TD07 – NOTIONS DE CINÉMATIQUE

Correction

Exercice 1 : Questions de cours (à savoir faire sans le cours sous les yeux)

1 Donner la définition d'un solide.

2 Établir l'expression de $\overrightarrow{OM}$, $\vec{v}$ et $\vec{a}$ en coordonnées polaires.

3 Établir l'expression de $\overrightarrow{OM}$, $\vec{v}$ et $\vec{a}$ en coordonnées cartésiennes (3D).

4 Établir l'expression de $\overrightarrow{OM}$, $\vec{v}$ et $\vec{a}$ en coordonnées cylindriques.

5 Exprimer (sans démonstration) le déplacement élémentaire $\mathrm{d}\overrightarrow{OM}$ en coordonnées cartésiennes et en coordonnées cylindriques.

6 On lâche une balle avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$. On assimile la balle à un point matériel M. On néglige les frottements devant les autres forces.

a Exprimer $\vec{a}$, $\vec{v}$ et $\overrightarrow{OM}$ en fonction du temps.
b Donner les 3 équations horaires du mouvement.
c Quelle est la nature du mouvement pour $\vec{v}_0 = \vec{0}$ ou $\vec{v}_0$ colinéaire à $\vec{g}$?
d Donner l'équation de la trajectoire $z(x)$ en coordonnées cartésiennes.
e Quelle est la nature du mouvement dans le cas général ?

7 On considère que la Terre tourne autour du Soleil selon un mouvement circulaire (distance Terre-Soleil R constante) et uniforme ($\|\vec{v}\| = v_0$).

a Montrer que $\vec{v}$ est orthoradial, et exprimer v_0 en fonction de $\dot{\theta}$ et R.
b Établir l'expression de $\vec{a}$ en fonction de $\dot{\theta}$ et R, puis en fonction de v_0 et R. Commenter.

8 En fait, le mouvement de la Terre autour du Soleil n'est pas uniforme. Établir l'expression de $\vec{a}$ dans ce cas. Commenter.

9 De manière générale, un mouvement uniforme est-il caractérisé par une accélération nulle ? Pourquoi ?

10 De manière générale, on peut décomposer l'accélération en un point M en une accélération $\vec{a}_{\parallel} = \vec{a}_T$ colinéaire à la vitesse (accélération tangentielle du cours) et une accélération $\vec{a}_{\perp} = \vec{a}_N$ perpendiculaire à celle-ci (accélération normale).

a À quoi est liée la composante $\vec{a}_{\perp} = \vec{a}_N$?
b À quoi est liée la composante $\vec{a}_{\parallel} = \vec{a}_T$?

11 Cinématique du solide : donner un exemple de translation rectiligne et un exemple de translation circulaire.

12 On considère un solide en rotation autour d'un axe fixe à la vitesse angulaire ω.

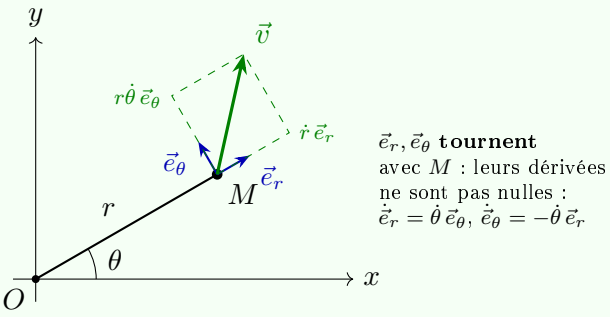
a Décrire la trajectoire d'un point quelconque du solide.
b Exprimer la vitesse d'un point quelconque du solide en fonction de sa distance à l'axe et de ω.

Correction

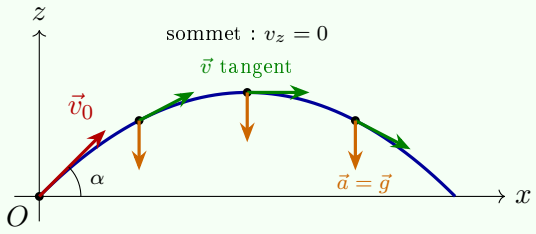
1. Un solide est un système indéformable : la distance entre deux points quelconques du solide reste constante au cours du temps.

2. $\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e}_r$, avec $\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$ et $\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_\theta}{\mathrm{d}t} = -\dot{\theta}\,\vec{e}_r$:

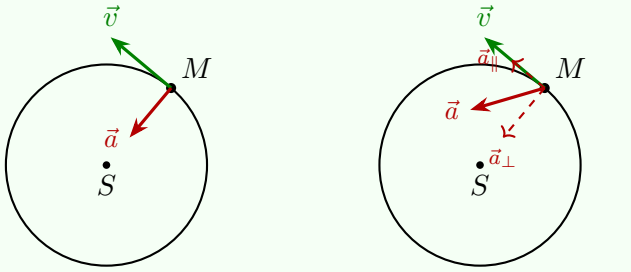
$$\boxed{\vec{v} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta \qquad \vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\,\vec{e}_\theta} \;\heartsuit$$



3. Les vecteurs de base sont fixes : $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z$, $\vec{v} = \dot x\,\vec{e}_x + \dot y\,\vec{e}_y + \dot z\,\vec{e}_z$, $\vec{a} = \ddot x\,\vec{e}_x + \ddot y\,\vec{e}_y + \ddot z\,\vec{e}_z$.
4. $\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e}_r + z\,\vec{e}_z$; $\vec{v} = \dot r\,\vec{e}_r + r\dot\theta\,\vec{e}_\theta + \dot z\,\vec{e}_z$; $\vec{a} = (\ddot r - r\dot\theta^2)\,\vec{e}_r + (2\dot r\dot\theta + r\ddot\theta)\,\vec{e}_\theta + \ddot z\,\vec{e}_z$.
5. $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}x\,\vec{e}_x + \mathrm{d}y\,\vec{e}_y + \mathrm{d}z\,\vec{e}_z$ et $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\,\vec{e}_r + r\,\mathrm{d}\theta\,\vec{e}_\theta + \mathrm{d}z\,\vec{e}_z$.
6.a Seul le poids agit : $\vec{a} = \vec{g}$. En intégrant : $\vec{v} = \vec{g}\,t + \vec{v}_0$, puis $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\vec{g}\,t^2 + \vec{v}_0 t + \overrightarrow{OM_0}$.
6.b Avec $\vec{g} = -g\,\vec{e}_z$, $\vec{v}_0 = v_0\cos\alpha\,\vec{e}_x + v_0\sin\alpha\,\vec{e}_z$ et $M_0 = O$: $x(t) = v_0\cos\alpha\,t$, $y(t) = 0$, $z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0\sin\alpha\,t$.
6.c Mouvement **rectiligne uniformément accéléré** (selon la verticale).
6.d $t = \dfrac{x}{v_0\cos\alpha}$, donc $z(x) = -\dfrac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}\,x^2 + x\tan\alpha$.
6.e Trajectoire **parabolique**, mouvement uniformément accéléré ($\vec{a} = \vec{g}$ constant).



7.a $r = R$ constant donc $\dot r = 0$: $\vec{v} = R\dot\theta\,\vec{e}_\theta$ est orthoradial, et $v_0 = R|\dot\theta|$.
7.b $\dot\theta$ constant : $\vec{a} = -R\dot\theta^2\,\vec{e}_r = -\dfrac{v_0^2}{R}\,\vec{e}_r$: l'accélération est **centripète** (dirigée vers le Soleil) et non nulle bien que le mouvement soit uniforme.
8. $\vec{a} = -R\dot\theta^2\,\vec{e}_r + R\ddot\theta\,\vec{e}_\theta$: une composante orthoradiale (tangentielle) apparaît, liée à la variation de la norme de la vitesse.



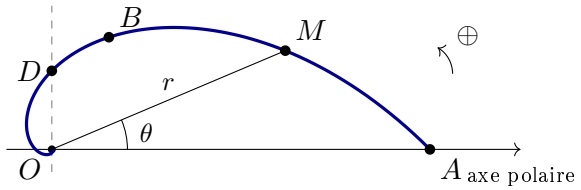
9. Non : un mouvement uniforme a une vitesse de *norme* constante, mais sa direction peut changer (cf. 7.b), ce qui donne une accélération non nulle.
10. a. $\vec{a}_\perp = \vec{a}_N$ est liée au changement de **direction** de la vitesse (courbure de la trajectoire). b. $\vec{a}_\parallel = \vec{a}_T = \dfrac{\mathrm{d}\|\vec{v}\|}{\mathrm{d}t}\,\dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ est liée à la variation de la **norme** de la vitesse.

11. Translation rectiligne : la cabine d'un ascenseur, un tiroir. Translation circulaire : une nacelle de grande roue, la pédale d'un vélo qui reste horizontale.
12. a. Chaque point décrit un cercle centré sur l'axe, dans un plan perpendiculaire à l'axe. b. $\vec{v} = r\omega\,\vec{e}_\theta$, soit $\|\vec{v}\| = r\,|\omega|$ où r est la distance à l'axe.

