CHAP. 07 : NOTIONS DE CINÉMATIQUE

Objectifs :

1. Différencier un solide d'un système déformable.
2. Comprendre la notion de référentiel, le caractère relatif du mouvement et le caractère absolu des distances et des intervalles de temps.
3. Etablir les expressions des composantes du vecteur-position, du vecteur-vitesse et du vecteur-accélération dans le seul cas des coordonnées cartésiennes et cylindriques.
4. Exprimer à partir d'un schéma le déplacement élémentaire dans les différents systèmes de coordonnées, construire le trièdre local associé et en déduire les composantes du vecteur-vitesse en coordonnées cartésiennes et cylindriques.
5. Choisir un système de coordonnées adapté au problème posé.
6. **Identifier les degrés de liberté d'un mouvement. Choisir un système de coordonnées adapté au problème.**
7. Exemple 1 : mouvement de vecteur-accélération constant – exprimer la vitesse et la position en fonction du temps. Obtenir la trajectoire en coordonnées cartésiennes.
8. Exemple 2 : mouvement circulaire uniforme et non uniforme – exprimer les composantes du vecteur-position, du vecteur-vitesse et du vecteur-accélération en coordonnées polaires. Identifier les liens entre les composantes du vecteur-accélération, la courbure de la trajectoire la norme du vecteur-vitesse et sa variation temporelle. Situer qualitativement la direction de $\vec{a}$ dans la concavité d'une trajectoire plane.
9. Reconnaître et décrire une translation rectiligne, une translation circulaire.
10. Rotation d'axe Δ :Décrire la trajectoire d'un point quelconque du solide et exprimer sa vitesse en fonction de sa distance à l'axe et de la vitesse angulaire.
11. *Réaliser et exploiter quantitativement un enregistrement vidéo d'un mouvement : évolution temporelle des vecteurs* $\vec{v}$ *et* $\vec{a}$.

I Cinématique du point

I.1. Notion de point matériel

Dans tous les exemples étudiés au lycée (ou en cours de SI), les systèmes mécaniques étudiés sont des solides

Rmq :

Le solide indéformable est un modèle : un solide parfaitement indéformable n'existe pas. Ce modèle n'est évidemment pas adapté pour décrire les systèmes déformables tels que les fluides, les milieux granulaires (tas de sable) ou encore les solides « mous » (pâte à modeler). Il exclut aussi tous les systèmes composés de plusieurs solides liés entre eux par des liaisons possédant au moins un degré de liberté : deux solides indéformables ne forment pas nécessairement un solide indéformable. Exemple : un vélo et ses roues

Pour repérer ce solide dans **l'espace à 3 dimension** et dans le cas le plus général, on a besoin :

En physique on simplifie souvent l'étude :

Pour repérer un point matériel dans l'espace on a donc besoin que de 3 coordonnées (pas de 3 angles)

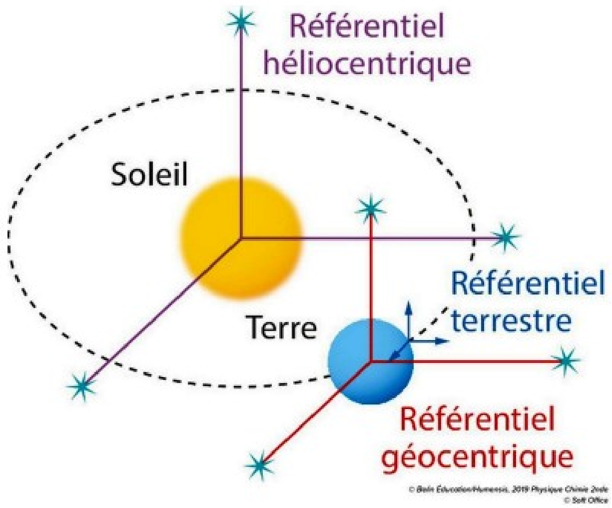
I.2. Description du mouvement d'un point

a Notion de référentiel

La description d'un mouvement dépend de l'observateur :**on bouge toujours par rapport à quelque chose** (Exemple du passager assis dans un train, immobile par rapport au train mais en mouvement par rapport au quai lorsque le train avance) ;

Il y a donc une infinité de référentiels imaginables. En pratique, il y a deux façons de définir un référentiel : . ou bien en donnant un solide de référence, c'est par exemple le cas du référentiel terrestre ; . ou bien en donnant un point fixe et trois directions de référence (donc en pratique des points), c'est par exemple le cas des référentiels géocentrique ou héliocentrique.

