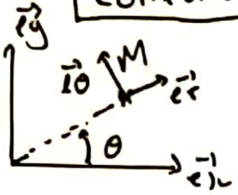
Correction TD 07

Exc 2

Q1 a)



b) $\vec{v} = \frac{d}{dt}(r\vec{e_r}) = \frac{dr}{dt}\vec{e_r} + r(t)\frac{d\vec{e_r}}{dt}$

$\vec{v} = \frac{d}{dt}(ae^{-wt})\vec{e_r} + ae^{-wt}\dot{\theta}\vec{e_\theta}$ $\quad \dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = w$

$\vec{v} = -awe^{-wt}\vec{e_r} + wae^{-wt}\vec{e_\theta}$

$$\boxed{\vec{V} = awe^{-wt}(\vec{e_\theta} - \vec{e_r})}$$

b suite

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(awe^{-wt}(\vec{e_\theta} - \vec{e_r})\right)$

$\vec{a} = aw(-w)e^{-wt}(\vec{e_\theta} - \vec{e_r}) + awe^{-wt}(-\dot{\theta}\vec{e_r} - \dot{\theta}\vec{e_\theta})$

$\vec{a} = -w^2ae^{-wt}(\vec{e_\theta} - \vec{e_r}) - aw^2e^{-wt}(\vec{e_r} + \vec{e_\theta})$

$$\boxed{\vec{a} = -2w^2ae^{-wt}\vec{e_\theta}}$$

c) $\|\vec{V}\| = |awe^{-wt}|\,\|\vec{e_\theta} - \vec{e_r}\| = awe^{-wt}\sqrt{1^2+1^2}$

$\boxed{\|\vec{V}\| = a\sqrt{2}e^{-wt}}$ dépend du tps donc mouvement non uniforme

d) A est tel que $\theta = 0 \Rightarrow r = ae^0 = a$
donc $t=0$ quand $M = A$

$\vec{V}(A) = \vec{V}(t=0) = \underbrace{aw}_{V_\theta}\vec{e_\theta} \underbrace{-aw}_{V_r}\vec{e_r} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} V_\theta = aw \\ V_r = -aw \end{matrix}}$

$\vec{a}(A) = \vec{a}(t=0) = -2w^2a\vec{e_\theta} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix} a_\theta = -2w^2a \\ a_r = 0 \end{matrix}}$

2) on a $\vec{v} = \frac{d}{dt}(r\vec{e_r})$

$\vec{V} = \frac{d}{dt}\left(ae^{-\theta(t)}\vec{e_r}\right) = \frac{d}{dt}\left(ae^{-\theta(t)}\right)\vec{e_r} + ae^{-\theta(t)}\underbrace{\frac{d}{dt}(\vec{e_r})}_{\dot{\theta}\vec{e_\theta} = \frac{d\theta}{dt}\vec{e_\theta}}$

$\vec{V} = a\left(-\frac{d\theta}{dt}\right)e^{-\theta(t)}\vec{e_r} + ae^{\theta(t)}\frac{d\theta}{dt}\vec{e_\theta}$

$\vec{V} = \begin{pmatrix} -a\dot{\theta}e^{-\theta(t)} \\ a\dot{\theta}e^{-\theta(t)} \end{pmatrix}_{\vec{e_r}, \vec{e_\theta}}$ si $\|\vec{V}\|$ indépendant du tps

alors $\|\vec{V}\| = \sqrt{(-a\dot{\theta}e^{-\theta})^2 + (a\dot{\theta}e^{-\theta})^2} = V_0$

soit : $V_0 = \sqrt{2}a\dot{\theta}e^{-\theta}$

Séparons les variables (comme en cinétique chimique) $V_0 = \sqrt{2}a\frac{d\theta}{dt}e^{-\theta}$

$\Rightarrow \frac{V_0}{\sqrt{2}a}dt = d\theta e^{-\theta}$ $\Rightarrow$ on intègre $\int_0^t \frac{V_0 du}{\sqrt{2}a} = \int_{\theta_0=0}^{\theta} e^{-x}dx$

(u et x sont des variable "muettes")

$\frac{V_0}{\sqrt{2}a}(t-0) = \left[e^{-x}\right]_0^{\theta} = \left(1 - e^{-\theta}\right) \Rightarrow e^{-\theta} = 1 - \frac{V_0}{\sqrt{2}a}t \Rightarrow \boxed{\theta(t) = -\ln\left(1 - \frac{V_0 t}{\sqrt{2}a}\right)}$