Exercice 2 : Spirale logarithmique

Niveau : ●● ★

On repère la position d'un point M se déplaçant dans un plan par ses coordonnées polaires r et θ, de pôle O. L'allure de la trajectoire, pour θ variant de 0 à 2π, est représentée ci-contre.



M décrit une spirale logarithmique d'équation $r = a\,e^{-\theta}$ dans le sens des θ croissants, avec a une constante positive.

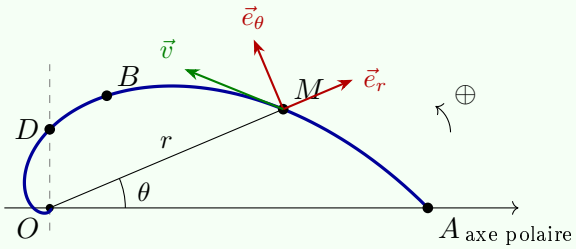
1 Dans un premier temps, la loi horaire est $\theta = \omega t$, avec ω constante positive appelée vitesse angulaire.

a Dessiner au point M les vecteurs de la base locale $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$.
b Exprimer dans cette base locale les vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{a}$ du point matériel en fonction de a et ω.
c Exprimer la norme du vecteur vitesse. Le mouvement est-il uniforme ?
d Donner les composantes de $\vec{v}(A)$ et de $\vec{a}(A)$.

2* Dans un deuxième temps, on considère que le mouvement est uniforme de vitesse v_0. Trouver la loi horaire vérifiée par θ en prenant $\theta = 0$ pour $t = 0$.

Correction

1.a



1.b $\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\,\vec{e}_r) = \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\vec{e}_r + r(t)\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t}$ avec $\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$ et $\dot{\theta} = \dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \omega$:

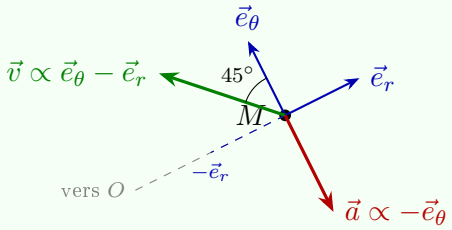
$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(a\,e^{-\omega t}\right)\vec{e}_r + a\,e^{-\omega t}\,\omega\,\vec{e}_\theta = -a\omega\,e^{-\omega t}\,\vec{e}_r + a\omega\,e^{-\omega t}\,\vec{e}_\theta$$

$$\boxed{\vec{v} = a\omega\,e^{-\omega t}\,(\vec{e}_\theta - \vec{e}_r)}$$ ♥

$\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[a\omega\,e^{-\omega t}(\vec{e}_\theta - \vec{e}_r)\right] = a\omega(-\omega)\,e^{-\omega t}(\vec{e}_\theta - \vec{e}_r) + a\omega\,e^{-\omega t}\left(-\dot{\theta}\,\vec{e}_r - \dot{\theta}\,\vec{e}_\theta\right)$
$\vec{a} = -a\omega^2 e^{-\omega t}(\vec{e}_\theta - \vec{e}_r) - a\omega^2 e^{-\omega t}(\vec{e}_r + \vec{e}_\theta)$, soit

$$\boxed{\vec{a} = -2a\omega^2\,e^{-\omega t}\,\vec{e}_\theta}$$ ♥

Représentation au point M : $\vec{v}$ est porté par $\vec{e}_\theta - \vec{e}_r$, il fait un angle de 45° avec $\vec{e}_\theta$ (et 135° avec $\vec{e}_r$, vers l'intérieur de la spirale) ; $\vec{a}$ est porté par $-\vec{e}_\theta$: il n'a pas de composante radiale.



1.c $\|\vec{v}\| = |a\omega\, e^{-\omega t}|\, \|\vec{e}_\theta - \vec{e}_r\| = a\omega\, e^{-\omega t}\sqrt{1^2+1^2}$:

$$\boxed{\|\vec{v}\| = a\sqrt{2}\,\omega\, e^{-\omega t}} \heartsuit$$

La norme dépend du temps : le mouvement n'est **pas uniforme** (il ralentit en s'enroulant).
1.d En A, $\theta = 0$ donc $r = a\,e^0 = a$ et $t = 0$:

$$\vec{v}(A) = \vec{v}(t=0) = \underbrace{a\omega}_{v_\theta}\vec{e}_\theta \underbrace{-a\omega}_{v_r}\vec{e}_r \qquad \vec{a}(A) = \vec{a}(t=0) = -2a\omega^2\,\vec{e}_\theta$$

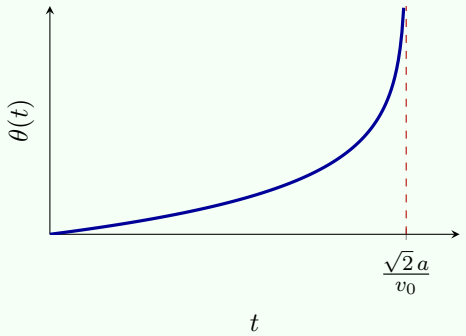
$$\boxed{v_r = -a\omega,\ v_\theta = a\omega \qquad a_r = 0,\ a_\theta = -2a\omega^2} \heartsuit$$

2. On reprend le calcul avec $\theta(t)$ quelconque : $\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(a\,e^{-\theta(t)}\right)\vec{e}_r + a\,e^{-\theta(t)}\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t} = -a\dot{\theta}\,e^{-\theta}\,\vec{e}_r + a\dot{\theta}\,e^{-\theta}\,\vec{e}_\theta$.
Si $\|\vec{v}\|$ est indépendant du temps : $\|\vec{v}\| = \sqrt{(a\dot{\theta}e^{-\theta})^2 + (a\dot{\theta}e^{-\theta})^2} = v_0$, soit $v_0 = \sqrt{2}\,a\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\,e^{-\theta}$.
On sépare les variables (comme en cinétique chimique) : $\dfrac{v_0}{\sqrt{2}\,a}\mathrm{d}t = e^{-\theta}\mathrm{d}\theta$, puis on intègre ($u$ et x sont des variables « muettes ») :

$$\int_0^t \frac{v_0}{\sqrt{2}\,a}\mathrm{d}u = \int_0^\theta e^{-x}\mathrm{d}x \iff \frac{v_0}{\sqrt{2}\,a}\,t = \Big[-e^{-x}\Big]_0^\theta = 1 - e^{-\theta} \iff e^{-\theta} = 1 - \frac{v_0 t}{\sqrt{2}\,a}$$

$$\boxed{\theta(t) = -\ln\left(1 - \frac{v_0\,t}{\sqrt{2}\,a}\right)} \heartsuit$$

Remarque : $\theta \to +\infty$ quand $t \to \dfrac{\sqrt{2}\,a}{v_0}$: le point atteint O en une durée finie après une infinité de tours (la longueur de la spirale depuis A vaut $\sqrt{2}\,a$).



Exercice 3 : Usain Bolt accélère-t-il plus fort que la gravité ?

Niveau : ●● ★★★

Lors de la finale du 100 m des championnats du monde de Berlin (2009), Usain Bolt a établi le record du monde en 9,58 s. Les temps de passage tous les 10 m (mesurés depuis le coup de pistolet) étaient les suivants :

x (m)	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
t (s)	1,89	2,88	3,78	4,64	5,47	6,29	7,10	7,92	8,75	9,58

Son temps de réaction (entre le coup de pistolet et le départ effectif) était de 0,15 s. Dans la suite, on prend l'origine des temps au départ effectif.

1. Calculer la vitesse moyenne de Bolt sur chaque tronçon de 10 m. Quelle est sa vitesse maximale (en km/h) ? Est-elle atteinte à la fin de la course ?

2. On modélise la vitesse du sprinteur par $v(t) = v_{max}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$. Que représentent v_{max} et τ ? Tracer l'allure de $v(t)$.

3. Exprimer l'accélération $a(t)$, puis la position $x(t)$ (avec $x(0) = 0$).

4. Montrer que, pour $t \gg \tau$, $x(t) \simeq v_{max}\,(t - \tau)$. En utilisant les passages à 50 m et 90 m, en déduire v_{max} puis τ.

5. Calculer l'accélération de Bolt au départ. Commenter le titre de l'exercice.

6. Comme pour la charge d'un condensateur, au bout de quelle durée peut-on considérer que Bolt a atteint sa vitesse maximale ? À quelle distance du départ se trouve-t-il alors ? Comparer au tableau de la question 1.

