

CHAP. 07 : NOTIONS DE CINÉMATIQUE

Objectifs :

- 1 Différencier un solide d'un système déformable.
- 2 Comprendre la notion de référentiel, le caractère relatif du mouvement et le caractère absolu des distances et des intervalles de temps.
- 3 Etablir les expressions des composantes du vecteur-position, du vecteur-vitesse et du vecteur-accélération dans le seul cas des coordonnées cartésiennes et cylindriques.
- 4 Exprimer à partir d'un schéma le déplacement élémentaire dans les différents systèmes de coordonnées, construire le trièdre local associé et en déduire les composantes du vecteur-vitesse en coordonnées cartésiennes et cylindriques.
- 5 Choisir un système de coordonnées adapté au problème posé.
- 6 **Identifier les degrés de liberté d'un mouvement. Choisir un système de coordonnées adapté au problème.**
- 7 Exemple 1 : mouvement de vecteur-accélération constant : exprimer la vitesse et la position en fonction du temps. Obtenir la trajectoire en coordonnées cartésiennes.
- 8 Exemple 2 : mouvement circulaire uniforme et non uniforme : exprimer les composantes du vecteur-position, du vecteur-vitesse et du vecteur-accélération en coordonnées polaires. Identifier les liens entre les composantes du vecteur-accélération, la courbure de la trajectoire la norme du vecteur-vitesse et sa variation temporelle. Situer qualitativement la direction de \vec{a} dans la concavité d'une trajectoire plane.
- 9 Donner les expressions des vecteurs vitesse et accélération dans le repère de Frenet
- 10 Reconnaître et décrire une translation rectiligne, une translation circulaire.
- 11 Rotation d'axe Δ : Décrire la trajectoire d'un point quelconque du solide et exprimer sa vitesse en fonction de sa distance à l'axe et de la vitesse angulaire.
- 12 *Réaliser et exploiter quantitativement un enregistrement vidéo d'un mouvement : évolution temporelle des vecteurs \vec{v} et \vec{a} .*

I Cinématique du point

I.1. Notion de point matériel

Dans tous les exemples étudiés au lycée (ou en cours de SI), les systèmes mécaniques étudiés sont des solides

Def : un solide est un système indéformable c-à-d que la distance entre deux points quelconques reste la même au cours du tps

Rmq :

Le solide indéformable est un modèle : un solide parfaitement indéformable n'existe pas. Ce modèle n'est évidemment pas adapté pour décrire les systèmes déformables tels que les fluides, les milieux granulaires (tas de sable) ou encore les solides « mous » (pâte à modeler). Il exclut aussi tous les systèmes composés de plusieurs solides liés entre eux par des liaisons possédant au moins un degré de liberté : deux solides indéformables ne forment pas nécessairement un solide indéformable. Exemple : un vélo et ses roues

Pour repérer ce solide dans l'espace à 3 dimension et dans le cas le plus général, on a besoin : **de 3 coordonnées et de 3 angles**

En physique on simplifie souvent l'étude :

On néglige l'extension spatiale du solide et les éventuelles rotations de ce dernier sur lui même

On modélise alors le solide par un **point matériel** qui possède la même masse que le solide étudié mais qui est concentrée en un point.

Pour repérer un point matériel dans l'espace on a donc besoin que de 3 coordonnées (pas de 3 angles)

I.3. Repérage d'un point dans un plan

a Coordonnées cartésiennes

vecteur position \vec{OM} :

$$\vec{OM}(t) = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}_{\vec{e}_x, \vec{e}_y}$$

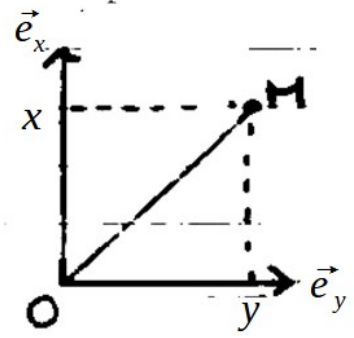
vecteur vitesse instantanée $\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt}$

$$\vec{v}(t) = \dot{x}(t)\vec{e}_x + \dot{y}(t)\vec{e}_y = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}_{\vec{e}_x, \vec{e}_y} = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \end{pmatrix}_{\vec{e}_x, \vec{e}_y}$$

vocabulaire important :

$v_x(t) = \vec{v}(t) \cdot \vec{e}_x = \dot{x}(t)$) est la **composante selon l'axe Ox du vecteur vitesse instantanée** .

C'est aussi la projection sur l'axe (Ox) du vecteur vitesse instantanée



$v_y(t)$ et $v_x(t)$ sont des grandeurs algébriques :

si $v_x(t) > 0$ le système se déplace dans le sens des x croissants

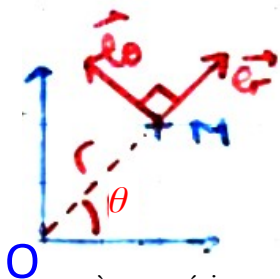
si $v_y(t) < 0$ le système se déplace dans le sens des y décroissants

Notation : on peut écrire de façon équivalente : $\dot{x}(t)$ ou $\frac{dx(t)}{dt}$ ou \dot{x}

vecteur accélération instantanée $\vec{a} = \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y$ ♥

b Coordonnées polaires

:animation



vecteurs de base : $\rightarrow \vec{e}_r = \frac{\vec{OM}(t)}{\|\vec{OM}(t)\|}$

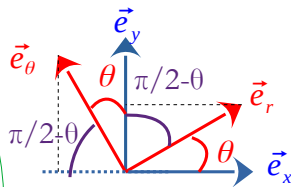
$\rightarrow \vec{e}_\theta$ est tourné de 90° (dans le sens trigonométrique) par rapport à \vec{e}_r

Rmq (vocabulaire) : \vec{e}_θ et \vec{e}_r sont des **vecteurs mobiles** à la différence des vecteurs du repère cartésien \vec{e}_x et \vec{e}_y , **leur direction peut changer au cours du temps dans le référentiel d'étude**

Rmq (notation) : on écrit aussi \vec{u}_r et \vec{u}_θ

Expression des vecteurs de base polaire dans la base cartésienne :

Angle θ entre \vec{e}_θ et \vec{e}_y
 \vec{e}_r et \vec{e}_y sont dans le même sens
 Angle de $\pi/2 - \theta$ entre \vec{e}_θ et \vec{e}_x
 \vec{e}_θ et \vec{e}_x **pas dans le même sens**



Angle θ entre \vec{e}_r et \vec{e}_x
 \vec{e}_r et \vec{e}_x sont dans le même sens
 Angle de $\pi/2 - \theta$ entre \vec{e}_r et \vec{e}_y
 \vec{e}_r et \vec{e}_y dans dans le même sens