Ex 3

on note $x_A(t)$ la position sur l'axe Ox de A à l'instant t

——— $x_B(t)$ ——— de B

——— $\dot{x}_A(t)$ et $\dot{x}_B(t)$ les composantes du vecteur vitesse de A et B sur cet axe

——— $\ddot{x}_A(t)$ et $\ddot{x}_B(t)$ les composantes de l'accélération ———

on cherche le premier instant tmin pour lequel $\underline{x_A(t_{min}) = x_B(t_{min})}$ (il faut $t_{min} > 1$ sec)

on a alors $\underline{L_{min} = x_A(t_{min}) = x_B(t_{min})}$

on suppose que l'accélération est constante

à $t=0$: $\ddot{x}_B(0) = 0$ (B n'a pas encore démarré)

À $t=0$

$x_A(0) = x_B(0) = 0$

et $\ddot{x}_A(0) = 4$

$\forall t>0$: $\ddot{x}_A(t) = 4 \underset{\text{primitive}}{\Rightarrow} \dot{x}_A(t) = 4t + \underset{\text{vitesse initiale nulle}}{0}$

finalement : $x_A(t) = \dfrac{4t^2}{2} + \underset{\text{pos initiale}}{0} \Rightarrow \boxed{x_A(t) = 4t^2 \quad \forall t}$

Par B

- 1ère phase : entre $t=0$ et $t=1$ $\underline{x_B(t) = 0}$
- 2ème phase : à partir de $t=1$: $\ddot{x}_B(t) = 5$

$\underset{\text{primitive}}{\Rightarrow} \dot{x}_B(t) = 5t + K_1$

⚠ On prend comme condition initiale les grandeurs à $\boxed{t=1s}$

à $t=1s$ $\dot{x}_B(1) = 0$

$\Rightarrow : 5 \times 1 + C_1 = 0 \Rightarrow \boxed{C_1 = -5}$

$\underline{\dot{x}_B(t) = 5(t-1)}$

(car avant $x_B(t) = 0 \ \forall t \in [0,1]$)

position de B : $x_B(t) \underset{\substack{\text{primitive}\\ \text{de } \dot{x}_B}}{=} \dfrac{5}{2}t^2 - 5t + C_2$

Condition initiale :

à $t=1$ $x_B(1) = 0 \Rightarrow \dfrac{5}{2} - 5 + C_2 = 0 \Rightarrow C_2 = 5 - \dfrac{5}{2} = \dfrac{5}{2}$

$$\boxed{x_B(t) = \frac{5}{2}t^2 - 5t + \frac{5}{2} \quad (\forall t > 1) \quad \text{et } x_B(t) = 0 \ \forall t \in [0,1]}$$

Scanné avec CamScanner

entre 0 et 1s : $x_A(t) = 2t^2$ et $x_B(t) = 0$ => B est derrière A !

pour $t>1$: $x_A(t) = 2t^2$ et $x_B(t) = 2,5t^2 - 5t + 2,5$

$x_A(t_{min}) = x_B(t_{min}) \Leftrightarrow 2t_{min}^2 = 2,5t_{min}^2 - 5t_{min} + 2,5$

$\Leftrightarrow 0,5t_{min}^2 - 5t_{min} + 2,5 = 0$

$\Delta = 25 - 4 \times \frac{1}{2} \times \frac{5}{2} = 20$

$t_{1min} = \frac{5 - \sqrt{20}}{2 \times 0,5} = 5 - \sqrt{20} \simeq 0,53s$ ← impossible car < 1 s

$\boxed{t_{2min} = 5 + \sqrt{20} = 9,47s}$ ← possible !

on a donc $L_{min} = x_A(t_{min}) = 2 \times (5 + \sqrt{20})^2 = \underline{179m}$

Exercice 4 le mouvement de l'ascenseur est rectiligne uniforme/Ref Terrestre

le Ref de l'ascenseur est en translation rectiligne uniforme par rapport au ref terrestre : c'est un ref galiléen

la masse indiquée sera exactement la même que dans le ref Terrestre

Exercice 5 1) Non...