Correction

1. $\bar{v}_i = \dfrac{10\,\text{m}}{t_i - t_{i-1}}$ (avec $t_0 = 0{,}15\,\text{s}$ pour le premier tronçon) :

tronçon (m)	0-10	10-20	20-30	30-40	40-50	50-60	60-70	70-80	80-90	90-100
$\bar{v}$ (m/s)	5,7	10,1	11,1	11,6	12,0	12,2	12,3	12,2	12,0	12,0

Vitesse maximale : $\approx 12{,}3\,\text{m/s} \approx 44\,\text{km/h}$ entre 60 et 70 m. Elle n'est pas atteinte à la fin : Bolt ralentit légèrement sur les 30 derniers mètres (fatigue).

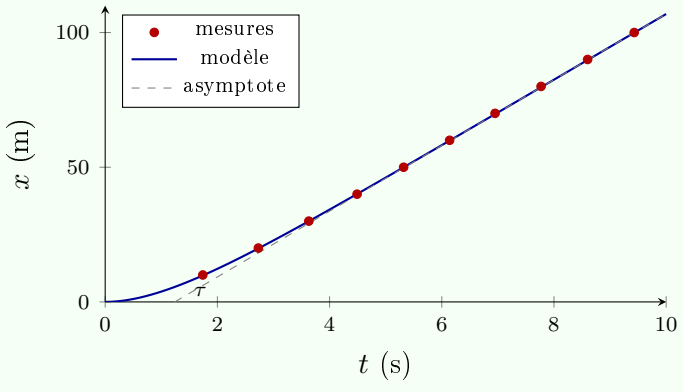
2. v_{max} est la vitesse limite (atteinte quand $t \to \infty$) ; τ est le temps caractéristique de mise en vitesse (à $t = \tau$, $v = 0{,}63\,v_{max}$; à $t = 5\tau$, $v \simeq v_{max}$). L'allure est la même que la charge d'un condensateur.

3. $a(t) = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \dfrac{v_{max}}{\tau}\,e^{-t/\tau}$. On primitive $v(t)$ avec $x(0) = 0$:

$$\boxed{x(t) = v_{max}\left[t - \tau\left(1 - e^{-t/\tau}\right)\right]} \;\heartsuit$$

4. Pour $t \gg \tau$, $e^{-t/\tau} \to 0$ et $x(t) \simeq v_{max}(t - \tau)$: c'est une droite de pente v_{max} qui coupe l'axe des temps en $t = \tau$ (tout se passe comme si Bolt partait avec un retard τ mais directement à v_{max}).

Avec $t_{50} = 5{,}47 - 0{,}15 = 5{,}32\,\text{s}$ et $t_{90} = 8{,}75 - 0{,}15 = 8{,}60\,\text{s}$: $v_{max} = \dfrac{90 - 50}{8{,}60 - 5{,}32} \approx 12{,}2\,\text{m/s}$, puis $50 = v_{max}(t_{50} - \tau)$ donne $\tau = 5{,}32 - \dfrac{50}{12{,}2} \approx 1{,}2\,\text{s}$.



5. $a(0) = \dfrac{v_{max}}{\tau} = \dfrac{12{,}2}{1{,}24} \approx 9{,}8\,\mathrm{m\,s^{-2}} \approx g$! Au départ, Bolt accélère horizontalement autant qu'un objet en chute libre accélère verticalement. (Un modèle ajusté sur tous les points donne $v_{max} = 12{,}2\,\mathrm{m/s}$ et $\tau = 1{,}24\,\mathrm{s}$.)
6. Comme pour un circuit RC, le régime permanent est atteint au bout d'environ 5τ : à $t = 5\tau$, $v = v_{max}(1 - e^{-5}) \approx 0{,}99\,v_{max}$.

$$\boxed{t_{lim} \approx 5\tau \approx 6{,}2\,\mathrm{s}} \heartsuit$$

$x(5\tau) = v_{max}\left[5\tau - \tau(1 - e^{-5})\right] \approx 4{,}0\,v_{max}\tau \approx 4{,}0 \times 12{,}2 \times 1{,}24 \approx 61\,\mathrm{m}$. C'est cohérent avec le tableau : la vitesse moyenne n'augmente plus après 50–60 m (elle plafonne à 12,2–12,3 m/s).

Circuit RC (charge)	**Sprint de Bolt**
$u_C(t) = E(1 - e^{-t/\tau})$	$v(t) = v_{max}(1 - e^{-t/\tau})$
E	v_{max}
$\tau = RC$	$\tau \approx 1{,}2\,\mathrm{s}$
$q = \int i\,\mathrm{d}t$	$x = \int v\,\mathrm{d}t$
régime permanent après $\approx 5\tau$	vitesse maximale après $\approx 5\tau$

Exercice 4 : Le lancer de marteau

Niveau : ●●● ★★★

Le record du monde du lancer de marteau masculin est de $D = 86{,}74\,\mathrm{m}$ (Iouri Sedykh, 1986). Le marteau est une boule de masse $m = 7{,}26\,\mathrm{kg}$ reliée à une poignée par un câble. L'athlète fait tourner le marteau sur un cercle de rayon $r \approx 1{,}8\,\mathrm{m}$ (câble + bras) avant de le lâcher.

1. **Phase de vol.** On néglige les frottements de l'air et la hauteur de lâcher. Le marteau est lâché avec une vitesse v_0 faisant un angle α avec l'horizontale. Établir l'expression de la portée : $D = \dfrac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}$. Pour quel angle est-elle maximale ?
2. En supposant $\alpha = 45°$, calculer la vitesse de lâcher v_0 pour le record.
3. **Phase de rotation.** Juste avant le lâcher, le mouvement du marteau est assimilé à un mouvement circulaire uniforme. Calculer sa vitesse angulaire (en tours par seconde), son accélération (en g), puis la force que doit exercer le câble (on négligera le poids). Commenter.
4. **Bonus (Python).** En réalité, le marteau est lâché à environ 1,5 m du sol avec $\alpha \approx 40°$. Écrire un programme qui trace la trajectoire et cherche numériquement la valeur de v_0 donnant $D = 86{,}74\,\mathrm{m}$.

Correction

1. Équations horaires (cours) : $x = v_0 \cos\alpha\, t$, $z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin\alpha\, t$. Le marteau retombe ($z = 0$, $t \neq 0$) à $t_s = \dfrac{2v_0 \sin\alpha}{g}$: $D = x(t_s) = \dfrac{2v_0^2 \sin\alpha \cos\alpha}{g}$:

$$\boxed{D = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}} \heartsuit$$

maximale pour $\sin 2\alpha = 1$, soit $\alpha = 45°$.
2. $v_0 = \sqrt{gD} = \sqrt{9{,}81 \times 86{,}74} \approx 29\,\mathrm{m/s} \approx 105\,\mathrm{km/h}$.
3. $\omega = \dfrac{v_0}{r} = \dfrac{29{,}2}{1{,}8} \approx 16\,\mathrm{rad/s} \approx 2{,}6$ tours par seconde.

$$\boxed{a = \frac{v_0^2}{r} \approx 470\,\mathrm{m\,s^{-2}} \approx 48\,g} \heartsuit$$

Force exercée par le câble (vers le centre) : $F = ma \approx 7{,}26 \times 470 \approx 3{,}4 \times 10^3$ N, l'équivalent du poids d'une masse de 350 kg ! L'athlète doit se pencher en arrière pour équilibrer cette traction.

4. Exemple de programme (méthode d'Euler) :

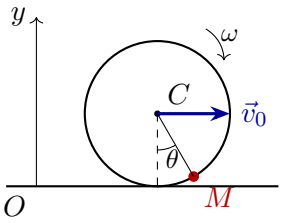
```
import math
g=9.81; h=1.5; a=math.radians(40)
def portee(v0, dt=1e-4):
    x, z, vx, vz = 0, h, v0*math.cos(a), v0*math.sin(a)
    while z >= 0:
        x, z, vz = x+vx*dt, z+vz*dt, vz-g*dt
    return x
v0 = 20
while portee(v0) < 86.74:
    v0 += 0.01
print(v0)      # environ 29,1 m/s
```

On trouve $v_0 \approx 29{,}1$ m/s, très proche de l'estimation simple.

Exercice 5 : La valve du vélo

Niveau : ●●● ★★★

Une roue de vélo de rayon $R = 35$ cm roule sans glisser sur une route horizontale ; son centre C avance à la vitesse constante $v_0 = 18$ km/h. On étudie le mouvement de la valve M, située sur la jante (à la distance R de C), dans le référentiel terrestre. À $t = 0$, la valve touche le sol en O.



1. La roue ne glissant pas, la distance parcourue par C est égale à la longueur de jante qui a « touché » le sol. En déduire la relation entre v_0, R et la vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$ de la roue. A.N.

2. Dans le référentiel du vélo (lié à C), quel est le mouvement de M ?

3. Montrer que, dans le référentiel terrestre, $x(t) = R(\omega t - \sin\omega t)$ et $y(t) = R(1 - \cos\omega t)$. Tracer l'allure de la trajectoire (une *cycloïde*).

