

TD07- NOTIONS DE CINÉMATIQUE

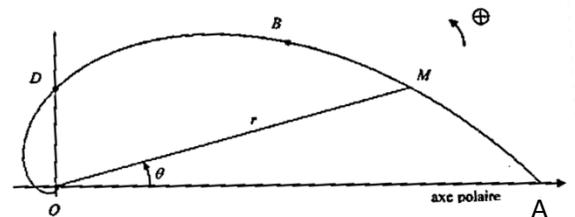
Exercice 1 : Questions de cours (à savoir faire sans le cours sous les yeux)

- 1 Donner la définition d'un solide.
- 2 Etablir l'expression de \vec{OM} , \vec{v} et \vec{a} en coordonnées polaires.
- 3 Etablir l'expression de \vec{OM} , \vec{v} et \vec{a} en coordonnées cartésiennes (3D).
- 4 Etablir l'expression de \vec{OM} , \vec{v} et \vec{a} en coordonnées cylindriques.
- 5 Exprimer (sans démonstration) le déplacement élémentaire $d\vec{OM}$ en coordonnées cartésiennes et en coordonnées cylindriques.
- 6 On lâche une balle avec une vitesse initiale \vec{v}_0 . On assimile la balle à un point matériel M. On néglige les frottements devant les autres forces.
 - a Exprimer \vec{a} , \vec{v} et \vec{OM} en fonction du temps.
 - b Donner les 3 équations horaires du mouvement.
 - c Quelle est la nature du mouvement pour $\vec{v}_0 = \vec{0}$ ou \vec{v}_0 colinéaire à \vec{g} ?
 - d Donner l'équation de la trajectoire $z(x)$ en coordonnées cartésiennes.
 - e Quelle est la nature du mouvement dans le cas général ?
- 7 On considère que la Terre tourne autour du Soleil selon un mouvement circulaire (distance Terre-Soleil = $R = \text{constante}$) et uniforme ($\|\vec{v}\| = v_0$).
 - a Montrer que \vec{v} est orthoradial, et exprimer v_0 en fonction de $\dot{\theta}$ et R .
 - b Etablir l'expression de \vec{a} en fonction de $\dot{\theta}$ et R , puis en fonction de v_0 et R . Commenter.
- 8 En fait, le mouvement de la Terre autour du Soleil n'est pas uniforme. Etablir l'expression de \vec{a} dans ce cas. Commenter.
- 9 De manière générale, un mouvement uniforme est-il caractérisé par une accélération nulle ? Pourquoi ?
- 10 De manière générale, on peut décomposer l'accélération en un point M en une accélération \vec{a}_{\parallel} colinéaire à la vitesse et une accélération \vec{a}_{\perp} perpendiculaire à celle-ci.
 - a A quoi est liée la composante \vec{a}_{\perp} ?
 - b A quoi est liée la composante \vec{a}_{\parallel} ?
- 11 Cinématique du solide : donner un exemple de translation rectiligne et un exemple de translation circulaire.
- 12 On considère un solide en rotation autour d'un axe fixe à la vitesse angulaire ω .
 - a Décrire la trajectoire d'un point quelconque du solide.
 - b Exprimer la vitesse d'un point quelconque du solide en fonction de sa distance à l'axe et de ω .

Exercice 2 : spirale logarithmique 1 ★ ★ ★

On repère la position d'un point M se déplaçant dans un plan par ses coordonnées polaires r et θ , de pôle O. L'allure de la trajectoire, pour θ variant de 0 à 2π est représentée ci-contre.

M décrit une spirale logarithmique d'équation $r = a e^{-\theta}$ dans le sens des θ croissants, avec a une constante positive.



- 1 Dans un premier temps, la loi horaire est $\theta = \omega t$, avec ω constante positive appelée vitesse angulaire.
 - a Dessiner au point M les vecteurs de la base locale ($\vec{e}_r, \vec{e}_\theta$)
 - b Exprimer dans cette base locale les vecteurs \vec{v} et \vec{a} du point matériel en fonction de a et ω .
 - c Exprimer la norme du vecteur vitesse. Le mouvement est-il uniforme ?
 - d Donner les composantes de $\vec{v}(A)$ et de $\vec{a}(A)$.
- 2 * Dans un deuxième temps, on considère que le mouvement est uniforme de vitesse v_0 . Trouver la loi horaire vérifiée par θ en prenant $\theta=0$ pour $t=0$.