On en déduit : $\vec{e}_r = \cos(\theta)\vec{e}_x + \sin(\theta)\vec{e}_y$ ♥ $\vec{e}_\theta = \dots\vec{e}_x + \dots$

On en déduit : $\vec{e}_\theta = \cos(\theta)\vec{e}_y - \sin(\theta)\vec{e}_x$ ♥
 $\vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_y = \cos(\theta)$
 $\vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_x = -\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = -\sin(\theta)$

On en déduit : $\vec{e}_r = \cos(\theta)\vec{e}_x + \sin(\theta)\vec{e}_y$ ♥ $\vec{e}_r \cdot \vec{e}_x = \cos(\theta)$
 $\vec{e}_r \cdot \vec{e}_y = +\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) = +\sin(\theta)$

De manière générale : Pour trouver le facteur devant \vec{e}_x quand j'exprime le vecteur \vec{a} dans la base \vec{e}_x, \vec{e}_y :
 On détermine l'angle α entre \vec{a} et \vec{e}_x . le facteur sera $\cos(\alpha)$ et on aura $\vec{a} = \cos(\alpha)\vec{e}_x + \dots$
 Parfois il est plus simple de déterminer l'angle α' entre \vec{a} et $-\vec{e}_x$. Le facteur sera $-\cos(\alpha')$ et on aura $\vec{a} = -\cos(\alpha')\vec{e}_x + \dots$

vecteur position \vec{OM} en coordonnées polaires : $\vec{OM} = r \vec{e}_r$ ♥

Dérivée temporelle des vecteurs de base polaire

$$\vec{e}_r = \cos(\theta) \vec{e}_x + \sin(\theta) \vec{e}_y \quad \text{donc} \quad \frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{d}{dt}(\cos(\theta) \vec{e}_x) + \frac{d}{dt}(\sin(\theta) \vec{e}_y) = \frac{d}{dt}(\cos(\theta)) \vec{e}_x + \frac{d}{dt}(\sin(\theta)) \vec{e}_y$$

Or θ est (à priori) aussi une fonction du temps on devrait écrire en toute rigueur $\cos(\theta(t))$ on dérive donc ici une fonction composée :

$$t \xrightarrow{u} \theta(t) \xrightarrow{v} \cos(\theta(t)) \quad \text{donc} \quad \cos(\theta(t)) = v \circ u(t) = v(u(t)) \quad \text{ainsi}$$

$$\frac{d}{dt}(\cos(\theta(t))) = v(u(t))' = u'(t) \times v'(u(t))$$

avec la notation physique $\frac{d}{dt}(\theta(t)) = \dot{\theta}(t)$ qui correspond à $\theta'(t)$ et comme $\cos(x)' = -\sin(x)$

on a finalement $\frac{d}{dt}(\cos(\theta(t))) = \dot{\theta}(t) \times (-\sin(\theta(t)))$ qu'on écrit plus simplement $\frac{d}{dt}(\cos(\theta)) = -\dot{\theta} \sin \theta$ ♥

De même $\frac{d}{dt}(\sin(\theta)) = \dot{\theta} \cos(\theta)$ ♥

ainsi $\frac{d\vec{e}_r}{dt} = -\dot{\theta} \sin \theta \vec{e}_x + \dot{\theta} \cos \theta \vec{e}_y = \dot{\theta} (-\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y)$ donc $\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta} \vec{e}_\theta$ ♥

De même $\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = \frac{d}{dt}(\cos(\theta) \vec{e}_y) + \frac{d}{dt}(-\sin(\theta) \vec{e}_x) = -\dot{\theta} \sin \theta \vec{e}_y - \dot{\theta} \cos \theta \vec{e}_x = -\dot{\theta} (\cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y)$

donc $\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta} \vec{e}_r$ ♥

vecteur vitesse instantanée en coordonnées polaires :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}(r \vec{e}_r) = \dot{r} \vec{e}_r + r(t) \frac{d\vec{e}_r}{dt} \quad \text{donc} \quad \vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

r(t) dépend du temps

vecteur accélération instantanée : $\vec{a}(t) = \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta)$

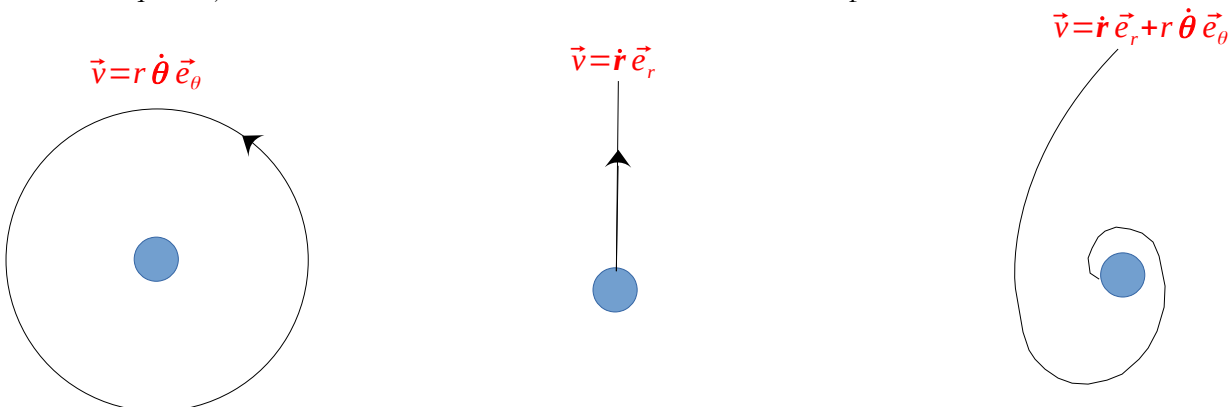
$$\vec{a}(t) = \ddot{r} \vec{e}_r + \dot{r} \frac{d\vec{e}_r}{dt} + \dot{r} \dot{\theta} \vec{e}_\theta + r \ddot{\theta} \vec{e}_\theta + r \dot{\theta} \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} \quad \longrightarrow \quad \vec{a}(t) = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \vec{e}_r + (r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta}) \vec{e}_\theta$$

Rappel sur les trajectoire :

- la trajectoire d'un point M est la courbe tangente à tout instant au vecteur vitesses instantanée de M

- la trajectoire dépend du référentiel d'étude ! (l'expression du vecteur vitesse aussi)

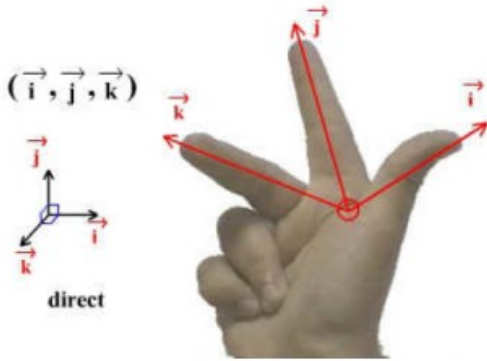
Pour chaque trajectoire autour de la terre, donner la forme attendu pour le vecteur vitesse instantanée



I.4. Repérage d'un point dans l'espace (et pas dans le plan !)