4. Calculer le vecteur vitesse de M et montrer que sa norme vaut $v = 2v_0 \left|\sin\frac{\omega t}{2}\right|$. Où la valve va-t-elle le plus vite ? Le moins vite ? Expliquer pourquoi, sur une photo d'un vélo qui roule, les rayons du haut de la roue sont flous alors que ceux du bas sont nets.

5. Calculer le vecteur accélération de M. Montrer que sa norme est constante et qu'il est toujours dirigé vers C. A.N.

Correction

1. Pendant que la roue tourne de θ, la longueur de jante en contact est $R\theta$, égale à la distance parcourue par C : $x_C = R\theta$, donc en dérivant :

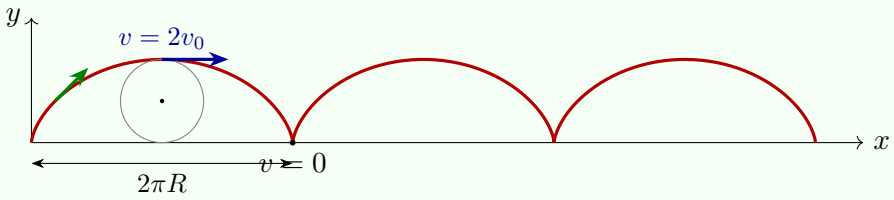
$$\boxed{v_0 = R\,\omega}$$ ♥

A.N. $\omega = \dfrac{5{,}0}{0{,}35} \approx 14$ rad/s (environ 2,3 tours par seconde).

2. Dans le référentiel du vélo, C est fixe et M décrit un cercle de rayon R à la vitesse angulaire ω : mouvement circulaire uniforme, de vitesse $R\omega = v_0$.

3. $\overrightarrow{OC} = v_0 t\,\vec{e}_x + R\,\vec{e}_y = R\omega t\,\vec{e}_x + R\,\vec{e}_y$. Le rayon $\overrightarrow{CM}$ part de $-R\vec{e}_y$ et tourne dans le sens horaire de l'angle ωt : $\overrightarrow{CM} = -R\sin\omega t\,\vec{e}_x - R\cos\omega t\,\vec{e}_y$. Donc

$$\boxed{x(t) = R(\omega t - \sin\omega t) \qquad y(t) = R(1 - \cos\omega t)}$$ ♥



4. $\dot{x} = R\omega(1-\cos\omega t)$, $\dot{y} = R\omega\sin\omega t$. Donc $v^2 = R^2\omega^2\left[(1-\cos\omega t)^2 + \sin^2\omega t\right] = 2R^2\omega^2(1-\cos\omega t) = 4R^2\omega^2\sin^2\dfrac{\omega t}{2}$:

$$\boxed{v = 2v_0\left|\sin\frac{\omega t}{2}\right|} \heartsuit$$

La valve est **immobile** quand elle touche le sol ($\omega t = 0, 2\pi, \dots$) : c'est la condition de non-glissement. Elle va le plus vite en haut de la roue, à $2v_0 = 36\,\text{km/h}$. Sur une photo, les points du haut bougent beaucoup pendant le temps de pose (flou), ceux du bas presque pas (nets).

5. $\ddot{x} = R\omega^2\sin\omega t$, $\ddot{y} = R\omega^2\cos\omega t$: $\vec{a} = R\omega^2(\sin\omega t\,\vec{e}_x + \cos\omega t\,\vec{e}_y) = -\omega^2\overrightarrow{CM}$.

$$\boxed{\|\vec{a}\| = R\omega^2 = \frac{v_0^2}{R}} \heartsuit$$

L'accélération est la même que dans le référentiel du vélo (dirigée vers C) : le référentiel du vélo est en translation rectiligne uniforme par rapport à la route. A.N. $a = \dfrac{5^2}{0{,}35} \approx 71\,\text{m s}^{-2} \approx 7\,g$ (au point de contact aussi, bien que $v = 0$!).

Exercice 6 : Projections (très très très important, à maîtriser)

Niveau : • ★★★★

Dans chacune des figures ci-dessous, déterminer en fonction des angles θ et α, la décomposition de :

a. $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ sur $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$; b. $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$ sur $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$;
c. $\vec{R}$ et $\vec{P}$ sur $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$; d. $\vec{R}$ et $\vec{P}$ sur $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$.

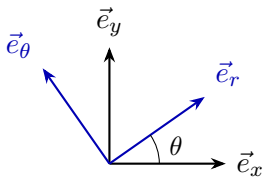


Figure 1

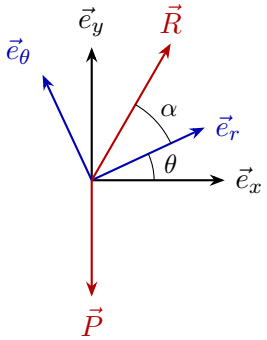


Figure 2

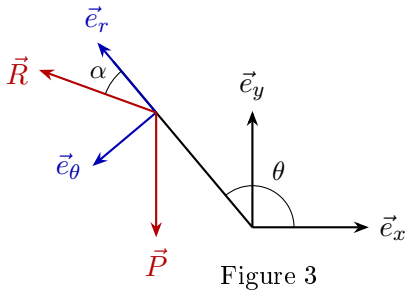


Figure 3

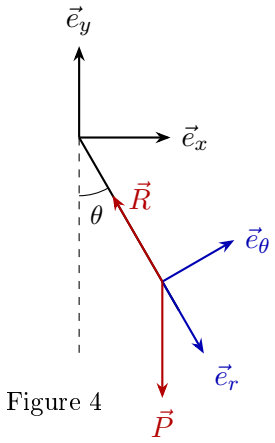


Figure 4

Correction

Figure 1 :

$$\vec{e}_r = \cos\theta\,\vec{e}_x + \sin\theta\,\vec{e}_y \qquad \vec{e}_\theta = -\sin\theta\,\vec{e}_x + \cos\theta\,\vec{e}_y$$

$$\vec{e}_x = \cos\theta\,\vec{e}_r - \sin\theta\,\vec{e}_\theta \qquad \vec{e}_y = \sin\theta\,\vec{e}_r + \cos\theta\,\vec{e}_\theta$$

♥ même chose pour les figures 1, 2 et 3.

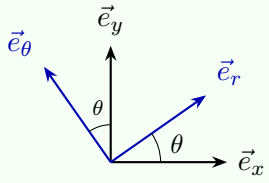


Figure 1

Figure 2 :

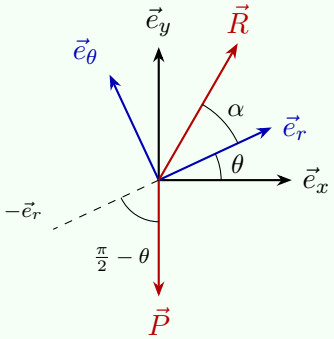


Figure 2

$\vec{R}$ fait l'angle $\alpha+\theta$ avec $\vec{e}_x$ et l'angle α avec $\vec{e}_r$:

$$\vec{R} = R\cos(\alpha+\theta)\,\vec{e}_x + R\sin(\alpha+\theta)\,\vec{e}_y$$

$$\vec{R} = R\cos\alpha\,\vec{e}_r + R\sin\alpha\,\vec{e}_\theta$$

$\vec{P} = -P\,\vec{e}_y$; $\vec{P}$ fait l'angle $\frac{\pi}{2}-\theta$ avec $-\vec{e}_r$ et θ avec $-\vec{e}_\theta$:

$$\vec{P} = -P\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\vec{e}_r - P\cos\theta\,\vec{e}_\theta$$

$$\vec{P} = -P\sin\theta\,\vec{e}_r - P\cos\theta\,\vec{e}_\theta$$

Figure 3 :

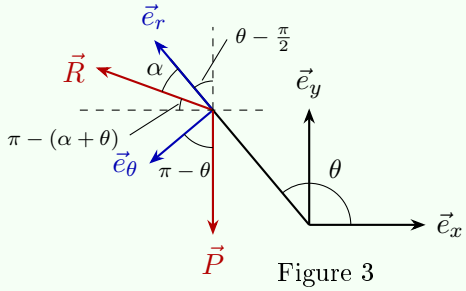


Figure 3

On a toujours $\vec{R} = R\cos\alpha\,\vec{e}_r + R\sin\alpha\,\vec{e}_\theta$.
$\vec{R}$ fait l'angle $\pi-(\alpha+\theta)$ avec $-\vec{e}_x$ et l'angle $\theta-\frac{\pi}{2}+\alpha$ avec $\vec{e}_y$:

$$\vec{R} = -R\cos\left(\pi-(\alpha+\theta)\right)\vec{e}_x + R\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}+\alpha\right)\vec{e}_y$$

$$\vec{R} = R\cos(\alpha+\theta)\,\vec{e}_x + R\sin(\alpha+\theta)\,\vec{e}_y$$

$\vec{P} = -P\,\vec{e}_y$; il fait l'angle $\pi-\theta$ avec $\vec{e}_\theta$ et $\theta-\frac{\pi}{2}$ avec $-\vec{e}_r$:

$$\vec{P} = P\cos(\pi-\theta)\,\vec{e}_\theta - P\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\vec{e}_r$$

$$\vec{P} = -P\cos\theta\,\vec{e}_\theta - P\sin\theta\,\vec{e}_r$$

On retrouve les mêmes formules que pour la figure 2 : elles sont valables quel que soit θ dès que θ est mesuré de $\vec{e}_x$ vers $\vec{e}_r$.