Référentiel	**Origine du repère**	**Axes**
Terrestre (ou réf du laboratoire	Un point de la Terre ou « proche » de la Terre	Liés à la terre
Géocentrique	Centre de masse de la Terre	Pointent vers 3 étoiles lointaines
Héliocentrique (ou de Kepler)	Centre de masse du soleil	
De Copernic	Centre de masse du système solaire	



Attention ! Il ne **faut pas confondre le référentiel,** c'est-à-dire le système de référence (notion physique) **avec le repère,** c'est-à-dire **l'outil géométrique** qui sert à décrire le mouvement (notion mathématique). Il y a une infinité de repères différents qui peuvent être associés à un même référentiel. En SI quasiment tous les mouvements sont implicitement étudiés dans le référentiel terrestre et où seul le repère est précisé, mais en physique on se forcera a définir le référentiel.

b Vecteurs position, vitesse et accélération

Rmq (vocabulaire) : **il ne faut pas confondre vecteur-vitesse** $\vec{v}$ **et « vitesse » notée v**

la vitesse peut être la norme du vecteur-vitesse :

ou la projection du vecteur vitesse sur un axe **:**

cela a une importance pour la caractérisation des mouvements :

→ « Mouvement rectiligne » =

En terme de vitesse :

→ « Mouvement uniforme » =

En terme de vitesse :

(ne varie pas en norme, par contre la direction du vecteur vitesse peut varier au cours du temps !)

I.3. Repérage d'un point dans un plan

a Coordonnées cartésiennes

vecteur position $\vec{OM}$:

vecteur vitesse instantanée $\vec{v}=\frac{d\vec{OM}}{dt}$

vocabulaire important :

$v_x(t)=\vec{v}(t)\cdot\vec{e}_x=\dot{x}(t)$) **est**

C'est aussi la projection sur l'axe (Ox) du vecteur vitesse instantanée

v_y(t) et v_x(t) sont des grandeurs algébriques :

si v_x(t) >0 le système se déplace dans le

si v_y(t) <0 le système se déplace dans

Notation : on peut écrire de façon équivalente : $\dot{x}(t)$ ou $\frac{dx(t)}{dt}$ ou $\dot{x}$

vecteur accélération instantanée

b Coordonnées polaires

vecteurs de base : →

→ $\vec{e}_\theta$ est tourné de 90° (dans le sens trigonométrique) par rapport à $\vec{e}_r$

Rmq (vocabulaire) : $\vec{e}_\theta$ et $\vec{e}_r$ sont des **vecteurs mobiles** à la différence des vecteurs du repère cartésien $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$,

Rmq (notation) : on écrit aussi $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$

Expression des vecteurs de base polaire en fonction de la base cartésienne :

Angle θ entre $\vec{e}_\theta$ et $\vec{e}_y$ $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_y$ sont dans le même sens
Angle de $\pi/2$ -θ entre $\vec{e}_\theta$ et $\vec{e}_x$ $\vec{e}_\theta$ et $\vec{e}_x$ **pas dans le même sens**

On en déduit :

Angle entre $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_r$
$\vec{e}_r$ et $\vec{e}_x$ sont dans le même sens

Angle de entre $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_y$
$\vec{e}_r$ et $\vec{e}_y$ dans dans le même sens

On en déduit :

vecteur position $\vec{OM}$ en coordonnées polaires :

