporelle. Situer qualitativement la direction de $\vec{a}$ dans la concavité d'une trajectoire plane.

9 Donner les expressions des vecteurs vitesse et accélération dans le repère de Frenet.

10 Reconnaître et décrire une translation rectiligne, une translation circulaire.

11 Rotation d'axe Δ : décrire la trajectoire d'un point quelconque du solide et exprimer sa vitesse en fonction de sa distance à l'axe et de la vitesse angulaire.

12 *Réaliser et exploiter quantitativement un enregistrement vidéo d'un mouvement : évolution temporelle des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{a}$.*

I Cinématique du point

1.1 Notion de point matériel

Dans tous les exemples étudiés au lycée (ou en cours de SI), les systèmes mécaniques étudiés sont des solides.

Définition

Remarque : le solide indéformable est un **modèle** : un solide parfaitement indéformable n'existe pas. Ce modèle n'est évidemment pas adapté pour décrire les systèmes déformables tels que les fluides, les milieux granulaires (tas de sable) ou encore les solides « mous » (pâte à modeler). Il exclut aussi tous les systèmes composés de plusieurs solides liés entre eux par des liaisons possédant au moins un degré de liberté : deux solides indéformables ne forment pas nécessairement un solide indéformable (exemple : un vélo et ses roues).

Pour repérer ce solide dans **l'espace à 3 dimensions** et dans le cas le plus général, on a besoin

.

En physique, on simplifie souvent l'étude :

Modèle du point matériel

On modélise alors le solide par un qui possède la même masse que le solide étudié, mais concentrée en un point.

Pour repérer un point matériel dans l'espace, on n'a donc besoin que de 3 coordonnées (pas de 3 angles).

1.2 Description du mouvement d'un point

a) Notion de référentiel

La description d'un mouvement dépend de l'observateur :

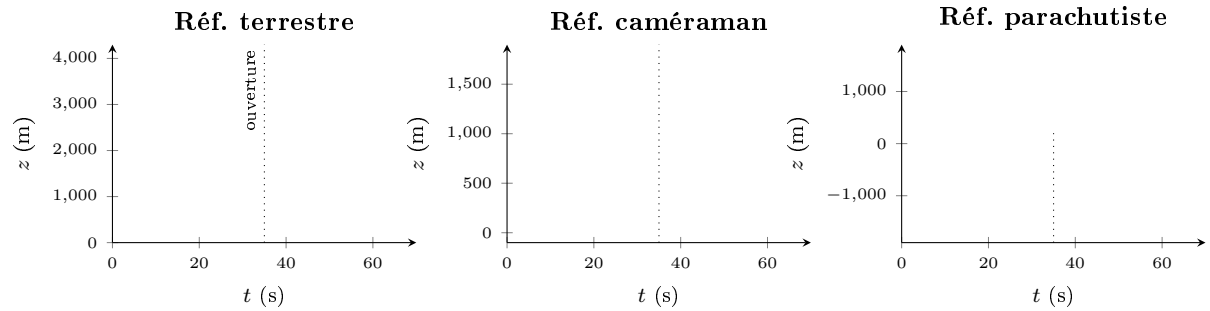
Vidéo : un même saut vu dans trois référentiels





La vidéo est filmée par un **caméraman en chute libre** qui saute avec un parachutiste. Pendant la chute, le parachutiste semble **immobile** devant la caméra ; puis il ouvre son parachute et **semble partir vers le haut** à toute vitesse !
Pourtant, dans le référentiel terrestre, le parachutiste n'est jamais monté : il a seulement *ralenti*, alors que le caméraman a continué à tomber.
À faire : on note $z(t)$ la position du parachutiste sur un axe vertical **orienté vers le haut**. Tracer l'allure de $z(t)$ dans chacun des trois référentiels. Que vaut $\dot{z}(t)$ dans chaque cas ?

Modèle : chute libre avec frottements (vitesse limite $\approx 55\,\mathrm{m/s}$), ouverture du parachute à $t_0 = 35\,\mathrm{s}$, vitesse limite sous voile $\approx 5\,\mathrm{m/s}$.