Figure 4 : Attention, ici θ est l'angle entre $-\vec{e}_y$ et $\vec{e}_r$.

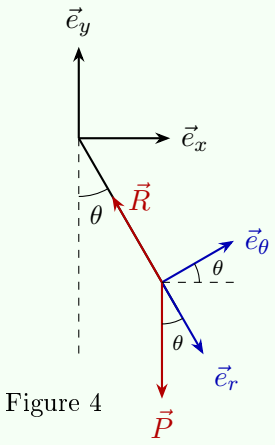


Figure 4

$$\vec{e}_r = -\cos\theta\,\vec{e}_y + \sin\theta\,\vec{e}_x \qquad \vec{e}_\theta = \cos\theta\,\vec{e}_x + \sin\theta\,\vec{e}_y$$

$$\vec{e}_x = \cos\theta\,\vec{e}_\theta + \sin\theta\,\vec{e}_r \qquad \vec{e}_y = \sin\theta\,\vec{e}_\theta - \cos\theta\,\vec{e}_r$$

$$\vec{R} = R\cos\theta\,\vec{e}_y - R\sin\theta\,\vec{e}_x = -R\,\vec{e}_r$$

$$\vec{P} = -P\,\vec{e}_y = P\cos\theta\,\vec{e}_r - P\sin\theta\,\vec{e}_\theta$$

Exercice 7 : Mouvement hélicoïdal

Niveau : ●● ★

Un point matériel se déplace le long d'une hélice circulaire. Son mouvement est donné en coordonnées cylindriques par :

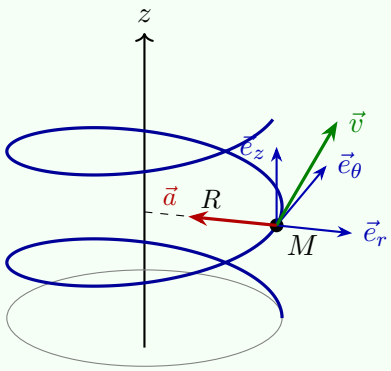
$$r = R \qquad \theta = \omega t \qquad z = ht \qquad \text{où } R,\ h \text{ et } \omega \text{ sont des constantes.}$$

1 Donner l'expression du vecteur vitesse.

2 En déduire que le module de la vitesse est constant.

3 Donner l'expression du vecteur accélération. Commenter.

Correction



$\vec{v} = R\omega\,\vec{e}_\theta + h\,\vec{e}_z$ (tangent à l'hélice)
$\vec{a} = -R\omega^2\,\vec{e}_r$ (vers l'axe)

1. $\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e}_r + z\,\vec{e}_z$; $\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\dot{r}}_{0 \text{ car } r=R}\vec{e}_r + r\underbrace{\dot{\theta}}_{\omega}\vec{e}_\theta + \underbrace{\dot{z}}_{h}\vec{e}_z$:

$$\boxed{\vec{v} = R\omega\,\vec{e}_\theta + h\,\vec{e}_z}$$ ♥

2. $\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}} = \sqrt{R^2\omega^2 + h^2}$: les grandeurs sont indépendantes du temps, donc $\|\vec{v}\|$ est **constant** (mouvement uniforme).

3. $\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = R\omega\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_\theta}{\mathrm{d}t} + \cancel{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(h\,\vec{e}_z)} = R\omega(-\dot{\theta}\,\vec{e}_r)$:

$$\boxed{\vec{a} = -R\omega^2\,\vec{e}_r}$$ ♥

L'accélération est radiale (centripète, vers l'axe) : le mouvement n'est pas accéléré selon $\vec{e}_z$; comme pour un mouvement circulaire uniforme, l'accélération n'est due qu'au changement de direction de $\vec{v}$.

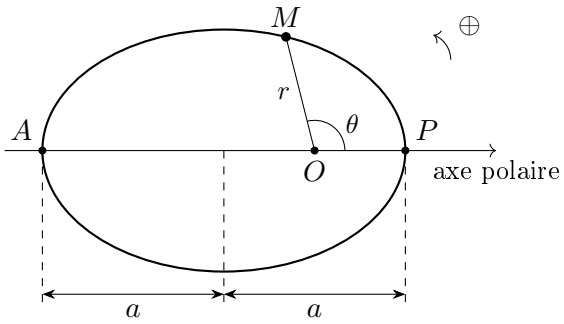
Exercice 8 : Mouvement d'un satellite terrestre

Niveau : ●●● ★★★

Un satellite artificiel, assimilé à un point matériel M, est en orbite autour de la Terre. Il décrit, dans le référentiel géocentrique de centre O, une trajectoire plane. Il est repéré par ses coordonnées polaires r et θ. Sa trajectoire est une ellipse d'équation :

$$r = \frac{p}{1 + e\cos\theta}$$

où p et e sont deux constantes positives caractéristiques de la trajectoire : p est appelé le paramètre et e l'excentricité. La trajectoire est décrite dans le sens des θ croissants.



1 Déterminer les expressions littérales de p et e en fonction de r_P et r_A (cf. figure). P est le point de l'ellipse le plus près du point O et A le point le plus éloigné. Faire les applications numériques pour $a = 16 \times 10^3$ km et $OP = 8{,}0 \times 10^3$ km.

2 Établir l'expression générale du vecteur vitesse en coordonnées polaires.

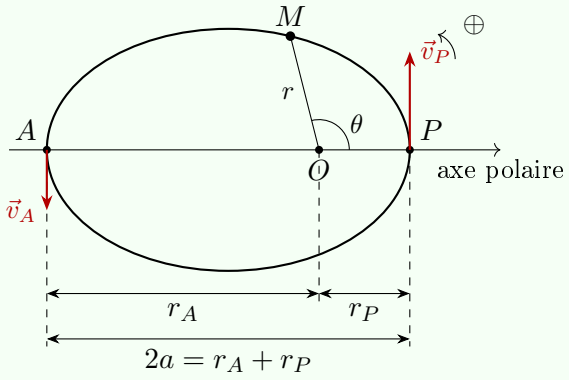
3 En déduire l'expression générale du vecteur accélération en coordonnées polaires.

4 Pour le mouvement étudié, l'accélération est radiale. En déduire que la quantité $r^2\dot{\theta}$ reste constante au cours du mouvement. On la note C.

5 Exprimer les vitesses en P et A et montrer qu'elles sont orthoradiales. En déduire l'expression de C en fonction de r_P et v_P, norme du vecteur vitesse en P. En déduire la valeur numérique de C. On donne $v_P = 8{,}6\,\mathrm{km\,s^{-1}}$.

6 Calculer v_A. Le mouvement est-il uniforme ?

Correction



1. $r = r_P$ quand $\theta = 0$: $r_P = \dfrac{p}{1 + e\cos 0}$, soit $r_P = \dfrac{p}{1+e}$. $r = r_A$ quand $\theta = \pi$: $r_A = \dfrac{p}{1 + e\cos\pi}$, soit $r_A = \dfrac{p}{1-e}$.

On a donc ① $1 - e = \dfrac{p}{r_A}$ et ② $1 + e = \dfrac{p}{r_P}$.

①+② : $2 = p\left(\dfrac{1}{r_A} + \dfrac{1}{r_P}\right)$ et ②−① : $2e = \dfrac{p}{r_P} - \dfrac{p}{r_A} = p\,\dfrac{r_A - r_P}{r_P r_A}$, d'où

$$\boxed{p = \frac{2 r_A r_P}{r_A + r_P} \qquad e = \frac{r_A - r_P}{r_A + r_P}} \heartsuit$$

On a aussi $2a = r_A + r_P$, donc $e = 1 - \dfrac{r_P}{a}$ et $p = \dfrac{r_P(2a - r_P)}{a}$.

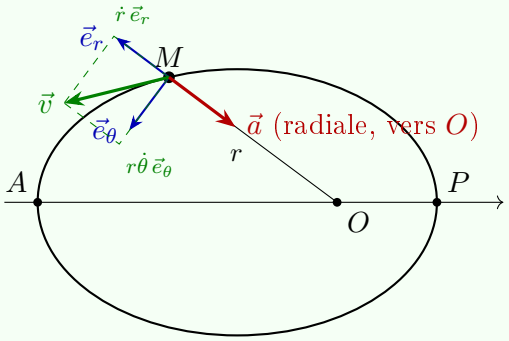
A.N. $r_A = 2a - r_P = 24 \times 10^3$ km : $\boxed{e = 0{,}5}$ et $\boxed{p = 12 \times 10^3 \text{ km}}$.