Dérivée temporelle des vecteurs de base polaire

$\vec{e}_r = \cos(\theta)\vec{e}_x + \sin(\theta)\vec{e}_y$ donc

Or θ est (à priori) aussi une fonction du temps on devrait écrire en toute rigueur $\cos(\theta(t))$ on dérive donc ici une fonction composée :

$t \xrightarrow{u} \theta(t) \xrightarrow{v} \cos(\theta(t))$ donc $\cos(\theta(t)) = v \circ u(t) = v(u(t))$ ainsi

$\frac{d}{dt}(\cos(\theta(t))) = v(u(t))' = \boldsymbol{u'(t)} \times \boldsymbol{v'(u(t))}$

Avec la notation physique $\frac{d}{dt}(\theta(t)) = \dot{\theta}(t)$ qui correspond à $\theta'(t)$ et comme $\cos(x)' = -\sin(x)$

on a finalement $\frac{d}{dt}(\cos(\theta(t))) = \dot{\theta}(t) \times (-\sin(\theta(t)))$ qu'on écrit plus simplement

De même

ainsi

De même $\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = \frac{d}{dt}(\cos(\theta)\vec{e}_y) + \frac{d}{dt}(-\sin(\theta)\vec{e}_x) = -\dot{\boldsymbol{\theta}}\sin\theta\,\vec{e}_y - \dot{\boldsymbol{\theta}}\cos\theta\,\vec{e}_x = -\dot{\boldsymbol{\theta}}\underbrace{(\cos\theta\,\vec{e}_x + \sin\theta\,\vec{e}_y)}_{\vec{e}_r}$

donc

vecteur vitesse instantanée en coordonnées polaires :

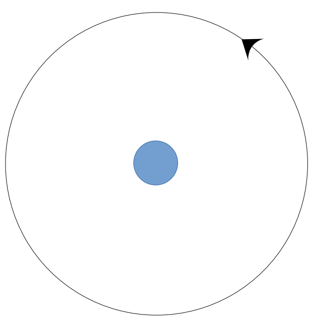
vecteur accélération instantanée : $\vec{a}(t) = \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{\boldsymbol{r}}\,\vec{e}_r + r\dot{\boldsymbol{\theta}}\,\vec{e}_\theta)$

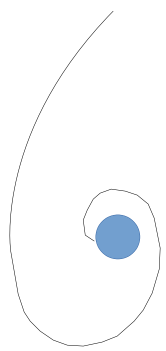
Rappel sur les trajectoire :

-

-

Pour chaque trajectoire autour de la terre, donner la forme attendu pour le vecteur vitesse instantanée

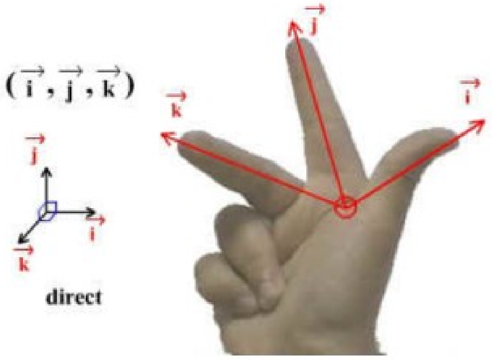




I.4. Repérage d'un point dans l'espace (et pas dans le plan !)

le système possède 3 degrés de liberté lorsqu'il se déplace dans l'espace alors qu'il en possède 2 quand il se déplace dans le plan