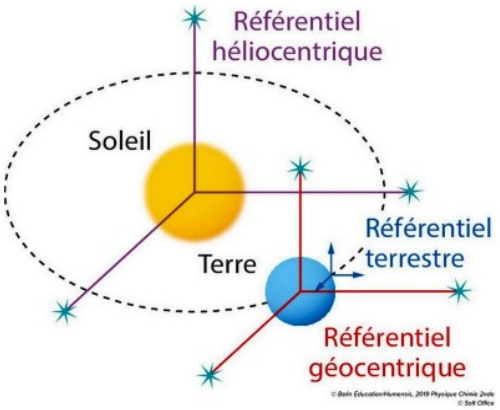
Définition

Lorsque l'on décrit un mouvement, il faut donc choisir un référentiel.

Il y a donc une infinité de référentiels imaginables. En pratique, il y a deux façons de définir un référentiel : ou bien en donnant un solide de référence (c'est par exemple le cas du référentiel ter-

restre), ou bien en donnant un point fixe et trois directions de référence (donc en pratique des points) : c'est par exemple le cas des référentiels géocentrique et héliocentrique.

Référentiel	**Origine du repère**	**Axes**
Terrestre (ou réf. du laboratoire)	Un point de la Terre ou « proche » de la Terre	Liés à la Terre
Géocentrique	Centre de masse de la Terre	Pointent vers 3 étoiles lointaines
Héliocentrique (ou de Kepler)	Centre de masse du Soleil	
De Copernic	Centre de masse du système solaire	



△ Attention

Il ne faut pas confondre le , c'est-à-dire le système de référence (notion physique), , c'est-à-dire **l'outil géométrique** qui sert à décrire le mouvement (notion mathématique). Il y a une infinité de repères différents qui peuvent être associés à un même référentiel. En SI, quasiment tous les mouvements sont implicitement étudiés dans le référentiel terrestre et seul le repère est précisé, mais en physique on se forcera à définir le référentiel.

b) Vecteurs position, vitesse et accélération

♥

Toutes ces grandeurs dépendent du référentiel d'étude ! C'est pour cette raison qu'il est important de le préciser avant de mener une étude cinématique.

Remarque (vocabulaire) : il ne faut pas confondre vecteur vitesse $\vec{v}$ et « vitesse ».

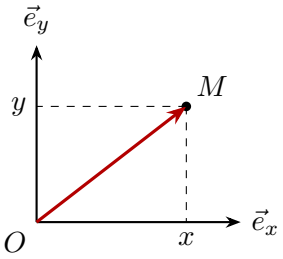
- « **Mouvement rectiligne** » = ♥
  En termes de vitesse : **la direction de $\vec{v}$ ne varie pas**, par contre la norme de la vitesse peut varier.
- « **Mouvement uniforme** » = ♥
  En termes de vitesse : $v = \|\vec{v}\| = \text{cste}$,
  (le vecteur vitesse ne varie pas en norme, mais sa direction peut varier au cours du temps).

1.3 Repérage d'un point dans un plan

a) Coordonnées cartésiennes

Vecteur position :

Vecteur vitesse instantanée :



Vocabulaire important : $v_x(t) = \vec{v}(t) \cdot \vec{e}_x = \dot{x}(t)$

C'est aussi la projection sur l'axe (Ox) du vecteur vitesse instantanée.

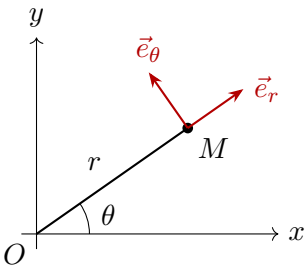
- **si $v_x(t) > 0$, le système se déplace dans le sens des x croissants ;**
- **si $v_y(t) < 0$, le système se déplace dans le sens des y décroissants.**

Notation : on peut écrire de façon équivalente



♥

b) Coordonnées polaires



Vecteurs de base : $\vec{e}_r = \dfrac{\overrightarrow{OM}(t)}{\|\overrightarrow{OM}(t)\|}$;

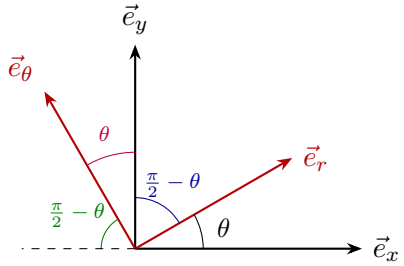
$\vec{e}_\theta$ est tourné de 90° (dans le sens trigonométrique) par rapport à $\vec{e}_r$.