Exercice 3 : course automobile ★ ★ ★

Deux pilotes prennent le départ d'une course automobile sur un circuit présentant une longue ligne droite au départ. Ils s'élancent de la même ligne. Le premier, A, démarre avec une accélération constante de 4 m.s^{-2} . Le deuxième, B, a une voiture légèrement plus puissante et démarre avec une accélération constante de 5 m.s^{-2} . A a cependant plus de réflexes que B et démarre une seconde avant.

- 1- À partir de quelle longueur de piste L_{\min} les réflexes de A ne suffisent pas à gagner la course ?

Exercice 4: Ascenseur. ● ★

Un homme de 80 kg monte dans un ascenseur équipé d'un pèse-personne. L'ascenseur monte, à la vitesse constante de 2 m/s, du rez-de-chaussée au 20ème étage. Quelle masse le pèse-personne va-t-il indiquer ?

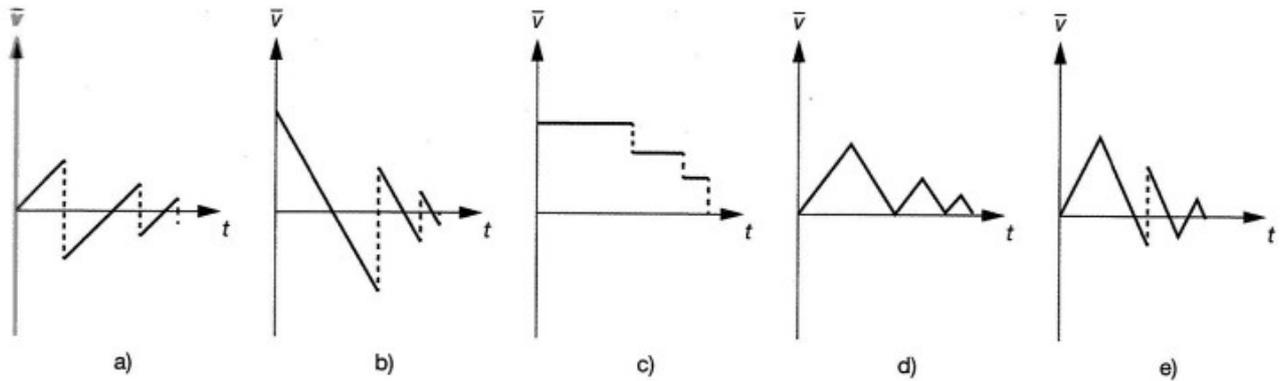
Exercice 5 : trajectoire et composante de la vitesse ●

Un footballeur shoote dans un ballon de telle manière que celui-ci suive la trajectoire ci-contre dans le plan vertical :



1- Ce mouvement est-il rectiligne ?

2- On définit la composante verticale du vecteur vitesse par $v_z = \vec{v} \cdot \vec{u}_z$ Quelle courbe correspond le mieux à l'évolution de v_z au cours du temps ? Commenter l'allure générale de cette évolution



Exercice 6 : Mouvement hélicoïdal ● ●

Un point matériel se déplace le long d'une hélice circulaire. Son mouvement est donné en coordonnées cylindriques par :

$$r = R \quad \theta = \omega t \quad z = ht \quad \text{où } R, h \text{ et } \omega \text{ sont des constantes.}$$

- 1 Donner l'expression du vecteur-vitesse.
- 2 En déduire que le module de la vitesse est constant.
- 3 Donner l'expression du vecteur-accélération. Commenter.