2. $\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r\,\vec{e}_r)$:

$$\boxed{\vec{v} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta} \heartsuit$$

3. $\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \ddot{r}\,\vec{e}_r + \dot{r}\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + \dot{r}\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + r\ddot{\theta}\,\vec{e}_\theta + r\dot{\theta}(-\dot{\theta}\,\vec{e}_r)$:

$$\boxed{\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\vec{e}_r + \underbrace{(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})}_{\text{composante orthoradiale}}\,\vec{e}_\theta} \heartsuit$$



4. Si l'accélération est radiale, elle est dirigée seulement selon $\vec{e}_r$: donc $2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0$.

Par ailleurs, $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(r^2\dot{\theta}) = 2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} = r\,(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) = 0$ (avec $r \neq 0$).

La condition $C = r^2\dot{\theta} = \text{cste}$ (indépendante de t) est donc équivalente à $2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0$.

5. $\dot{r} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dfrac{p}{1 + e\cos\theta}\right) = \dfrac{pe\dot{\theta}\sin\theta}{(1 + e\cos\theta)^2}$. La vitesse est orthoradiale si $\dot{r} = 0$, soit $\sin\theta = 0$: $\theta = 0$ (point P) ou $\theta = \pi$ (point A). Ainsi :

$$\boxed{\vec{v}(P) = r_P\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta = \frac{\dot{\theta}\,p}{1+e}\,\vec{e}_\theta \qquad \vec{v}(A) = \frac{\dot{\theta}\,p}{1-e}\,\vec{e}_\theta} \heartsuit$$

(avec $\dot{\theta}$ pris au point considéré). En P : $v_P = r_P\dot{\theta}$, donc $\dot{\theta} = \dfrac{v_P}{r_P}$ et $C = r_P^2\dot{\theta} = r_P^2\dfrac{v_P}{r_P}$:

$$\boxed{C = r_P\,v_P} \heartsuit$$

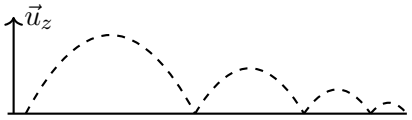
A.N. $C = 8{,}0 \times 10^3 \times 8{,}6 \approx 69 \times 10^3\,\text{km}^2\,\text{s}^{-1}$.

6. De même $C = r_A v_A$, donc $v_A = \dfrac{C}{r_A} = \dfrac{r_P}{r_A}v_P$. A.N. $v_A = \dfrac{69 \times 10^3}{24 \times 10^3} \approx 2{,}9\,\text{km}\,\text{s}^{-1} \neq v_P$: le mouvement n'est **pas uniforme** (le satellite va plus vite près de la Terre).

Exercice 9 : Trajectoire et composante de la vitesse

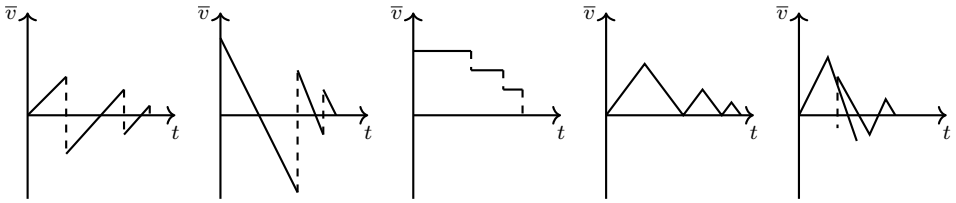
Niveau : ● ★

Un footballeur shoote dans un ballon de telle manière que celui-ci suive la trajectoire ci-contre dans le plan vertical.



1 Ce mouvement est-il rectiligne ?

2 On définit la composante verticale du vecteur vitesse par $v_z = \overline{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}_z$. Quelle courbe correspond le mieux à l'évolution de v_z au cours du temps ? Commenter l'allure générale de cette évolution.



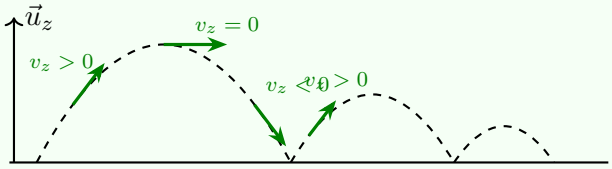
a) b) c) d) e)

Correction

1. Non : la trajectoire est formée d'arcs de paraboles.

2. Entre deux rebonds, le PFD appliqué à la balle dans le référentiel terrestre donne $\vec{a} = \vec{g}$; en projetant sur $\vec{u}_z$: $a_z(t) = -g$, et en prenant la primitive par rapport à t : $v_z(t) = \overline{v} = -gt + v_0$ (v_0 vitesse initiale).

$\overline{v}$ est une **fonction affine décroissante** du temps entre les rebonds (pente $-g$, la même pour tous les arcs) : seules les courbes a), b) et e) conviennent. Quand le rebond a lieu, le sens de $\vec{v}$ change, donc le signe de $\overline{v}$ aussi : il passe brusquement d'une valeur négative à une valeur positive (plus faible, le ballon perd de l'énergie). Au départ, le ballon monte : $\overline{v} > 0$.



rebond : v_z change brusquement de signe

Courbe b) ♥

(a) commence avec une pente positive, e) n'a pas des segments de même pente, c) et d) ne sont pas affines décroissantes.)

Exercice 10 : Type résolution de problème : à ne pas reproduire chez vous !

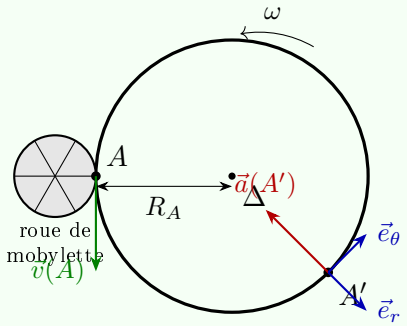
Niveau : ●● ★★



1 Estimer (en g) l'accélération maximale que peut subir une personne sur le tourniquet si la vitesse maximale de la mobylette est de 50 km/h.

2 Vaut-il mieux se rapprocher du centre ou de l'extérieur pour subir l'accélération la plus faible ?

Correction



On note $\mathcal{R}$ le référentiel terrestre, supposé galiléen, et A le point de contact entre la roue de la mobylette et le tourniquet. On suppose que chaque point du tourniquet qui coïncide avec A à un instant donné possède à cet instant la même vitesse que la roue de la mobylette (pas de glissement).
Si la mobylette roule à 50 km/h, soit 13,9 m/s : $\|\vec{v}_{A/\mathcal{R}}\| = 13{,}9\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.
Le tourniquet se comporte comme un solide en rotation autour de l'axe Δ ; dans la base polaire, $\vec{v}(A) = R_A\,\omega\,\vec{e}_\theta$ ($\omega > 0$: vitesse angulaire).
On suppose que $\omega =$ cste et on estime $R_A \simeq 1{,}5\,\mathrm{m}$ (rayon du tourniquet) :

$$\omega = \frac{\|\vec{v}_{A/\mathcal{R}}\|}{R_A} \approx \frac{13{,}9}{1{,}5} \approx 9\,\mathrm{rad\,s^{-1}}\ (\approx 1\times 10^1\,\mathrm{rad\,s^{-1}}).$$

1. Accélération en n'importe quel point A' à la distance R_A de Δ : $\vec{v}(A') = R_A\omega\,\vec{e}_\theta$, donc $\vec{a}(A')_{/\mathcal{R}} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = R_A\omega\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_\theta}{\mathrm{d}t} = -R_A\omega^2\,\vec{e}_r$:

$$\boxed{\|\vec{a}(A')\| = R_A\,\omega^2 = \frac{v^2}{R_A}}\ \heartsuit$$

A.N. $\|\vec{a}\| \approx \dfrac{13{,}9^2}{1{,}5} \approx 1{,}3\times 10^2\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, soit **plus de 10 g** (environ $13\,g$; avec $\omega \approx 10\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$ on trouve $150\,\mathrm{m\,s^{-2}} \approx 15\,g$). C'est énorme : un pilote de chasse entraîné supporte quelques g !

2. À la distance r de l'axe, $\|\vec{a}\| = r\,\omega^2$: l'accélération est proportionnelle à r. Il vaut donc mieux se rapprocher du **centre** (au centre, $a = 0$).

Exercice 11 : Contrôle aérien et filet de sauvegarde

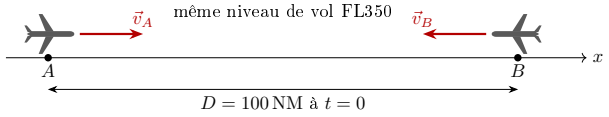
Niveau : ●●● ★★★

Deux avions de ligne volant au même niveau ne doivent jamais se trouver à moins de $d_s = 5\,\text{NM}$ l'un de l'autre (norme de séparation radar ; verticalement, il faut au moins 1000 ft), sinon il y a *perte de séparation*, un incident grave. Pour aider les contrôleurs, un logiciel appelé **filet de sauvegarde** (STCA, *Short Term Conflict Alert*) prolonge en ligne droite, toutes les quelques secondes, la trajectoire de chaque paire d'avions sur une durée $\tau = 2\,\text{min}$; s'il prévoit qu'ils seront à moins de d_s pendant cette durée, leurs étiquettes clignotent en rouge sur l'écran radar : le contrôleur doit alors agir immédiatement.