2) entre 2 phases de rebond le PFD appliqué à la balle ds le ref terrestre donne

$\vec{a} = \vec{g} \Rightarrow a_z(t) = -g \Rightarrow V_z(t) = \overline{V} = -gt + V_0$

Projectº sur O_z Primitive/t vitesse initiale

$\underline{\overline{V}\text{ est une fct° décroissante du tps entre les rebonds}} \Rightarrow$ b

quand le rebond a lieu, <u>le sens de $\vec{v}$ change</u>, donc <u>le signe de $\overline{v}$ aussi</u>

Exercice 6

1) $\vec{OM} = r\vec{e_r} + z\vec{e_z}$

$$\vec{V} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \underbrace{\dot{r}}_{0 \text{ car } r=R}\vec{e_r} + r\underbrace{\dot{\theta}}_{\omega}\vec{e_\theta} + \underbrace{\dot{z}}_{h}\vec{e_z} \Rightarrow \boxed{\vec{V} = R\omega\vec{e_\theta} + h\vec{e_z}}$$

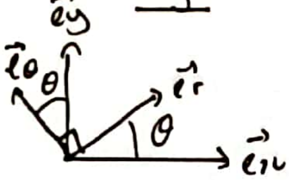
2) $\|\vec{V}\| = \sqrt{\vec{V}\cdot\vec{V}} = \boxed{\sqrt{R^2\omega^2 + h^2}}$ ← les grandeurs sont indép du tps donc **$\|\vec{V}\|$ est constant**

3) $\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = R\omega\frac{d}{dt}(\vec{e_\theta}) + \cancel{\frac{d}{dt}(h\vec{e_z})} \Rightarrow \boxed{\vec{a} = -R\omega^2\vec{e_r}}$ le mouvement n'est pas accéléré selon $\vec{e_z}$

(accélération radiale)

Exercice 7

Fig1

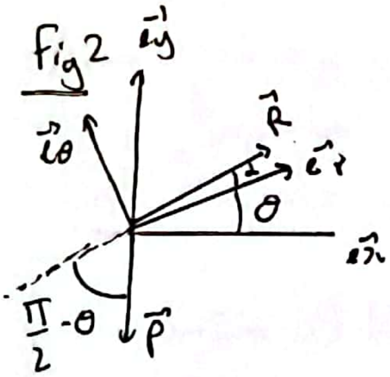


$\vec{e_r} = \cos\theta\vec{e_x} + \sin\theta\vec{e_y}$ $\qquad$ $\vec{e_x} = \cos\theta\vec{e_r} - \sin\theta\vec{e_\theta}$

$\vec{e_\theta} = \cos\theta\vec{e_y} - \sin\theta\vec{e_x}$ $\qquad$ $\vec{e_y} = \cos\theta\vec{e_\theta} + \sin\theta\vec{e_r}$

$\hat{m}$ chose pour fig 1, 2 et 3.

Fig 2



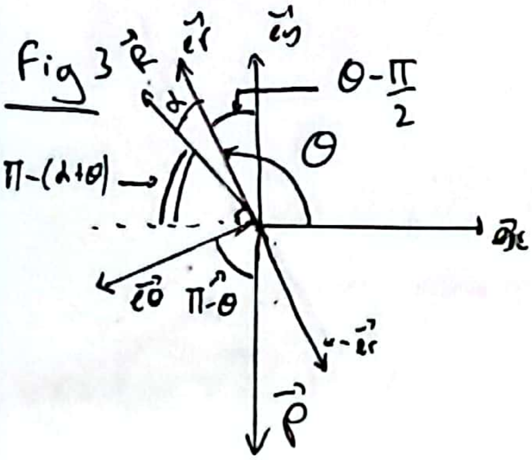
$\vec{R} = R\cos(\alpha+\theta)\vec{e_x} + R\sin(\alpha+\theta)\vec{e_y}$

$\vec{R} = R\cos\alpha\vec{e_r} + R\sin\alpha\,\vec{e_\theta}$

$\vec{P} = -P\cos(\frac{\pi}{2}-\theta)\vec{e_r} - P\cos(\theta)\vec{e_\theta} \Leftrightarrow \boxed{\vec{P} = -P\sin\theta\vec{e_r} - P\cos\theta\vec{e_\theta}}$