Exercice 7 : Projections (très très très important, à maîtriser) ● ★ ★ ★ ★

Dans chacune des figures ci-dessous, déterminer en fonction des angles θ et α , la décomposition de :

- a \vec{e}_r et \vec{e}_θ sur \vec{e}_x et \vec{e}_y .
- b \vec{e}_x et \vec{e}_y sur \vec{e}_r et \vec{e}_θ .
- b \vec{R} et \vec{P} sur \vec{e}_x et \vec{e}_y .
- d \vec{R} et \vec{P} sur \vec{e}_r et \vec{e}_θ .

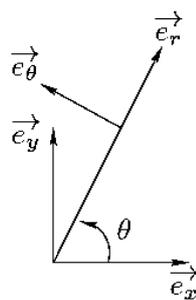


Figure 1

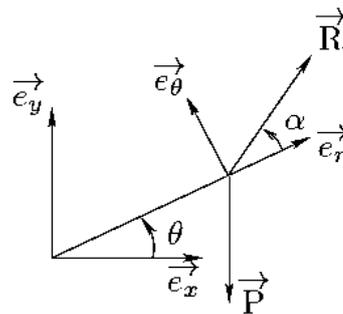


Figure 2

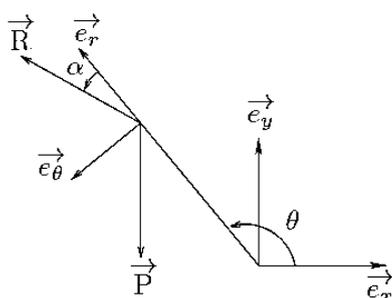


Figure 3

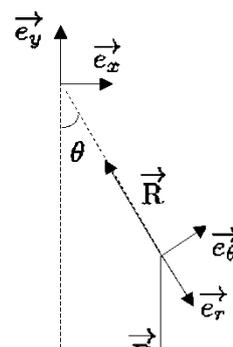
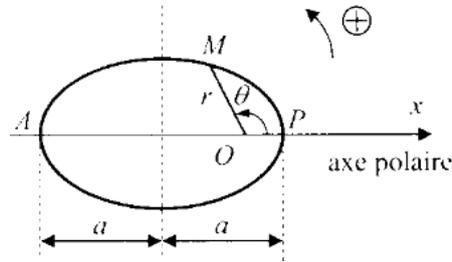


Figure 4

Exercice 8 : Mouvement d'un satellite terrestre      

Un satellite artificiel assimilé à un point matériel M, est en orbite autour de la Terre. Il décrit, dans le référentiel terrestre de centre O, une trajectoire plane. Il est repéré par ses coordonnées polaires r et θ . Sa trajectoire est une ellipse d'équation : $r = \frac{p}{1+e\cos(\theta)}$ où p et e sont deux constantes positives caractéristiques de la trajectoire. p est appelé le paramètre et e l'excentricité. La trajectoire est décrite dans le sens des θ croissants.



- Déterminer les expressions littérales de p et e en fonction de r_P et r_A (cf figure). P est le point de l'ellipse le plus près du point O et A le point le plus éloigné. Faire les applications numériques pour $a=16.10^3\text{km}$ et $OP=8,0.10^3\text{km}$.
- Etablir l'expression générale du vecteur-vitesse en coordonnées polaires.
- En déduire l'expression générale du vecteur-accélération en coordonnées polaires.
- Pour le mouvement étudié, l'accélération est radiale. En déduire que la quantité $r^2\dot{\theta}$ reste constante au cours du mouvement. On la note C.
- Exprimer les vitesses en P et A et montrer qu'elles sont orthoradiales. En déduire l'expression de C en fonction de r_P et v_P , norme du vecteur-vitesse en P. En déduire la valeur numérique de C. On donne $v_P=8,6\text{km.s}^{-1}$.
- Calculer v_A . Le mouvement est-il uniforme ?

Exercice 9 (type résolution de problème) : à ne pas reproduire chez vous !!    

- Estimer (en g) l'accélération max que peut subir une personne sur le tourniquet si la vitesse maximale de la mobylette est de 50 km/h .
- Mieux vaut-il se rapprocher du centre ou de l'extérieur pour subir l'accélération la plus faible ?