Remarque (vocabulaire) : $\vec{e}_\theta$ et $\vec{e}_r$ sont des **vecteurs mobiles**, à la différence des vecteurs du repère cartésien $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$:

♥

Remarque (notation) : on écrit aussi $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$.

Expression des vecteurs de base polaire dans la base cartésienne :



Pour $\vec{e}_r$: l'angle entre $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_x$ est θ ; l'angle entre $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_y$ est $\frac{\pi}{2} - \theta$ (et $\vec{e}_r$, $\vec{e}_y$ sont dans le même sens) :

♥

Pour $\vec{e}_\theta$: l'angle entre $\vec{e}_\theta$ et $\vec{e}_y$ est θ ; l'angle entre $\vec{e}_\theta$ et $\vec{e}_x$ est $\frac{\pi}{2} + \theta$ ($\vec{e}_\theta$ et $\vec{e}_x$ **pas dans le même sens**) :

♥

Méthode de projection

Pour trouver le facteur devant $\vec{e}_x$ quand on exprime un vecteur unitaire $\vec{u}$ dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$: on détermine l'angle α entre $\vec{u}$ et $\vec{e}_x$; le facteur sera $\cos\alpha$ et on aura $\vec{u} = \cos\alpha\,\vec{e}_x + \dots$
Parfois il est plus simple de déterminer l'angle α' entre $\vec{u}$ et $-\vec{e}_x$: le facteur sera $-\cos\alpha'$ et on aura $\vec{u} = -\cos\alpha'\,\vec{e}_x + \dots$

Vecteur position en coordonnées polaires :

♥

Dérivée temporelle des vecteurs de base polaire. $\vec{e}_r = \cos\theta\,\vec{e}_x + \sin\theta\,\vec{e}_y$ donc

$$\frac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\cos(\theta)\big)\vec{e}_x + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\sin(\theta)\big)\vec{e}_y \qquad (\vec{e}_x, \vec{e}_y \text{ fixes}).$$

Or θ est (a priori) aussi une fonction du temps : on devrait écrire en toute rigueur $\cos(\theta(t))$. On dérive donc une **fonction composée** : $t \mapsto u = \theta(t) \mapsto v(u) = \cos(u)$, et $\big(v(u(t))\big)' = u'(t) \times v'(u(t))$.

Avec la notation physique $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\theta(t)\big) = \dot{\theta}(t)$ et comme $\cos'(x) = -\sin(x)$:

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\cos\theta(t)\big) = \dot{\theta}(t) \times \big(-\sin\theta(t)\big)$ qu'on écrit plus simplement

De même ♥. Ainsi

$$\frac{\mathrm{d}\vec{e}_\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(-\sin\theta\big)\vec{e}_x + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\cos\theta\big)\vec{e}_y = -\dot{\theta}\cos\theta\,\vec{e}_x - \dot{\theta}\sin\theta\,\vec{e}_y = -\dot{\theta}\,\underbrace{\big(\cos\theta\,\vec{e}_x + \sin\theta\,\vec{e}_y\big)}_{\vec{e}_r}$$

À retenir ♥

À connaître par cœur, pas à redémontrer à chaque fois.

Vecteur vitesse instantanée en coordonnées polaires :

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(r\,\vec{e}_r\big) = \qquad \text{donc}$$

♥

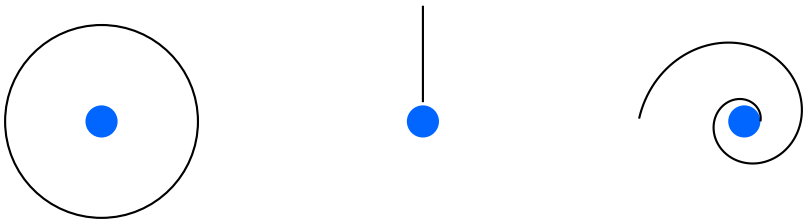
Vecteur accélération instantanée :