$\vec{P} = -P\vec{e_y}$

Fig 3



on a tjrs $\vec{R} = R\cos\alpha\vec{e_r} + R\sin\alpha\vec{e_\theta}$

$\vec{R} = -R\cos(\pi-(\alpha+\theta))\vec{e_x}$

$+ \cos(\theta-\frac{\pi}{2}+\alpha)\vec{e_y}$

$\vec{R} = R\cos(\alpha+\theta)\vec{e_x} + R\sin(\theta+\alpha)\vec{e_y}$

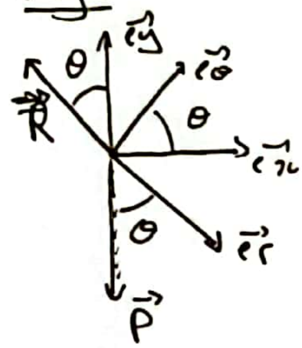
$\vec{P} = -P\vec{e_y}$

$\vec{P} = P\cos(\pi-\theta)\vec{e_\theta} - P\cos(\theta-\frac{\pi}{2})\vec{e_r}$

$\vec{P} = -P\cos\theta\vec{e_\theta} - P\sin\theta\vec{e_r}$

Scanné avec CamScanner

Fig 4



⚠ ici θ est l'angle entre $-\vec{e_y}$ et $\vec{e_r}$

$\vec{e_r} = -\cos\theta \vec{e_y} + \sin\theta \vec{e_x}$

$\vec{e_\theta} = \cos\theta \vec{e_x} + \sin\theta \vec{e_y}$

$\vec{e_x} = \cos\theta \vec{e_\theta} + \sin\theta \vec{e_r}$

$\vec{e_y} = \sin\theta \vec{e_\theta} - \cos\theta \vec{e_r}$

$\vec{R} = R\cos\theta \vec{e_y} - R\sin\theta \vec{e_x}$

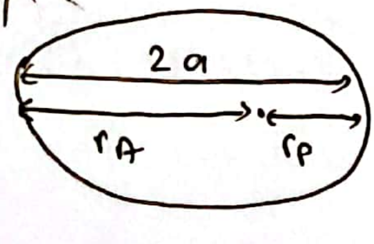
$\vec{R} = -R\vec{e_r}$

$\vec{P} = -P\vec{e_y}$

$\vec{P} = P\cos\theta \vec{e_r} - P\sin\theta \vec{e_\theta}$

Ex 8

1)



$r = r_P$ quand $\theta = 0$ $\Leftrightarrow$ $r_P = \dfrac{p}{1+e\cos(0)}$ $\Rightarrow \boxed{r_P = \dfrac{p}{1+e}}$

$r = r_A$ quand $\theta = \pi$ $\Leftrightarrow$ $r_A = \dfrac{p}{1+e\cos(\pi)}$ $\Rightarrow \boxed{r_A = \dfrac{p}{1-e}}$

(1) $\left[1-e = \dfrac{p}{r_A}\right]$ (2) $\left[1+e = \dfrac{p}{r_P}\right]$ (1)+(2) $\Rightarrow 1-e+1+e = \dfrac{p}{r_A} + \dfrac{p}{r_P}$

$\Rightarrow 2 = p\left(\dfrac{1}{r_A} + \dfrac{1}{r_P}\right) \Rightarrow \boxed{p = \dfrac{2r_A r_P}{r_A + r_P}}$

on a aussi $2a = r_A + r_P$

(2)-(1) $\Rightarrow 2e = \dfrac{p}{r_P} - \dfrac{p}{r_A}$

donc

$e = \dfrac{r_A - r_P}{r_P r_A} \times \dfrac{p}{2} \Rightarrow \boxed{e = \dfrac{r_A - r_P}{r_A + r_P}}$

$\boxed{e = -\dfrac{r_P}{a} + 1 \text{ et } p = \dfrac{r_P(2a - r_P)}{a}}$

A.N. $\boxed{e = 0,5 \quad p = 12.10^3 \text{ km}}$

avec $\dot{r} = \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{p}{1+e\cos\theta}\right) = -\dfrac{-e\dot{\theta}\sin\theta}{(1+e\cos\theta)^2}$

2) $\vec{v} = \dfrac{d\vec{OM}}{dt} = \dfrac{d}{dt}(r\vec{e_r}) = \underline{\dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta}}$

$\boxed{\dot{r} = \dfrac{e\dot{\theta}\sin\theta}{(1+e\cos\theta)^2}}$

3) $\vec{a} = \dfrac{d}{dt}(\vec{v}) = \ddot{r}\vec{e_r} + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e_\theta} + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e_\theta} + r\ddot{\theta}\vec{e_\theta} + r\dot{\theta}(-\dot{\theta}\vec{e_r})$

$\boxed{\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e_r} + \underbrace{(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})}_{\text{compo tangentielle de } \vec{a}}\vec{e_\theta}}$

