

PROGRAMME DE COLLES N° 7

Semaine du 12/11/2024 au 15/11/2024

👉 *Calculs algébriques, applications* 👈

Format de la colle :

- Automatismes de calcul (env. 10 min) : quelques items simples parmi les thèmes de la liste (actualisée chaque semaine) en page 2.
- Restitution du cours (env. 15 min) : définition et/ou théorème des chapitres au programme, puis démonstrations, exemples ou exercices exigibles listés plus bas.
- Exercice(s) libre(s) (env 30 min).

— Chapitre 5 : Calculs algébriques —

Révisions du programme précédent.

— Chapitre 6 : Applications —

- **Sans image réciproque cette semaine.**
- NB : le programme officiel ne différencie pas fonction et application.

1 Applications, restriction, prolongement

- 1.1 Généralités : une application est un triplet, image, antécédent, notations, diagramme associé
- 1.2 Famille indexée par un ensemble
- 1.3 Restriction, prolongement
- 1.4 Opérations algébriques dans $\mathcal{F}(E, \mathbb{K})$
- 1.5 Fonction identité et composition d'applications
- 1.6 Fonction indicatrice d'un ensemble

2 Injection, surjection, bijection

- 2.1 Injectivité, cas des fonctions réelles strictement monotones, composition d'injections
- 2.2 Surjectivité, composition de surjections
- 2.3 Bijectivité : bijection, fonction réciproque, lien avec l'inversibilité à droite et à gauche

3 Image directe, image réciproque

- 3.1 Image directe, opérations

Démonstrations, exemples ou exercices exigibles comme questions de cours

- Chapitre 5. Calculs de $\sum_{1 \leq i, j \leq n} (i + j)$, $\prod_{1 \leq i, j \leq n} ij$, $\sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{i}{j}$.
- Chapitre 5. Preuve de la formule du binôme.
- Chapitre 6. Propositions 5 et 6. La composée de deux injections est une injection, la composée de deux surjections est une surjection et les réciproques partielles.
- Chapitre 6. Proposition 7 : $f : E \rightarrow F$ est bijective si et seulement si elle admet un même inverse à droite et à gauche, qui se trouve être f^{-1} .

Automatismes de calcul

On donne quelques exemples de capacité attendue pour chaque thème.

[Le cahier de calcul](#) fournit également une excellente source d'entraînement/inspiration.

- **Logique, raisonnement**

Exemples : montrer que $x^2 + y^2 \geq 2xy$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, savoir écrire en langage symbolique qu'une suite est majorée, qu'une fonction est 2π -périodique et savoir nier ces assertions.

- **Trigonométrie.**

Exemples : formule $\cos(2a)$, résolution de $\sin a = \sin b$, $\cos(2x + 1) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos x = \sin x$.

- **Inégalités : résoudre/prouver des inégalités simples**

Exemples : résoudre $|x| \leq 3x + 2$, montrer que $|\sin(nx)| \leq n |\sin x|$ pour tous $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$, encadrer rapidement $x \mapsto \frac{\cos x + 2}{x^2 + 4}$ sur $[0; 1]$.

- **Calcul élémentaire de nombres complexes** (module, argument, linéarisation, angle moitié, racines carrées, n -ièmes).

Exemples : calculer la forme exponentielle de $\sqrt{3} - 3i$, les racines carrées de $3 - 4i$, linéarisation de $\cos^3 x$, résolution de $z^n = 1$ dans \mathbb{C} .

- **Calcul algébrique** (fractions, simplification d'expressions, sommes et produits usuels, coefficients binomiaux, formule du binôme, etc).

Exemples : donner la formule pour $\sum_{k=1}^n q^k$, calculer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k$.