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta\right) =$$



Rappels sur la trajectoire :

Pour chaque trajectoire autour de la Terre, la forme attendue pour le vecteur vitesse instantanée :

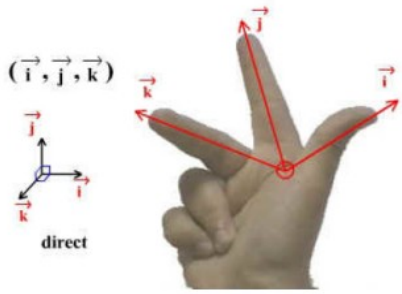


cercle : r = cste radiale : θ = cste spirale

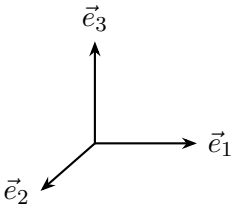
1.4 Repérage d'un point dans l'espace (et pas dans le plan !)

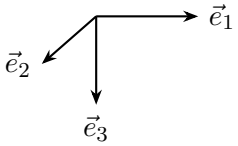
Le système possède **3 degrés de liberté** lorsqu'il se déplace dans l'espace, alors qu'il en possède 2 quand il se déplace dans le plan.

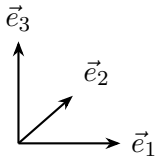
a) Base orthonormée directe



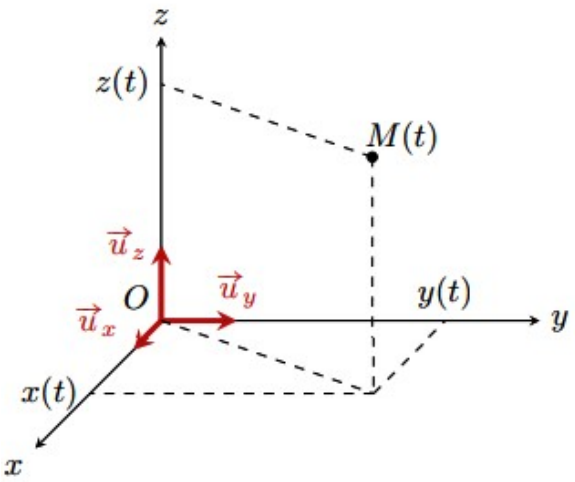
Un repère orthonormé $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est **direct** si ses trois vecteurs de base, pris dans cet ordre, ont des directions qui correspondent à celles des trois premiers doigts de la main droite.
Attention ! L'ordre des vecteurs a une importance ! Le repère $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est direct, mais le repère $(\vec{i},\vec{k},\vec{j})$ ne l'est pas.



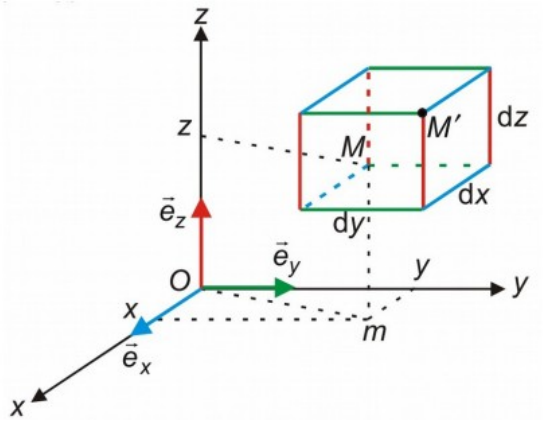




b) Coordonnées cartésiennes



Notion de déplacement élémentaire



Le déplacement élémentaire du point passant de M à M' infiniment voisin s'écrit : $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MM'}$

En coordonnées cartésiennes :

♥

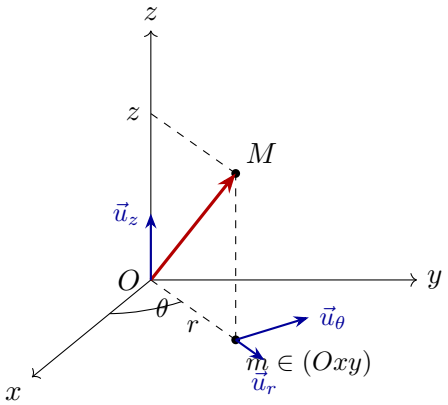
Vecteur position :