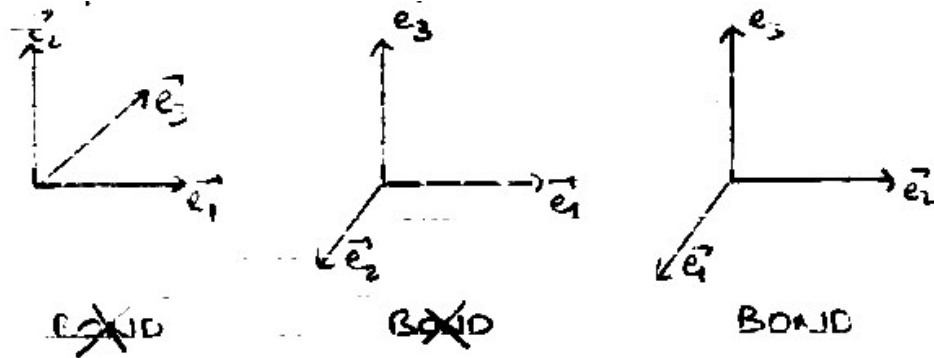
le système possède 3 degrés de liberté lorsqu'il se déplace dans l'espace alors qu'il en possède 2 quand il se déplace dans le plan

a Base orthonormée directe

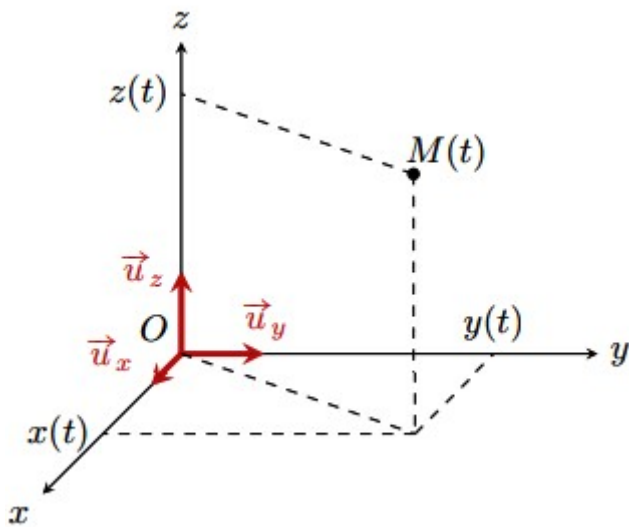


Un repère orthonormé $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est direct si ses trois vecteurs de base pris dans cet ordre ont des directions qui correspondent à celles des trois premiers doigts de la main droite.

Attention ! L'ordre des vecteurs a une importance ! Le repère $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est direct, mais le repère $(\vec{i}, \vec{k}, \vec{j})$ ne l'est pas.



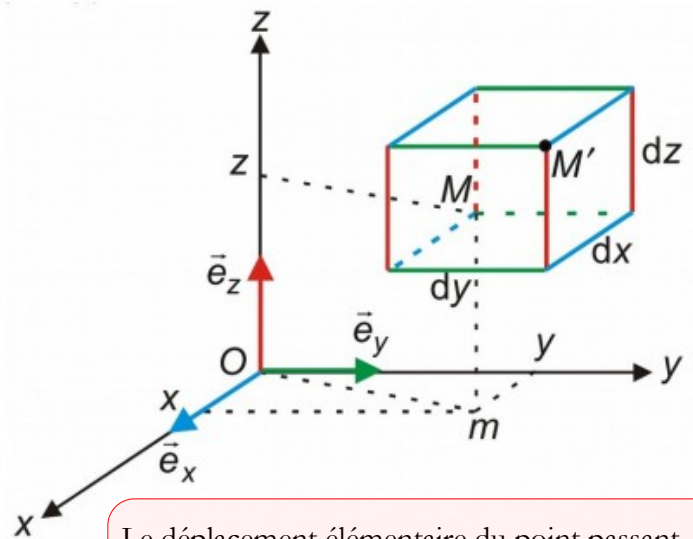
b Coordonnées cartésiennes



Vecteur position \vec{OM} :

$$\vec{OM} = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y + z(t)\vec{e}_z = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}_{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z}$$

Notion de déplacement élémentaire



Le déplacement élémentaire du point passant de M à M' infiniment voisin s'écrit :

$$d\vec{OM} = \vec{MM}'$$

En coordonnées cartésiennes :

$$d\vec{OM} = \vec{MM}' = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z$$

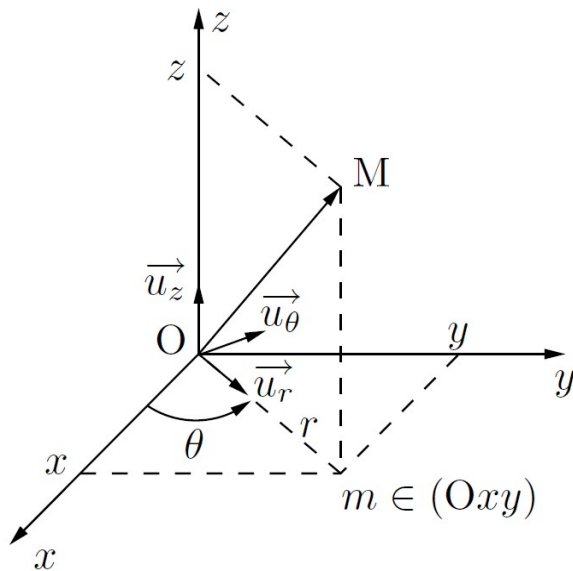
Rmq (notation) souvent on sous entend la dépendance en t : $\vec{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$

vecteur-vitesse instantanée en coordonnées cartésiennes : $\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{e}_x + \frac{dy}{dt}\vec{e}_y + \frac{dz}{dt}\vec{e}_z$

soit : $\vec{v} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z$ ♥

vecteur-accelération instantanée : $\vec{a} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z$ ♥

c Cordonnées cylindriques



$r = Om$ avec le point m qui est la projection orthogonal de M dans le plan (Oxy)
 et $\theta \in [0, 2\pi[$