4) si l'accélération est radiale, elle est dirigée seulement selon $\vec{e_r}$

donc $\underbrace{2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}}_{\text{composante tangentielle de } \vec{a} \text{ (selon } \vec{e_\theta})} = 0$

si $r^2\dot{\theta}$ est indépendant du tps :

$$\frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta}) = 0$$

soit $\frac{d}{dt}(r^2)\dot{\theta} + r^2\frac{d}{dt}(\dot{\theta}) = 0$

$\Rightarrow 2\dot{r}r\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta} = 0$

en divisant par r ($\neq 0$) : $2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0$

la condition $C = r^2\dot{\theta} = $ cste indep de t est équivalente à $2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0$

5) $\dot{r} = \frac{e\dot{\theta}\sin\theta}{(1+e\cos\theta)^2}$ si vitesse orthoradiale, alors $\dot{r} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{e\dot{\theta}\sin\theta}{(1+e\cos\theta)^2} = 0$

$\Leftrightarrow \sin\theta = 0$

$\Leftrightarrow \theta = 0$ ou $\theta = \pi$

Point P Point A

ainsi en P : $\vec{v}(P) = r\dot{\theta}\vec{e_\theta} = \frac{\dot{\theta}p}{1+e\cos(0)}\vec{e_\theta}$,

$$\boxed{\vec{v}(P) = \frac{\dot{\theta}p}{1+e}\vec{e_\theta}}$$

$$\boxed{\vec{v}(A) = \frac{\dot{\theta}p}{1-e}\vec{e_\theta}}$$

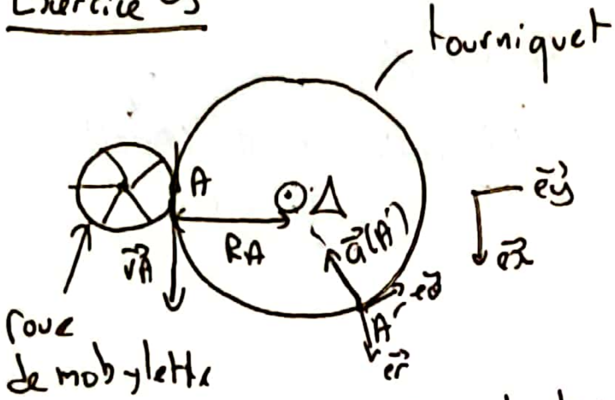
$v_P = r_P\dot{\theta} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{v_P}{r_P}$

$C = r_P^2\dot{\theta} = r_P^2\frac{v_P}{r_P} \Rightarrow \boxed{C = r_P v_P}$

A.N $C = 69.10^3\ km^2 s^{-1}$

6) $v_A = \frac{C}{r_A}$ A.N $v_A = 2{,}9\ km.s^{-1} \neq v_B \Rightarrow$ le mouvement n'est pas uniforme

Exercice 9



on note R le ref terrestre supposé galiléen

on note A le point de contact entre mobylette et tourniquet,
on suppose que chaque point du tourniquet qui coincide avec A à un instant donné, possède à cet instant, la même vitesse que la roue de la mobylette

si la mobylette roule à 50km/h alors $\boxed{\vec{V}_{A/R} = 13{,}89\ \vec{e_x}}$
(soit 13,89 m/s

le tourniquet se comporte comme un solide en rotation autour de l'axe Δ dans la base polaire

$\boxed{\vec{V}(A) = R_A \omega \vec{e_\theta}}$ ($\omega > 0$ vitesse angulaire)

on suppose que $\omega = cste$

donc $\omega = \dfrac{\|\vec{V}_{A/R}\|}{R_A}$

on suppose $\underline{R_A \simeq 1{,}5m}$

donc $\underline{\omega \simeq 1 \times 10^1\ rad.s^{-1}}$

acceleration angulaire en : n'importe quel point A' à une distance R_A de Δ

$\vec{a}(A')_{/R} = \dfrac{d\vec{V}_{A/R}}{dt} = +R_A\omega \dfrac{d}{dt}\vec{e_\theta}$

$\vec{a}(A)_{/R} = \boxed{-R_A\omega^2 \vec{e_r}}$

$\|\vec{a}(A')\| = R_{A'}\omega^2$

A.N $\boxed{\vec{a}(A') = 150 m.s^{-2} \simeq 15\, g}$ (150/9,81)

c'est énorme

Scanné avec CamScanner