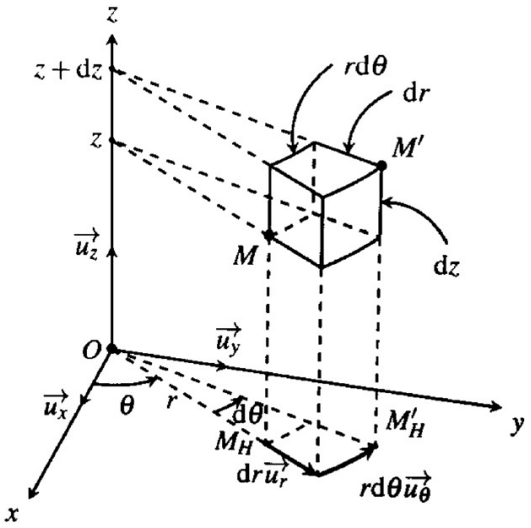
Remarque (notation) : souvent, on sous-entend la dépendance en t : $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z$.

Vecteur vitesse instantanée en coordonnées cartésiennes : $\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{e}_x + \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{e}_y + \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\vec{e}_z$, soit

♥

c) Coordonnées cylindriques





Le déplacement élémentaire du point passant de M à M' infiniment voisin s'écrit :

$r = Om$, avec m la projection orthogonale de M dans le plan (Oxy), et $\theta \in [0, 2\pi[$.

Coordonnées cylindriques =

Vecteur position :

Le déplacement élémentaire se décompose en 3 composantes :

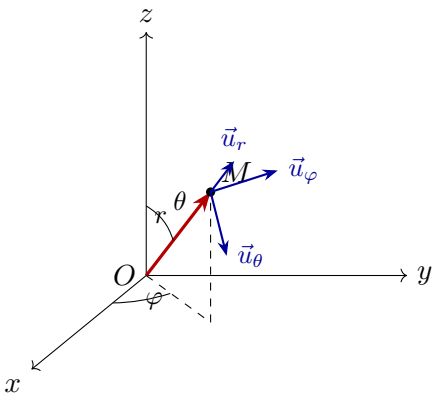
- une variation de la distance r pour arriver en M' ;
- une rotation (variation de θ seul en conservant le même r) ;
- une variation de z seul.

Vecteur vitesse : $\vec{v}(t) = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\vec{u}_r + r\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\vec{u}_\theta + \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\vec{u}_z$

soit

Vecteur accélération instantanée en coordonnées cylindriques : $\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}(t)}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{r}\,\vec{u}_r + r\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + \dot{z}\,\vec{u}_z\right)$, soit

d) Coordonnées sphériques



φ est la longitude : $\varphi \in [0, 2\pi[$
θ est la colatitude (angle par rapport à l'axe Oz) : $\theta \in [0, \pi]$

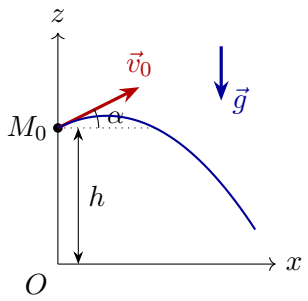
Vecteur position : $\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}_r$

Vecteur vitesse : $\vec{v} = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + r\sin\theta\,\dot{\varphi}\,\vec{u}_\varphi$

Vecteur déplacement élémentaire :

II Étude de mouvements simples

2.1 Mouvement de vecteur accélération constant



On étudie le mouvement d'une balle de masse m, assimilée à son centre de masse M, en chute libre, lancée avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$ à une hauteur (ou cote) h de l'origine O du repère.
Système : ; **référentiel :** terrestre, supposé galiléen (abrégé TSG).
Bilan des forces :

a) Application de la 2e loi de Newton au système

$\vec{g}$ est dirigé dans le sens opposé à l'axe Oz : avec $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, soit

b) Vecteur vitesse

Les composantes du vecteur vitesse instantanée sont les primitives par rapport au temps des composantes du vecteur accélération instantanée :

avec C_1, C_2, C_3 des constantes que l'on peut déterminer grâce aux conditions initiales.