coordonnées cylindriques = coordonnées polaires + hauteur z

vecteur position : $\vec{OM} = r \vec{u}_r + z \vec{u}_z$

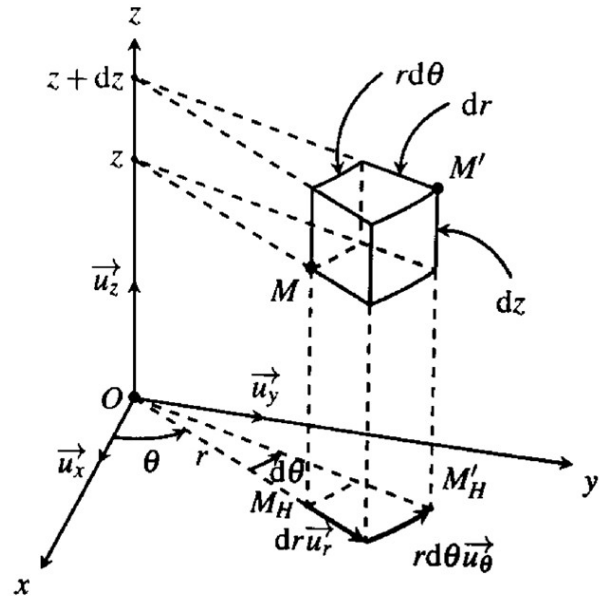
vecteur vitesse : $\vec{v}(t) = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{dr}{dt} \vec{u}_r + r \frac{d\theta}{dt} \vec{u}_\theta + \frac{dz}{dt} \vec{u}_z$

soit $\vec{v}(t) = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta + \dot{z} \vec{u}_z$

vecteur accélération instantanée en coordonnées cylindriques

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta + \dot{z} \vec{u}_z)$ soit

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \vec{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \vec{u}_\theta + \ddot{z} \vec{u}_z$$



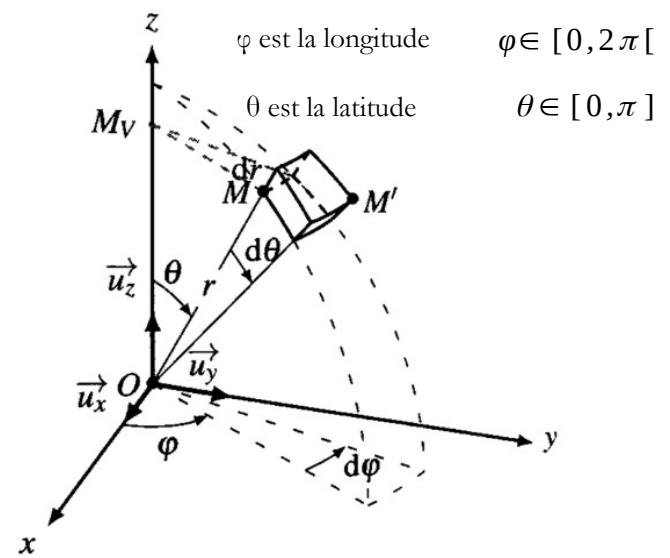
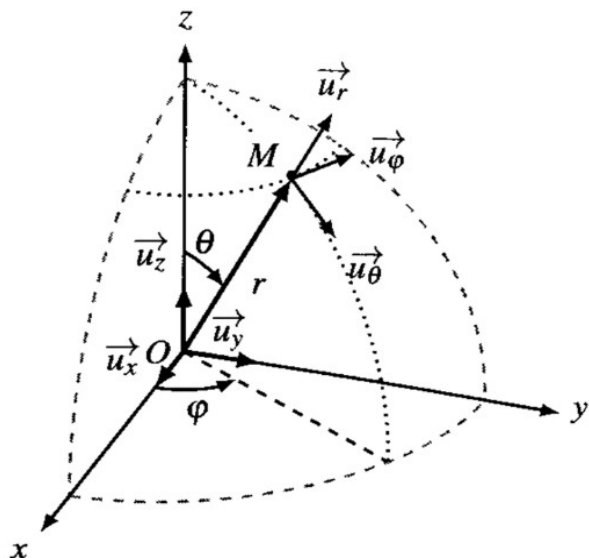
Le déplacement élémentaire du point passant de M à M' infiniment voisin s'écrit :

$$d\vec{OM} = \vec{MM}' = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{u}_z$$

Le déplacement élémentaire se décompose en 3 composantes :

- Une variation de la distance r pour arriver en M'
- Une rotation (variation de θ seul en conservant le même r)
- Une variation de z seul

d Cordonnées sphériques



φ est la longitude $\varphi \in [0, 2\pi[$

θ est la latitude $\theta \in [0, \pi]$

Vecteur déplacement élémentaire

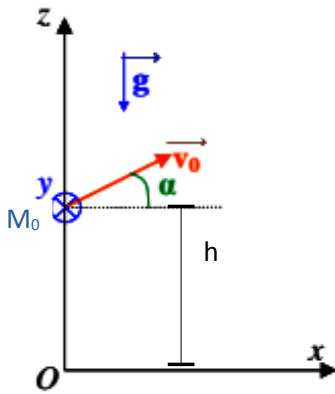
$$d\vec{OM} = dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + r \sin(\theta) d\varphi \vec{u}_\varphi$$

vecteur-position $\vec{OM} = r \vec{u}_r$

vecteur-vitesse $\vec{v} = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta + r \sin \theta \dot{\varphi} \vec{u}_\varphi$

II Étude de Mouvements simples

II.1 Mouvement de vecteur-accélération constant



On étudie le mouvement d'une balle de masse m, assimilée à son centre de masse M, en chute libre, lancée avec une vitesse initiale v₀ à une hauteur (ou côte) h de l'origine O du repère.

Système : {balle} référentiel : Terrestre, supposé galiléen (abrégé TSG)

Bilan des forces : chute libre (pas de force de frottement) donc seulement $\vec{P} = m\vec{g}$

a) Application de la 2^{ème} loi de Newton au système.