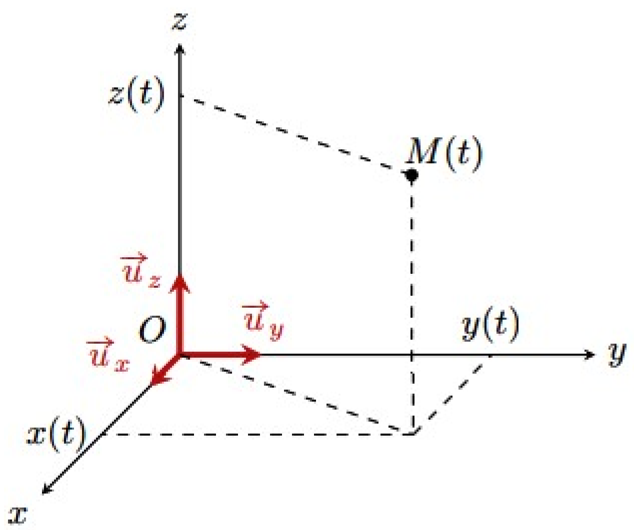
a Base orthonormée directe



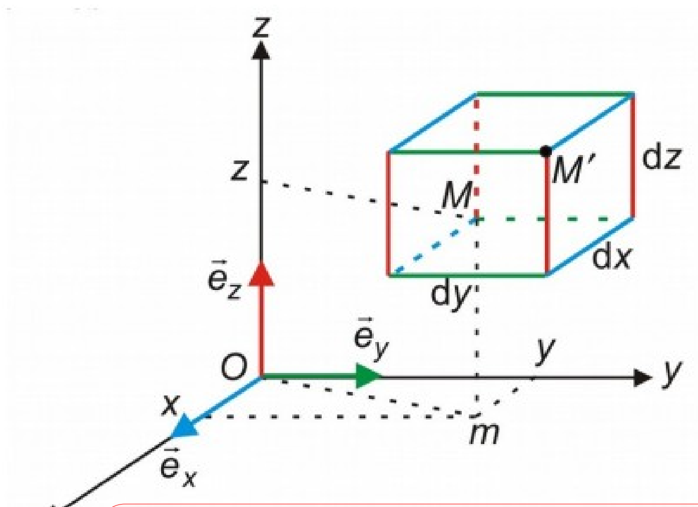
Un repère orthonormé ($\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) est direct si ses trois vecteurs de base pris dans cet ordre ont des directions qui correspondent à celles des trois premiers doigts de la main droite.

Attention ! L'ordre des vecteurs a une importance ! Le repère ($\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) est direct, mais le repère ($\vec{i}$, $\vec{k}$, $\vec{j}$) ne l'est pas.

b Coordonnées cartésiennes



Notion de déplacement élémentaire



Le déplacement élémentaire du point passant de M à M' infiniment voisin s'écrit :

En coordonnées cartésiennes :

Vecteur position $\vec{OM}$:

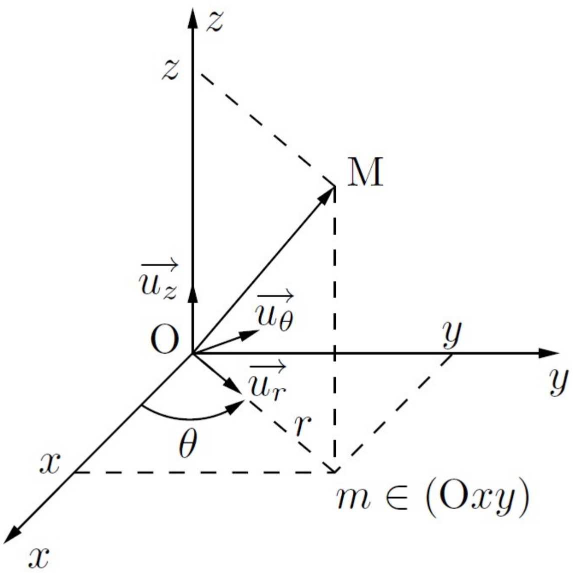
Rmq (notation) souvent on sous entend la dépendance en t : $\vec{OM} = x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z$