Soit un vecteur $\vec{v}_0$ de norme v_0 qui forme un angle α avec l'axe Ox. Ses coordonnées dépendent de son orientation :

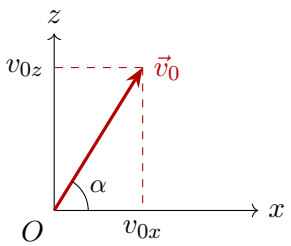


schéma de gauche : $\vec{v}_0$ vers le haut

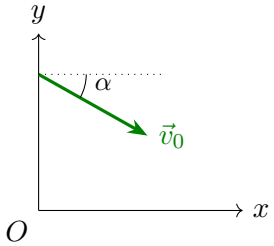


schéma de droite : $\vec{v}_0$ vers le bas

△ Attention

Attention au sens du vecteur ! Une composante est négative quand le vecteur pointe dans le sens opposé à l'axe.

Utilisation de la condition initiale sur la vitesse : à l'instant $t = 0$, $\vec{v}(t = 0) = \vec{v}_0$:

Finalement :

♥

c) Détermination des coordonnées (lois horaires du mouvement)

On primitive le vecteur vitesse pour obtenir le vecteur position :

avec les conditions initiales $\overrightarrow{OM}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{pmatrix} = h\,\vec{e}_z$

On obtient les trois **équations horaires du mouvement** :

♥

Remarques : $y = 0$ à tout instant :
Si $v_0 = 0$ (vitesse initiale nulle), alors

d) Détermination de la trajectoire du système

Définition

La trajectoire du système est la courbe représentative des positions successives du système.
Ici, c'est la courbe représentative de la fonction d'équation $z = f(x)$.

Remarque : il ne faut pas confondre la trajectoire $z = f(x)$ et les équations horaires $z = f(t)$, $x = g(t)$.

On supprime la variable temps dans le système d'équations horaires :

On réinjecte l'expression de t en fonction de x dans l'expression de $z(t)$:

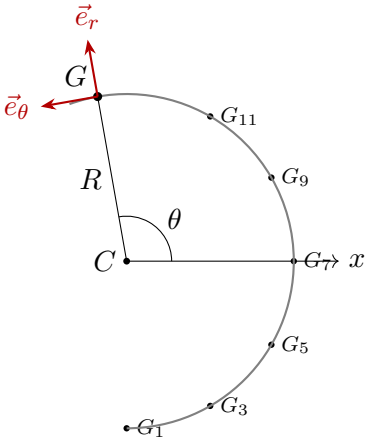
or $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$ soit

♥

Cette équation a pour représentation graphique une parabole : on dit que la trajectoire est parabolique.

2.2 Mouvement circulaire

a) Mouvement circulaire uniforme



Circulaire →
Uniforme →

Vecteur position :

Vecteur vitesse :

⇒ ♥

Comme la vitesse est constante : ⟺ :

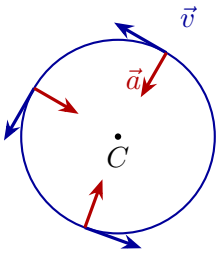
On note souvent .

Vocabulaire : comme $\vec{v}$ est orthogonal au rayon R, on dit que le vecteur vitesse est : il est dirigé selon $\vec{e}_\theta$.

Vecteur accélération :

⟺

En fonction de v_0 et R : $\vec{a} = -R\left(\frac{v_0}{R}\right)^2 \vec{e}_r$ ⟺ ♥ En fonction de ω_0 et R : ♥



△ **Attention**

Vocabulaire : comme $\vec{a}$ est dirigé vers le centre et colinéaire à $\vec{e}_r$, on dit que l'accélération est

Remarque (HP) : un objet de masse m en M suivant cette trajectoire subit une force dite centrifuge telle que $\vec{F}_{centrifuge} = -m\vec{a} = m\frac{v_0^2}{R}\vec{e}_r$. C'est pour cette raison qu'on est poussé vers l'extérieur dans une voiture qui tourne : plus le virage est serré, plus la force est grande (dépendance en $1/R$) ; plus la vitesse est grande, plus la force est grande (dépendance en v_0^2).