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = m\vec{a} = \sum \vec{F}_{ext} \Leftrightarrow m\vec{a} = m\vec{g} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{g}$$

\vec{g} est dirigé dans le sens opposé à l'axe Oz

$$\vec{a} = \vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} = -g\vec{e}_z \text{ avec } g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$$

$$\vec{a}(t) = -g\vec{e}_z \Leftrightarrow \begin{cases} a_x(t) = 0 \\ a_y(t) = 0 \\ a_z(t) = -g \end{cases}$$

b) Vecteur vitesse :

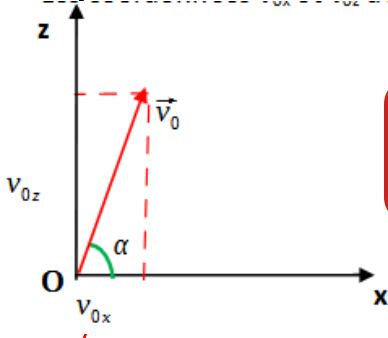
les composantes du vecteur vitesse instantané sont les primitives par rapport au temps des composantes du vecteur accélération instantanées

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{OM}}{dt}(t) = \begin{cases} v_x(t) = C_1 \\ v_y(t) = C_2 \\ v_z(t) = -gt + C_3 \end{cases} = C_1\vec{e}_x + C_2\vec{e}_y + (-gt + C_3)\vec{e}_z$$

Avec C₁, C₂, C₃ des constantes que l'on peut déterminer grâce aux conditions initiales

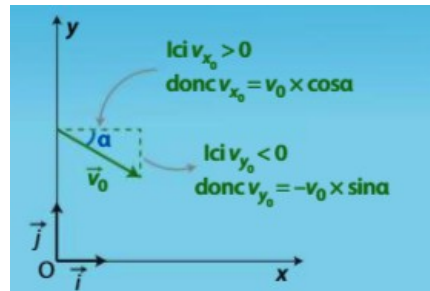
Soit un vecteur \vec{v}_0 de norme v₀ qui forme un angle alpha avec l'axe Ox.

Les coordonnées v_{0x} et v_{0z} de ce vecteur selon les axes Ox et Oz sont données par :



$$\vec{v}_0 = \begin{cases} v_{0x} = v_0 \times \cos(\alpha) \\ v_{0z} = v_0 \times \sin(\alpha) \end{cases}$$

Attention au sens du vecteur !



$$\vec{v}_0 = \begin{cases} v_{0x} = v_0 \times \cos(\alpha) \\ v_{0y} = -v_0 \times \sin(\alpha) \end{cases}$$

Utilisation de la condition initiale sur la vitesse

À l'instant t=0 $\vec{v}(t=0) = \vec{v}_0 \Leftrightarrow \begin{cases} v_x(t=0) = v_{0x} = v_0 \times \cos(\alpha) \\ v_y(0) = 0 \\ v_z(t=0) = v_{0z} = v_0 \times \sin(\alpha) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} C_1 = v_0 \cos \alpha \\ C_2 = 0 \\ g \times 0 + C_3 = v_0 \times \sin(\alpha) \end{cases}$

finalement

$$\vec{v}(t) = \begin{cases} v_x(t) = v_0 \times \cos(\alpha) \\ v_y(t) = 0 \\ v_z(t) = -g \times t + v_0 \times \sin(\alpha) \end{cases}$$

c) Détermination des coordonnées (lois horaires du mouvement) :

On primitive le vecteur vitesse pour obtenir le vecteur position

$$\vec{OM}(t) = \begin{cases} x(t) = v_0 \times \cos(\alpha) \times t + C_1' \\ y(t) = C_2' \\ z(t) = -\frac{1}{2} g \times t^2 + v_0 \times \sin(\alpha) \times t + C_3' \end{cases} \quad \text{en utilisant les conditions initiales } \vec{OM}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{pmatrix} = h \vec{e}_z$$

on obtient les trois **équations horaires du mouvement**

$$\vec{OM}(t) = \begin{cases} x(t) = v_0 \times \cos(\alpha) \times t \\ y(t) = 0 \\ z(t) = -\frac{1}{2} g \times t^2 + v_0 \times \sin(\alpha) \times t + h \end{cases}$$

Rmq : $y=0$ à tout instant : le mvt s'effectue dans le plan OXZ

Ssi $v_0 = 0$ (vitesse initiale nulle) alors $x = 0$ à tout instant et $z(t) = -\frac{1}{2} g \times t^2 + h$: **le mouvement est vertical**

d) Détermination de la trajectoire du système.

La trajectoire du système est la courbe représentative des positions successives du système.

Ici, c'est la courbe représentative la fonction d'équation $z=f(x)$

Rmq: Il ne faut pas confondre **trajectoire $z=f(x)$** et les **équations horaires $z=f(t)$, $x=g(t)$**

On supprime la variable temps dans le système d'équations horaires :

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \times \cos(\alpha) \times t \\ z(t) = -\frac{1}{2} g \times t^2 + v_0 \times \sin(\alpha) \times t + h \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = \frac{x}{v_0 \times \cos(\alpha)} \\ z(t) = -\frac{1}{2} g \times \left(\frac{x}{v_0 \times \cos(\alpha)}\right)^2 + v_0 \times \sin(\alpha) \times \frac{x}{v_0 \times \cos(\alpha)} + h \end{cases}$$

On réinjecte l'expression de t en fonction de x dans l'expression de z(t) :

$$z(x) = -\frac{1}{2} g \times \left(\frac{x}{v_0 \times \cos(\alpha)}\right)^2 + v_0 \times \sin(\alpha) \times \frac{x}{v_0 \times \cos(\alpha)} + h$$

donc $z(x) = \frac{-g x^2}{2 v_0^2 \times \cos(\alpha)^2} + \frac{v_0 \times \sin(\alpha)}{v_0 \times \cos(\alpha)} \times x + h$ or $\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \tan(\alpha)$ soit $z(x) = \frac{-g x^2}{2 v_0^2 \times \cos(\alpha)^2} + \tan(\alpha) x + h$

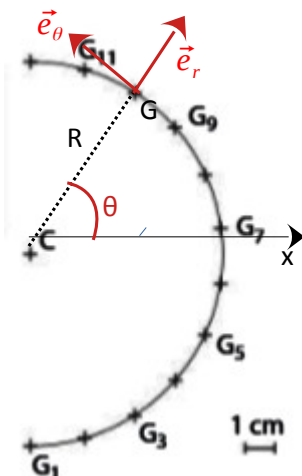
Cette équation a pour représentation graphique une parabole, on dit que la trajectoire est parabolique.