Données : $1\,\text{NM} = 1852\,\text{m}$; $1\,\text{kt} = 1\,\text{NM\,h}^{-1}$; $1\,\text{ft} = 0{,}3048\,\text{m}$. Avions assimilés à des points, référentiel terrestre galiléen, courbure de la Terre négligée.

Partie A – Deux avions face à face

Deux avions A et B volent au même niveau, sur la même route, l'un vers l'autre, à $v = 450\,\text{kt}$. À $t = 0$, ils sont distants de $D = 100\,\text{NM}$. Origine de l'axe (Ox) en $A(t = 0)$.

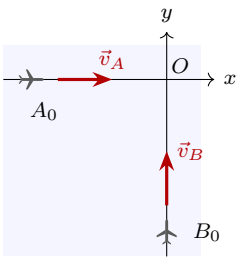


A1. Convertir v en $\text{km\,h}^{-1}$ puis en $\text{m\,s}^{-1}$.
A2. Écrire les équations horaires $x_A(t)$ et $x_B(t)$. En déduire la distance $d(t)$ entre les avions.
A3. Au bout de combien de temps t_c les avions se percuteraient-ils si personne n'intervenait ?
A4. À quel instant t_{PS} y a-t-il perte de séparation ?
A5. À quel instant t_{al} le filet de sauvegarde se déclenche-t-il ? À quelle distance d_{al} sont alors les avions ? De combien de temps le contrôleur dispose-t-il avant la perte de séparation ? avant la collision ?

Partie B – Deux routes qui se croisent

Deux avions au niveau FL350 se dirigent vers le même point de report O (coordonnées en NM, $\vec{e}_x$ vers l'est, $\vec{e}_y$ vers le nord) :

- A vole vers l'est à $v_A = 450\,\text{kt}$; à $t = 0$ il est en $A_0(-40\,;0)$;
- B vole vers le nord à $v_B = 480\,\text{kt}$; à $t = 0$ il est en $B_0(0\,;-45)$.



B1. Cas général. On note $\vec{r}_{A0} = \overrightarrow{OA}(0)$, $\vec{r}_{B0} = \overrightarrow{OB}(0)$ et $\vec{v}_A$, $\vec{v}_B$ les vecteurs vitesse (constants). Exprimer $\overrightarrow{OA}(t)$ et $\overrightarrow{OB}(t)$, puis montrer que $\overrightarrow{AB}(t) = \vec{d}_0 + \vec{w}\,t$ avec $\vec{d}_0 = \vec{r}_{B0} - \vec{r}_{A0}$ et $\vec{w} = \vec{v}_B - \vec{v}_A$. Signification physique de $\vec{w}$?
B2. En déduire que $d(t)^2 = w^2\,t^2 + 2\,(\vec{d}_0 \cdot \vec{w})\,t + d_0^2$.
B3. Montrer que $d(t)$ est minimale à l'instant $t^* = -\dfrac{\vec{d}_0 \cdot \vec{w}}{w^2}$. Que signifie le cas $\vec{d}_0 \cdot \vec{w} > 0$?
B4. Montrer que la distance minimale vaut $d_{min} = \sqrt{d_0^2 - \dfrac{(\vec{d}_0 \cdot \vec{w})^2}{w^2}}$.
B5. A.N. Donner les composantes de $\vec{d}_0$ et de $\vec{w}$, puis calculer d_0, t^* et d_{min}. Les deux avions passent-ils au-dessus de O en même temps ? Y a-t-il perte de séparation ?
B6. Déterminer t_{PS}, puis t_{al}. Combien de temps dure la perte de séparation si personne n'intervient ?

Partie C – L'algorithme du filet de sauvegarde

C1. (Python) Vecteurs représentés par des listes `[x, y]` ; distances en NM, vitesses en kt, temps en h. `A0` et `B0` sont les positions **initiales** $A_0 = A(t = 0)$ et $B_0 = B(t = 0)$ (et non les positions à l'instant t) ; `vA` et `vB` sont les vecteurs vitesse, constants.

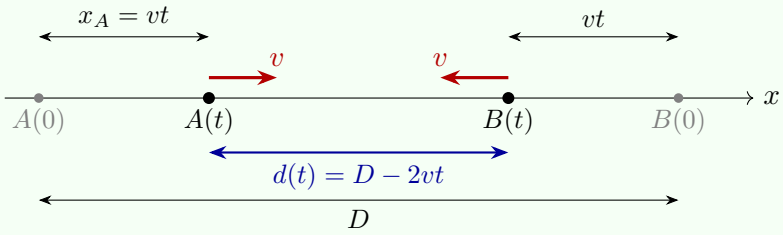
a. Écrire une fonction `distance(t, A0, B0, vA, vB)` qui renvoie $d(t)$.
b. Écrire une fonction `alerte(t, A0, B0, vA, vB, tau, ds)` qui renvoie `True` si la distance prévue passe sous `ds` entre t et $t + \tau$ (instants testés tous les 4 s, une image radar), `False` sinon.
c. Écrire une fonction `instant_alerte(A0, B0, vA, vB, tau, ds)` qui renvoie l'instant t_{al} où les étiquettes se mettent à clignoter (`alerte` appliquée toutes les 4 s dès $t = 0$; `None` si pas d'alerte en 1 h). Avec les données de la partie B, le programme renvoie $t_{al} \approx 184\,\text{s}$. Commenter le faible écart avec B6.

C2. Pourquoi le filet de sauvegarde ne regarde-t-il pas plus loin que $\tau = 2\,\text{min}$ dans le futur ?

Correction

Partie A

A1. $v = 450\,\text{kt} = 450 \times 1{,}852\,\text{km h}^{-1} \approx 833\,\text{km h}^{-1}$, soit $v = \dfrac{833 \times 10^3}{3600} \approx 231\,\text{m s}^{-1}$.



A2. Les deux mouvements sont rectilignes uniformes : $x_A(t) = vt$ et $x_B(t) = D - vt$. Tant que A est derrière B :

$$\boxed{d(t) = x_B(t) - x_A(t) = D - 2vt}$$ ♥

Tout se passe comme si B s'approchait de A immobile à la vitesse $2v$ (vitesse relative).

A3. $d(t_c) = 0$:

$$\boxed{t_c = \frac{D}{2v}}$$ ♥

A.N. $t_c = \dfrac{100}{900}\,\text{h} = 400\,\text{s} \approx 6\,\text{min}\,40\,\text{s}$. Cela paraît long, mais 100 NM représentent seulement 185 km : c'est à peu près la taille d'un secteur de contrôle.

A4. $d(t_{PS}) = d_s$: $t_{PS} = \dfrac{D - d_s}{2v} = \dfrac{95}{900}\,\text{h} = 380\,\text{s}$.

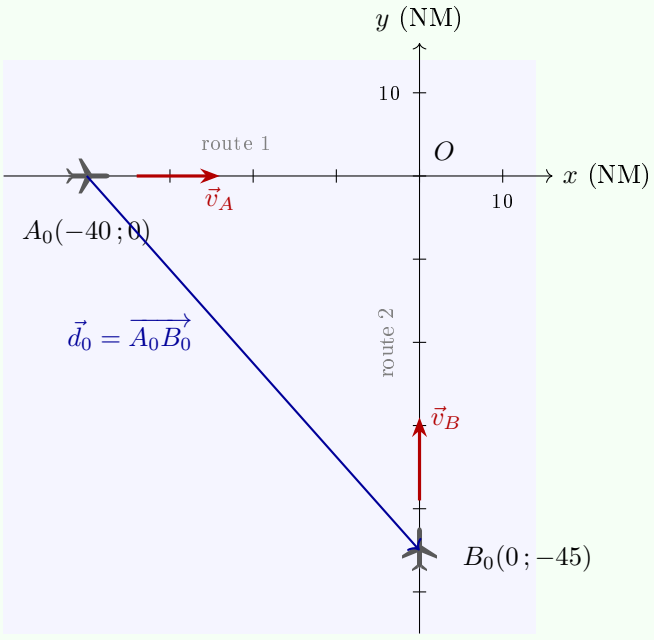
A5. À l'instant t, le logiciel prolonge les trajectoires jusqu'à $t + \tau$. Comme d diminue, la distance prévue la plus petite est $d(t + \tau)$; l'alerte se déclenche quand $d(t_{al} + \tau) = d_s$, soit $t_{al} = t_{PS} - \tau$:

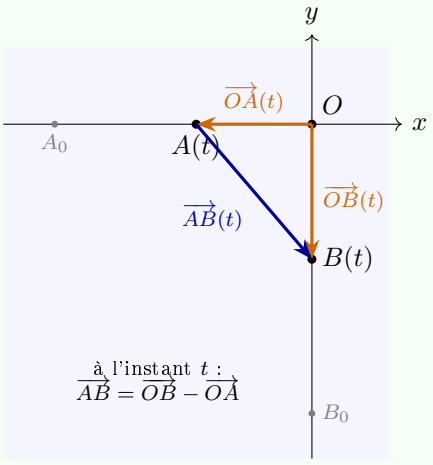
$$\boxed{t_{al} = \frac{D - d_s}{2v} - \tau \qquad d_{al} = d_s + 2v\tau}$$ ♥

A.N. $t_{al} = 380 - 120 = 260\,\text{s}$; $d_{al} = 5 + 900 \times \dfrac{2}{60} = 35\,\text{NM} \approx 65\,\text{km}$.