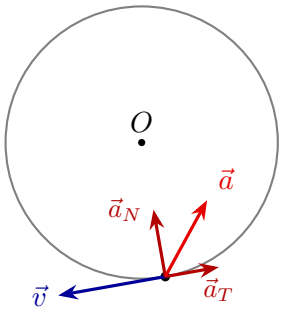
b) Mouvement circulaire non uniforme

On a toujours $\vec{v} = R\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$. **Par contre :**

⟺

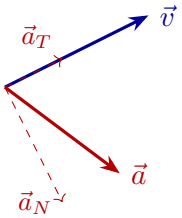
que l'on peut aussi écrire (avec $v = R\dot{\theta}$) :



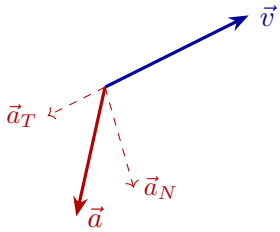


Comme l'accélération angulaire $\ddot{\theta}$ n'est pas nulle,

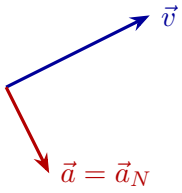
c) Interprétation du vecteur $\vec{a}$



angle aigu entre $\vec{v}$ et $\vec{a}$:
$\vec{v}\cdot\vec{a} > 0 \rightarrow$ **mvt accéléré**



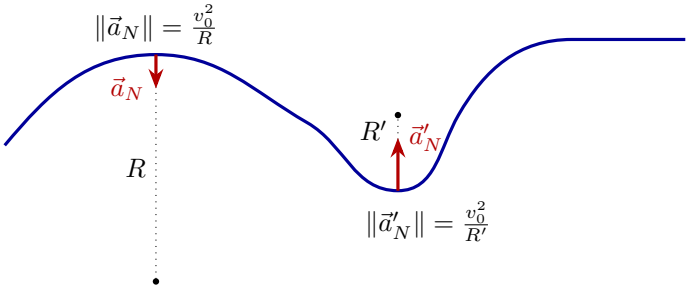
angle obtus :
$\vec{v}\cdot\vec{a} < 0 \rightarrow$ **mvt ralenti**



angle droit :
$\vec{v}\cdot\vec{a} = 0 \rightarrow$ **mvt uniforme**

Justification :

Remarque : la



Repère de Frenet ♥

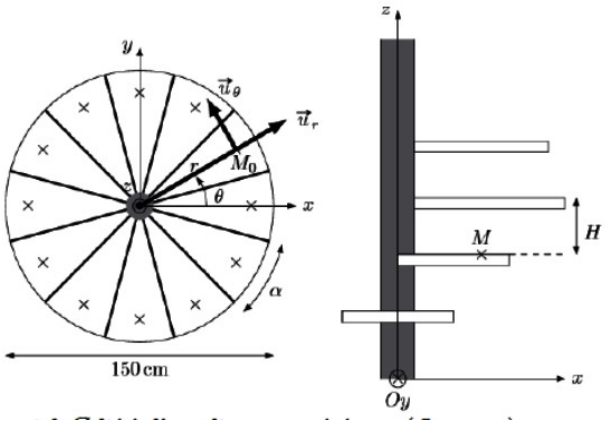
On utilise parfois le repère de Frenet pour écrire le mouvement :

- $\vec{T}$ est le vecteur unitaire tangent à la trajectoire
- $\vec{N}$ est le vecteur unitaire normal à la trajectoire,

et

Bien adapté quand on ne sait pas a priori si le mouvement est circulaire.

2.3 Mouvement hélicoïdal



Un escalier en colimaçon est constitué de quatorze marches régulièrement disposées autour d'un pilier central. Une personne, assimilée à un point M, monte d'une démarche régulière à raison d'une marche par seconde en restant à $r = 60\,\text{cm}$ de Oz.
Sur la figure de gauche, M_0 est le projeté orthogonal de M sur le plan perpendiculaire à Oz. Les croix représentent les positions successives de M_0 au niveau de chaque marche. La figure fait apparaître l'angle des marches : $\alpha = 30°$.