II.2 Mouvement circulaire

a) mouvement circulaire uniforme

Circulaire → la distance OG est constante au cours du temps

Uniforme → la norme du vecteur vitesse est constante au cours du temps $v = \|\vec{v}\| = v_0 = cste$



Vecteur position :

$$\vec{OG} = R \vec{e}_r \quad \text{0 car mvt circ}$$

Vecteur vitesse :

$$\vec{v} = \frac{d}{dt}(\vec{OG}) = \frac{dR}{dt} \vec{e}_r + R \frac{d\vec{e}_r}{dt} = R \dot{\theta} \vec{e}_\theta \Leftrightarrow \vec{v} = R \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

Comme la vitesse est constante

$$\|\vec{v}\| = v_0 \Leftrightarrow \|R \dot{\theta} \vec{e}_\theta\| = v_0 \Leftrightarrow R \dot{\theta} = v_0 \Leftrightarrow \dot{\theta} = \frac{v_0}{R}$$

La vitesse angulaire est aussi constante

On note souvent $\omega_0 = \dot{\theta} = \frac{v_0}{R}$

Vocabulaire : comme \vec{v} est orthogonal au rayon R, on dit que le vecteur vitesse est **orthoradial**

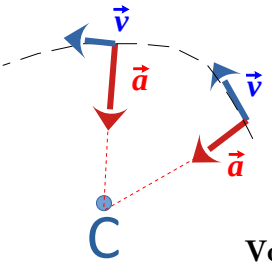
vecteur accélération : $\vec{a} = \frac{d}{dt}(\vec{v}) = \frac{dR}{dt} \dot{\theta} \vec{e}_\theta + R \ddot{\theta} \vec{e}_\theta + R \dot{\theta} \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = R \dot{\theta} (-\dot{\theta} \vec{e}_r) \Leftrightarrow \vec{a} = -R \dot{\theta}^2 \vec{e}_r$

0 car mvt circulaire
0 car mvt uniforme

En fonction de v_0 et R : $\vec{a} = -R \left(\frac{v_0}{R}\right)^2 \vec{e}_r \Leftrightarrow \vec{a} = \frac{-v_0^2}{R} \vec{e}_r$

En fonction de ω_0 et R : $\vec{a} = -R \omega_0^2 \vec{e}_r$

$\omega_0 = \dot{\theta} = \frac{v_0}{R}$



Attention ! Mouvement uniforme ne veut pas dire accélération nulle :
Ici le vecteur accélération est constant en norme par contre la direction varie dans la base cartésienne : \vec{a} est dirigé selon $-\vec{e}_r$

Vocabulaire : comme \vec{a} est dirigé vers le centre et colinéaire à \vec{e}_r , on dit que l'accélération est **centripète (dirigée dans la concavité de la trajectoire)**

Rmq (HP) : Un objet de masse m en M suivant cette trajectoire subit une force dite centrifuge telle que :
 $F_{centrifuge} = -m \vec{a} = m \frac{v_0^2}{R} \vec{e}_r$: C'est pour cette raison qu'on est poussé vers l'extérieur dans une voiture qui tourne : plus virage est serré plus la force est grande (dépendance en $1/R$), plus la vitesse est grande plus la force est grande (dépendance en v_0^2)

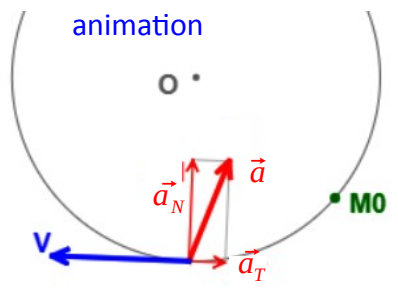
b) Mouvement circulaire non uniforme

On a toujours $\vec{v} = R \dot{\theta} \vec{e}_\theta$

Par contre $\vec{a} = \frac{d}{dt}(\vec{v}) = \frac{dR}{dt} \dot{\theta} \vec{e}_\theta + R \ddot{\theta} \vec{e}_\theta + R \dot{\theta} \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = R \ddot{\theta} \vec{e}_\theta + R \dot{\theta} (-\dot{\theta} \vec{e}_r) \Leftrightarrow \vec{a} = R \ddot{\theta} \vec{e}_\theta - R \dot{\theta}^2 \vec{e}_r$

0 car mvt circulaire

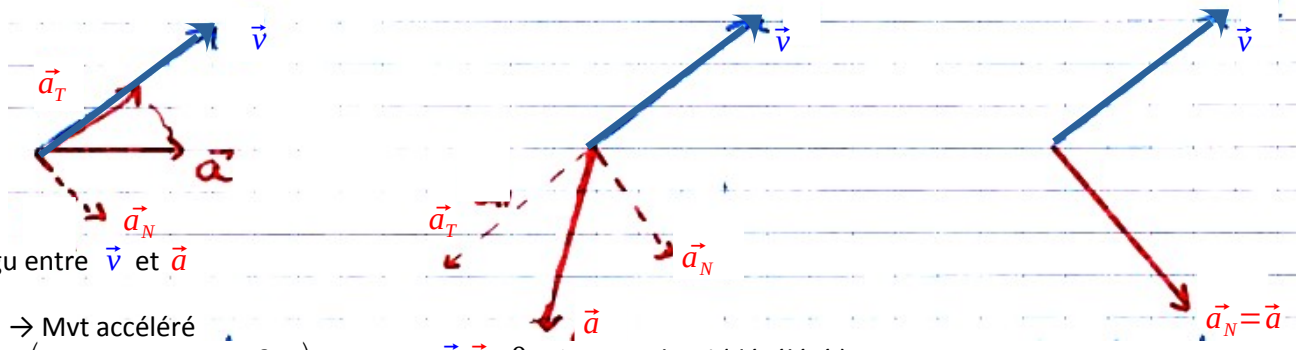
que l'on peut aussi écrire $\vec{a} = \underbrace{\frac{dv}{dt} \vec{e}_\theta}_{\text{Accélération tangentielle } \vec{a}_T} + \underbrace{-\frac{v^2}{R} \vec{e}_r}_{\text{Accélération centripète } \vec{a}_N}$



Comme l'accélération angulaire $\ddot{\theta}$ n'est pas nulle : le vecteur accélération possède une composante tangentielle (c'est à dire selon \vec{e}_θ)

c) Interprétation du vecteur a

Seule la composante tangentielle du vecteur accélération permet de modifier la norme du vecteur vitesse



Angle aigu entre \vec{v} et \vec{a} : $\vec{v} \cdot \vec{a} > 0 \rightarrow$ Mvt accéléré

Angle obtus : $\vec{v} \cdot \vec{a} < 0 \rightarrow$ Mvt ralenti (décélééré)