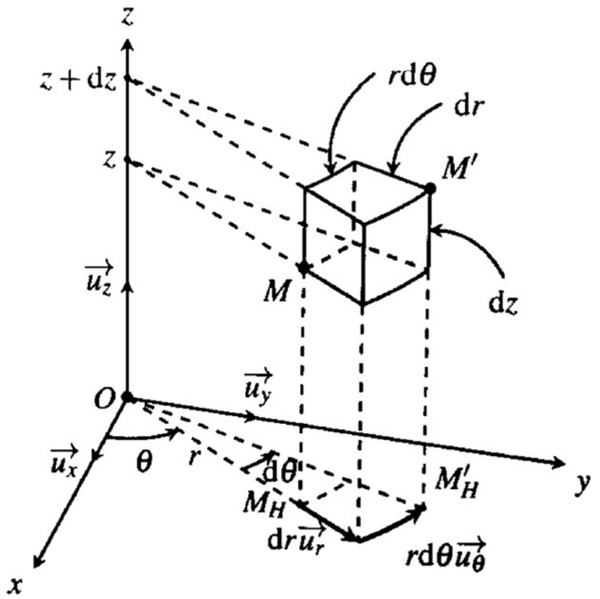
vecteur-vitesse instantanée en coordonnées cartésiennes :

soit :

vecteur-accélération instantanée :

c Cordonnées cylindriques





r= Om avec le point m qui est la projection orthogonal de M dans le plan (Oxy)

et $\theta \in [0,2\pi[$

coordonnées cylindriques =

vecteur position :

vecteur vitesse :

soit

Le déplacement élémentaire du point passant de M à M' infiniment voisin s'écrit :

Le déplacement élémentaire se décompose en 3 composantes :

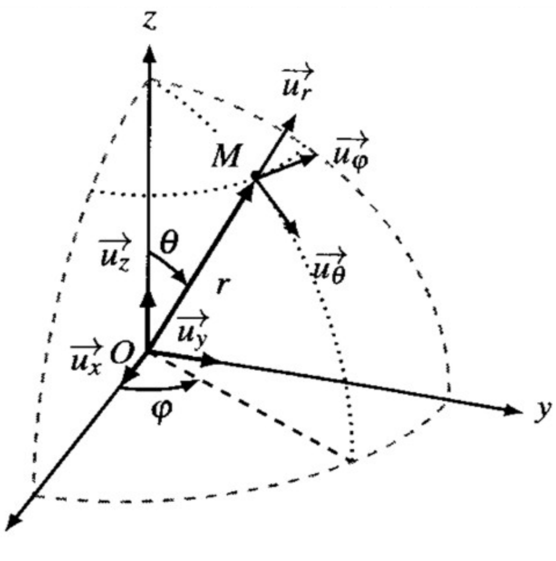
-Une variation de la distance r pour arriver en M'

-Une rotation (variation de θ seul en conservant le même r)

-Une variation de z seul

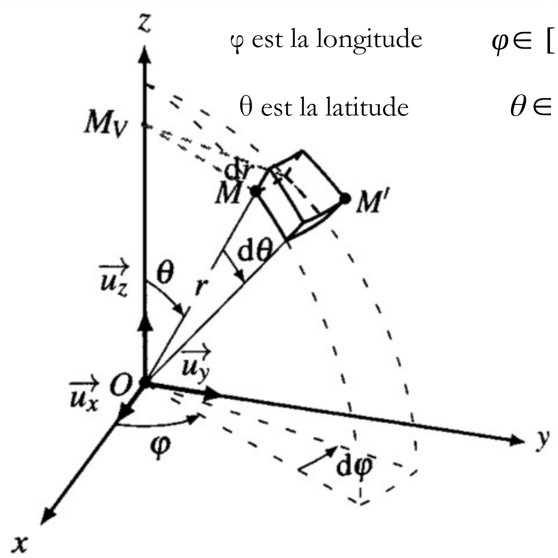
vecteur accélération instantanée en coordonnées cylindriques :

d Cordonnées sphériques



φ est la longitude $\varphi \in [0,2\pi[$

θ est la latitude $\theta \in [0,\pi]$



vecteur-position $\vec{OM} = r\vec{u}_r$

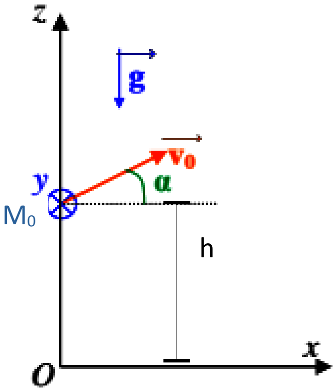
vecteur-vitesse $\vec{v} = \dot{r}\, u_r + r\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + r\sin\theta\,\dot{\phi}\,\vec{u}_\phi$