Q1 On donne $H = 20\,\text{cm}$. Estimer la dérivée temporelle $\dot{z}$ de la cote (altitude) z du point M. Le mouvement est-il accéléré suivant Oz ? Proposer une expression de $z(t)$ en prenant $z = 0$ à $t = 0$.

Q2 Nous nous intéressons à la rotation de M_0 autour du pilier. Qualifier le mouvement de M_0 et donner la valeur de la vitesse angulaire $\dot{\theta}$.

Q3 Exprimer les vecteurs vitesse et accélération de M_0 dans le référentiel $\mathcal{R}$. Calculer la norme de la vitesse.

Q4 Donner le lien entre $\dot{z}$ et $\dot{\theta}$.

Q5 Exprimer dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ les vecteurs vitesse et accélération de M dans $\mathcal{R}$.

III Cinématique du solide : exemples simples

3.1 Translation

Définition ♥

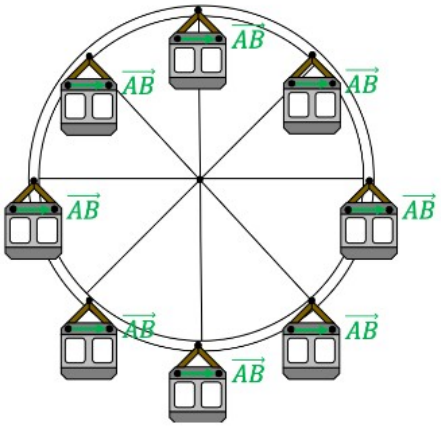
Remarque : la norme de la vitesse peut varier au cours du temps, mais elle varie de la même façon pour tous les points !

a) Translations rectilignes

Définition

Propriété : un solide est en translation lorsque les directions du repère lié au solide sont fixes par rapport au référentiel d'étude.
Exemples :

b) Translation circulaire



Définition

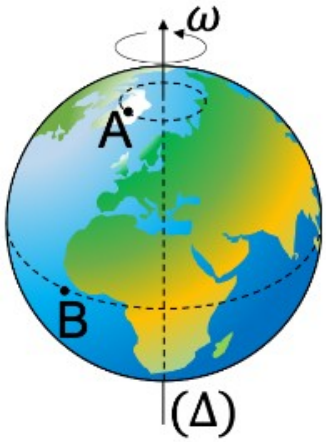
♥

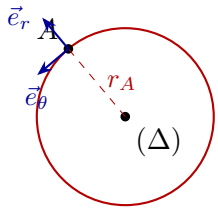
Propriété :

3.2 Rotation autour d'un axe fixe

Définition

♥



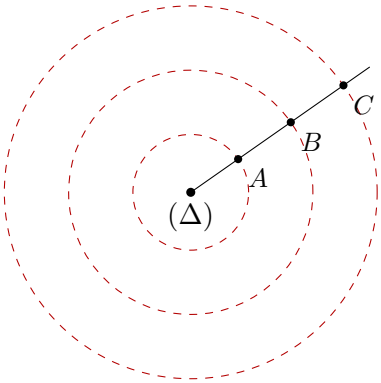


vue de dessus

Soit un solide en rotation autour d'un axe Δ à la vitesse angulaire ω. Soit A un point du solide, à la distance r_A de l'axe Δ. On a (indépendant du point A considéré).
En coordonnées cylindriques : $\vec{v}(A) = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + \dot{z}\,\vec{e}_z$.
Comme $r = r_A = \text{cste}$, $\omega = \dot{\theta}$ et $\dot{z} = 0$:

♥

Champ de vitesse :



Champ d'accélération :

Application

Accélération dans le référentiel géocentrique d'un point B au niveau de l'équateur sur la Terre.
Rayon de la Terre : $R_T = 6370\,\text{km}$; vitesse angulaire de rotation : $\omega = \dfrac{2\pi}{24\times 60\times 60} = 7.3\times 10^{-5}\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$.
Donc :