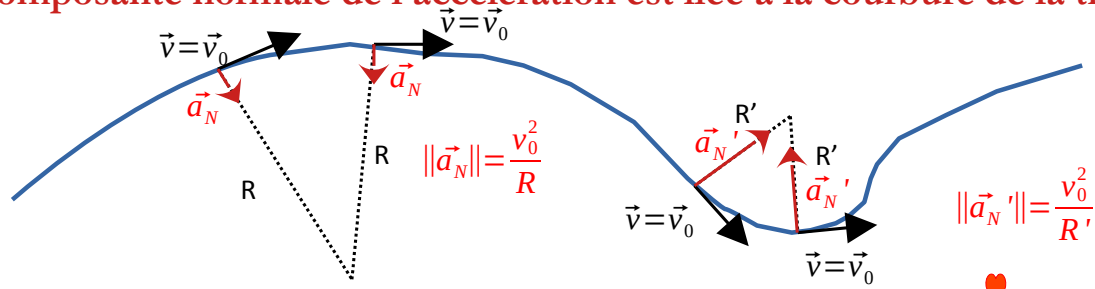
Angle droit : $\vec{v} \cdot \vec{a} = 0 \rightarrow$ Mvt uniforme

$\vec{v} \cdot \vec{a} = r \dot{\theta} \vec{e}_\theta \cdot \left(\frac{dv}{dt} \vec{e}_\theta + -\frac{v^2}{R} \vec{e}_r \right)$

$\vec{v} \cdot \vec{a} = r \dot{\theta} \frac{dv}{dt}$ $\vec{v} \cdot \vec{a} > 0 \Leftrightarrow r \dot{\theta} \frac{dv}{dt} > 0 \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} > 0$

$\vec{v} \cdot \vec{a} = 0 \Rightarrow \vec{a}_T = \frac{dv}{dt} \vec{e}_\theta = \vec{0} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = 0 \Rightarrow v = cste$

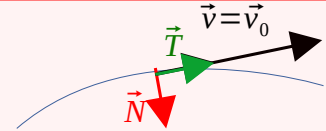
Rmq : la **composante normale de l'accélération est liée à la courbure de la trajectoire**



Si a_N est d'autant plus grand que le rayon de courbure local R est petit
Ici $R > R'$ donc $a_{N'} > a_N$

Repère de Frenet : on utilise parfois le repère de Frenet pour d'écrire le mouvement :

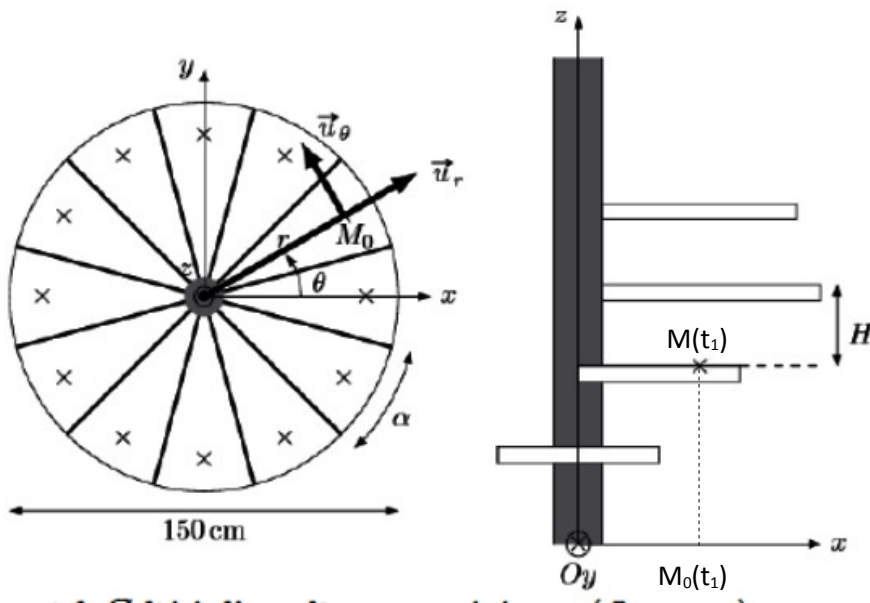
- \vec{T} est le vecteur unitaire tangent à la trajectoire et orienté dans le sens du mouvement (donc de \vec{v})
- \vec{N} est le vecteur unitaire normale à la trajectoire orienté dans le sens de la concavité (donc de \vec{a}_N)



On a donc dans ce repère :
$$a_{/Frenet} = \frac{dv}{dt} \vec{T} + \frac{v^2}{R} \vec{N} \quad \text{et} \quad v_{/Frenet} = r \dot{\theta} \vec{T} + \dot{r} \vec{N}$$

Bien adapté quand on ne sait pas a priori si le mouvement est circulaire

II.3 Mouvement hélicoïdal



Un escalier en colimaçon est constitué de quatorze marches régulièrement disposées autour d'un pilier central.

Une personne assimiler à un point M monte d'une démarche régulière à raison d'une marche par seconde en restant à $r = 60$ cm de Oz

sur la figure de gauche M_0 est le projeté ortho de M suivant le plan perpendiculaire à Oz . Les croix représentent les positions successives de M_0 au niveau de chaque marche

la figure fait apparaître l'angle des marches : $\alpha = 30^\circ$

Q1 On donne $H = 20$ cm Estimer la dérivée temporelle \dot{z} de la cote (altitude) z du point M .
Le mouvement est-il accéléré suivant Oz ? Proposer une expression de $z(t)$ en prenant $z=0$ à $t=0$ s

une marche par seconde donc $\dot{z} \approx \frac{H}{\Delta t}$ avec $\Delta t = 1$ s $\dot{z} \approx 0,2$ m/s le mouvement n'est pas accéléré selon z

En primitivant $z(t) = 0,2t + z(0) = 0,2t$

Q2 Nous nous intéressons à la rotation de M_0 autour du pilier. Qualifier le mouvement de M_0 donner la valeur de la vitesse angulaire $\dot{\theta}$

le mouvement de M_0 est circulaire uniforme, chaque seconde il monte d'une marche donc l'angle $\theta(t)$ augmente

de 30° ainsi $\dot{\theta} \approx \frac{\theta(t+\Delta t) - \theta(t)}{\Delta t} = \frac{\alpha}{\Delta t}$ A.N $\dot{\theta} \approx \frac{30 \times \pi}{180} = 1,4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

Q3 Exprimer les vecteurs vitesse et accélération de M_0 dans le référentiel \mathcal{R} . Calculer la norme de la vitesse.