Le contrôleur dispose de $\tau = 2\,\text{min}$ avant la perte de séparation, et de $t_c - t_{al} = 140\,\text{s}$ avant la collision.

Partie B





B1. Mouvements rectilignes uniformes : $\overrightarrow{OA}(t) = \vec{r}_{A0} + \vec{v}_A\, t$ et $\overrightarrow{OB}(t) = \vec{r}_{B0} + \vec{v}_B\, t$. Avec la relation de Chasles :

$$\overrightarrow{AB}(t) = \overrightarrow{OB}(t) - \overrightarrow{OA}(t) = \underbrace{(\vec{r}_{B0} - \vec{r}_{A0})}_{\vec{d}_0} + \underbrace{(\vec{v}_B - \vec{v}_A)}_{\vec{w}}\, t$$

$\vec{w} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{AB}}{\mathrm{d}t}$ est la **vitesse de B vue depuis l'avion A** (vitesse relative). Dans la partie A, $w = 2v$.

B2. $d^2 = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = (\vec{d}_0 + \vec{w}\, t) \cdot (\vec{d}_0 + \vec{w}\, t)$:

$$\boxed{d(t)^2 = w^2 t^2 + 2\,(\vec{d}_0 \cdot \vec{w})\, t + d_0^2} \heartsuit$$

B3. $d \geq 0$ donc d et d^2 sont minimales au même instant. $\dfrac{\mathrm{d}(d^2)}{\mathrm{d}t} = 2w^2 t + 2\,\vec{d}_0 \cdot \vec{w} = 0$ pour

$$\boxed{t^* = -\frac{\vec{d}_0 \cdot \vec{w}}{w^2}} \heartsuit$$

(c'est bien un minimum : le coefficient w^2 de t^2 est positif). Si $\vec{d}_0 \cdot \vec{w} > 0$, alors $t^* < 0$: les avions sont déjà en train de s'éloigner, il n'y a plus de risque.

B4. On remplace t par t^* : $d_{min}^2 = w^2 \dfrac{(\vec{d}_0 \cdot \vec{w})^2}{w^4} - 2\dfrac{(\vec{d}_0 \cdot \vec{w})^2}{w^2} + d_0^2$, soit

$$\boxed{d_{min} = \sqrt{d_0^2 - \frac{(\vec{d}_0 \cdot \vec{w})^2}{w^2}}} \heartsuit$$

B5. $\vec{d}_0 = \overrightarrow{A_0B_0} = (40\,;-45)$ en NM et $\vec{w} = \vec{v}_B - \vec{v}_A = (-450\,;480)$ en kt.
$d_0 = \sqrt{40^2 + 45^2} \approx 60{,}2$ NM ; $\vec{d}_0 \cdot \vec{w} = 40 \times (-450) + (-45) \times 480 = -39\,600$ NM^2.h^{-1} ; $w^2 = 450^2 + 480^2 = 432\,900$ kt^2 ($w \approx 658$ kt).

$$t^* = \frac{39600}{432900}\ \text{h} \approx 0{,}0915\ \text{h} \approx 329\ \text{s} \approx 5\ \text{min}\ 29\ \text{s}$$

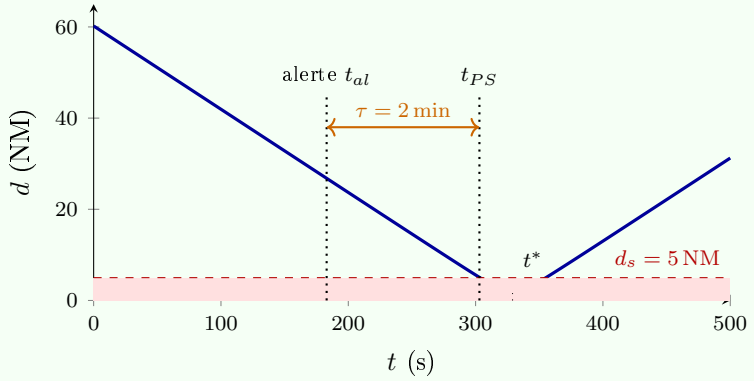
$$d_{min} = \sqrt{3625 - \frac{39600^2}{432900}} \approx 1{,}6\ \text{NM} \approx 3\ \text{km}$$

A arrive en O au bout de $40/450$ h $= 320$ s et B au bout de $45/480$ h ≈ 338 s : ils survolent O à seulement 18 s d'intervalle. $d_{min} < d_s$: il y a **perte de séparation** (et, à 1,6 NM, il ne s'en faut que de quelques secondes pour une collision).

B6. $d(t)^2 = d_s^2 \iff w^2t^2 + 2(\vec{d}_0 \cdot \vec{w})\, t + d_0^2 - d_s^2 = 0 \iff 432\,900\, t^2 - 79\,200\, t + 3600 = 0$ (t en h). Les racines sont $t \approx 0{,}0843$ h et $t \approx 0{,}0987$ h, soit

$$\boxed{t_{PS} \approx 303\ \text{s}\ (\approx 5\ \text{min}\ 3\ \text{s}) \qquad t_{al} = t_{PS} - \tau \approx 183\ \text{s}} \heartsuit$$

(d décroît jusqu'à t^*, donc l'alerte se déclenche bien quand $d(t + \tau) = d_s$.) Sans intervention, les avions restent à moins de 5 NM pendant $355 - 303 \approx 52$ s.



Partie C

C1. Une version possible :

```
import math

def distance(t, A0, B0, vA, vB):
    """distance (NM) entre les avions a l'instant t (h).
    A0, B0 : positions INITIALES (t = 0) ; vA, vB : vitesses (kt)"""
    dx = (B0[0] - A0[0]) + (vB[0] - vA[0]) * t
    dy = (B0[1] - A0[1]) + (vB[1] - vA[1]) * t
    return math.sqrt(dx**2 + dy**2)

def alerte(t, A0, B0, vA, vB, tau=2/60, ds=5):
    """True si la distance prevue passe sous ds entre t et t+tau"""
    pas = 4 / 3600                  # 4 s, en heures
    s = t
    while s <= t + tau:
        if distance(s, A0, B0, vA, vB) < ds:
            return True
        s = s + pas
    return False

def instant_alerte(A0, B0, vA, vB, tau=2/60, ds=5):
    """instant t_al (h) ou les etiquettes clignotent, None si pas d'alerte"""
    pas = 4 / 3600                  # balayage radar toutes les 4 s
    t = 0
    while t <= 1:                   # on surveille pendant 1 h
        if alerte(t, A0, B0, vA, vB, tau, ds):
            return t
        t = t + pas
    return None

# donnees de la partie B
A0, B0, vA, vB = [-40, 0], [0, -45], [450, 0], [0, 480]
t_al = instant_alerte(A0, B0, vA, vB)
print("alerte a t_al =", round(t_al * 3600), "s")    # environ 184 s
```

Le programme renvoie $t_{al} \approx 184\,\text{s}$ alors que le calcul exact de la question B6 donne $t_{al} \approx 183\,\text{s}$: l'écart vient de ce que l'algorithme ne teste les instants que toutes les 4 s (une image radar toutes les 4 s). L'alerte est donc détectée avec un retard d'au plus 4 s, négligeable devant les 2 min de préavis. Les vrais logiciels utilisent le même principe (extrapolation linéaire des pistes radar), avec de nombreux filtres pour éviter les fausses alertes : avions qui ne sont pas au même niveau, avions en virage…

C2. L'extrapolation en ligne droite suppose que les vitesses restent constantes. Sur une durée longue, les avions changent de cap, de vitesse ou de niveau (virages, montées, descentes) : la prédiction devient fausse et le logiciel déclencherait sans arrêt des alarmes inutiles, que les contrôleurs finiraient par ignorer. Si le filet de sauvegarde au sol échoue, il existe à bord un dernier filet, le TCAS, qui donne directement aux pilotes un ordre de montée ou de descente environ 20 à 35 s avant le rapprochement maximal.