Vecteur déplacement élémentaire

$$d\vec{OM} = dr\,\vec{u}_r + r\,d\theta\,\vec{u}_\theta + r\sin(\theta)\,d\varphi\,\vec{u}_\varphi$$

II Étude de Mouvements simples

II.1 Mouvement de vecteur-accélération constant



On étudie le mouvement d'un balle de masse m, assimilée à son centre de masse M, en chute libre, lancée avec une vitesse initiale v_0 à une hauteur (ou côte) h de l'origine O du repère.

Système : référentiel : Terrestre, supposé galiléen (abrégé TSG)

Bilan des forces

a) Application de la 2ème loi de Newton au système

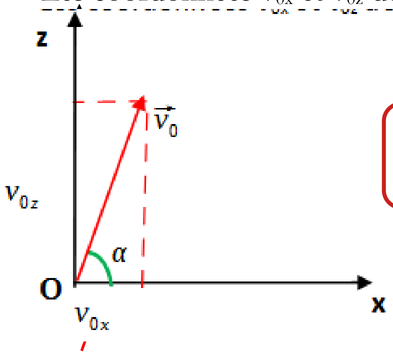
$\vec{g}$ est dirigé dans le sens opposé à l'axe Oz

b) Vecteur vitesse :

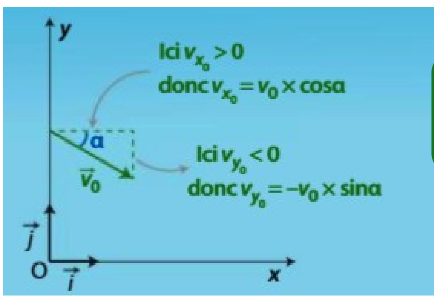
les composantes du vecteur vitesse instantané sont les primitives par rapport au temps des composantes du vecteur accélération instantanées

Soit un vecteur $\vec{v}_0$ de norme v_0 qui forme un angle α avec l'axe Ox.

Les coordonnées v_{0x} et v_{0z} de ce vecteur selon les axes Ox et Oz sont données par :



Attention au sens du vecteur !



Utilisation de la condition initiale sur la vitesse

À l 'instant t=0

finalement

c) Détermination des coordonnées (lois horaires du mouvement) :

On primitive le vecteur position

en utilisant les contions initiales

on obtient les trois équations horaires du mouvement

Rmq : y=0 à tout instant :

si v_0 = 0 (vitesse initial nulle) alors

d) Détermination de la trajectoire du système.

La trajectoire du système est la courbe représentative des postions successives du système.

Ici, c'est la courbe représentative la fonction d'équation z=f(x)

Rmq: Il ne faut pas confondre **trajectoire z=f(x) et les équations horaires z= f(t) , x = g(t)**

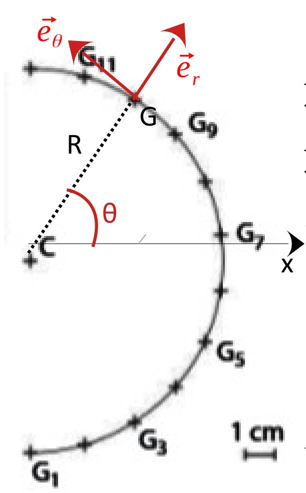
On supprime la variable temps dans le système d'équations horaires :

On réinjecte l'expression de t en fonction de x dans l'expression de z(t) :

Cette équation a pour représentation graphique une parabole, on dit que la trajectoire est parabolique.

II.2 Mouvement circulaire

a) mouvement circulaire uniforme



Circulaire →

Uniforme →

<u>Vecteur position :</u>

<u>Vecteur vitesse :</u>

Comme la vitesse est constante

Vocabulaire : comme $\vec{v}$ est orthogonal au rayon R, on dit que e vecteur vitesse est