En coordonnées polaires : $\vec{v}(M_0) = \frac{d}{dt}(r\vec{e}_r) = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta = r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ A.N $\|\vec{v}(M_0)\| = 0,2 \times 1,4 = 2,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

$$\vec{a}(M_0) = \frac{d}{dt}(r\dot{\theta}\vec{e}_\theta) = -r\dot{\theta}^2\vec{e}_r$$

Q4 Donner le lien entre \dot{z} et $\dot{\theta}$

Q5 Exprimer dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$, les vecteurs vitesse et accélération de M dans \mathcal{R}

$$\vec{v}(M) = \frac{d}{dt}(r\vec{e}_r + z\vec{e}_z) = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z = r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z$$

$$\vec{a}(M) = \frac{d}{dt}(r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z) = -r\dot{\theta}^2\vec{e}_r$$

III Cinématique du solide : exemples simples

III.1) Translation

Déf : Un solide est en translation lorsque $\forall (A, B) \in \text{Solide}, \vec{v}(A) = \vec{v}(B)$

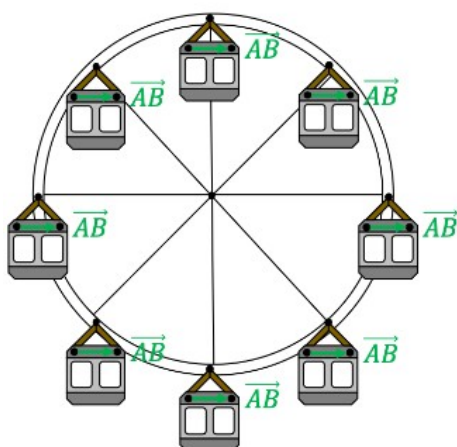
Rmq : La norme de la vitesse peut varier au cours du temps, mais elle varie de la même façon pour tous les points !

a) Translations rectilignes

Def : un solide a un mouvement de translation rectiligne dans un référentiel donnée lorsque les trajectoires des points du solide sont des droites parallèles.

Propriété : Un solide est en translation lorsque les directions du repère lié au solide sont liées par rapport au référentiel d'étude

Exemples : une valise sur un tapis roulant (dans le référentiel terrestre), un ascenseur (dans le référentiel terrestre)



b) translation circulaire

Def : Une translation est circulaire (dans un référentiel donnée) lorsque chaque point du solide a un mouvement circulaire, de même rayon mais de centre différent

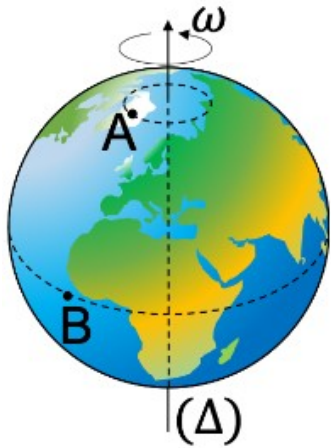
Exemple : cabine de la grande roue du Prado

Propriété :

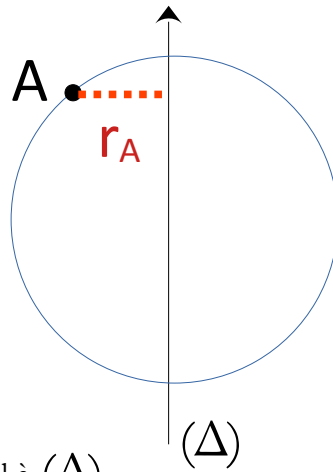
Les axes et les vecteurs reliant deux points du solide (comme \vec{AB}) restent identiques lors de la translation circulaire

III.2) Rotation autour d'un axe fixe

Déf : Un solide est en rotation autour d'un axe fixe Δ si tous les points du solide sont en mouvement circulaire autour de l'axe Δ



Vue de haut du plan normal à (Δ)



Soit un solide en rotation autour d'un axe Δ à la vitesse angulaire ω

Soit A un point du solide, à la distance r_A de l'axe Δ

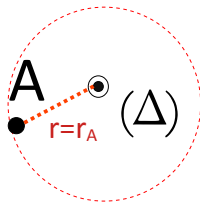
On a $\omega = \dot{\theta}$ (Indépendant du point A considérée)

En coordonnées cylindriques dans le plan normal à Δ et passant par A :

$$\vec{V}(A) = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{z} \vec{e}_z$$

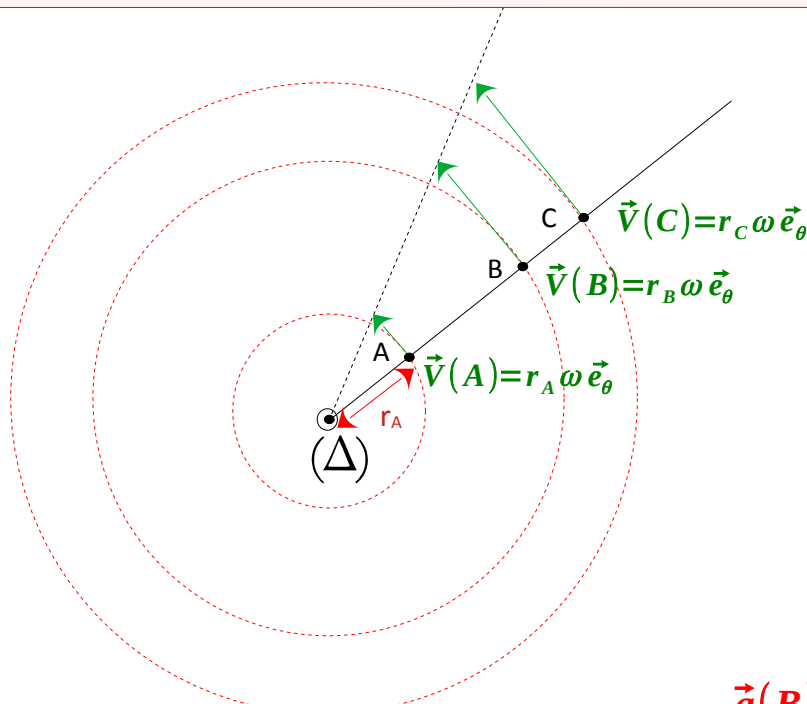
Comme $r = r_A = \text{cste}$, $\omega = \dot{\theta}$ et $\dot{z} = 0$

$$\vec{V}(A) = r \omega \vec{e}_\theta$$



Trajectoire de A

Champ de vitesse : Tous les points du solide possèdent un \vec{v} orthoradial de norme d'autant plus importante que le point est éloigné de l'axe . à vitesse angulaire constante, la norme est proportionnelle à la distance au centre



Champ d'accélération : à vitesse angulaire ω constante : $\vec{a}(B) = -r_B \omega^2 \vec{e}_r$

Application : accélération dans le réf géocentrique d'un point B au niveau de l'équateur sur la Terre.

Rayon de la Terre : $R_T = 6370 \text{ km}$ vitesses angulaire de rotation $\omega = \frac{(2\pi)}{24 \times 60 \times 60} = 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$

donc $\vec{a}(B) = -R_T \omega^2 \vec{e}_r = -3,37 \cdot 10^{-2} \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \vec{e}_r$ ce qui est très faible devant l'accélération de la pesanteur