CHAP. 07 : NOTIONS DE CINÉMATIQUE

Objectifs ♥

1 Différencier un solide d'un système déformable.

2 Comprendre la notion de référentiel, le caractère relatif du mouvement et le caractère absolu des distances et des intervalles de temps.

3 Établir les expressions des composantes du vecteur position, du vecteur vitesse et du vecteur accélération dans le seul cas des coordonnées cartésiennes et cylindriques.

4 Exprimer à partir d'un schéma le déplacement élémentaire dans les différents systèmes de coordonnées, construire le trièdre local associé et en déduire les composantes du vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes et cylindriques.

5 Choisir un système de coordonnées adapté au problème posé.

6 Identifier les degrés de liberté d'un mouvement. Choisir un système de coordonnées adapté au problème.

7 Exemple 1 : mouvement de vecteur accélération constant : exprimer la vitesse et la position en fonction du temps. Obtenir la trajectoire en coordonnées cartésiennes.

8 Exemple 2 : mouvement circulaire uniforme et non uniforme : exprimer les composantes du vecteur position, du vecteur vitesse et du vecteur accélération en coordonnées polaires. Identifier les liens entre les composantes du vecteur accélération, la courbure de la trajectoire, la norme du vecteur vitesse et sa variation temporelle. Situer qualitativement la direction de $\vec{a}$ dans la concavité d'une trajectoire plane.

9 Donner les expressions des vecteurs vitesse et accélération dans le repère de Frenet.

10 Reconnaître et décrire une translation rectiligne, une translation circulaire.

11 Rotation d'axe Δ : décrire la trajectoire d'un point quelconque du solide et exprimer sa vitesse en fonction de sa distance à l'axe et de la vitesse angulaire.

12 *Réaliser et exploiter quantitativement un enregistrement vidéo d'un mouvement : évolution temporelle des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{a}$.*

I Cinématique du point

1.1 Notion de point matériel

Dans tous les exemples étudiés au lycée (ou en cours de SI), les systèmes mécaniques étudiés sont des solides.

Définition

Un solide est un système indéformable, c'est-à-dire que la distance entre deux points quelconques reste la même au cours du temps.

Remarque : le solide indéformable est un **modèle** : un solide parfaitement indéformable n'existe pas. Ce modèle n'est évidemment pas adapté pour décrire les systèmes déformables tels que les fluides, les milieux granulaires (tas de sable) ou encore les solides « mous » (pâte à modeler). Il exclut aussi tous les systèmes composés de plusieurs solides liés entre eux par des liaisons possédant au moins un degré de liberté : deux solides indéformables ne forment pas nécessairement un solide indéformable (exemple : un vélo et ses roues).

Pour repérer ce solide dans **l'espace à 3 dimensions** et dans le cas le plus général, on a besoin **de 3 coordonnées et de 3 angles**.

En physique, on simplifie souvent l'étude :

Modèle du point matériel

On néglige l'extension spatiale du solide et ses éventuelles rotations sur lui-même.

On modélise alors le solide par un **point matériel** qui possède la même masse que le solide étudié, mais concentrée en un point.

Pour repérer un point matériel dans l'espace, on n'a donc besoin que de 3 coordonnées (pas de 3 angles).

1.2 Description du mouvement d'un point

a) Notion de référentiel

La description d'un mouvement dépend de l'observateur : **on bouge toujours par rapport à quelque chose**.

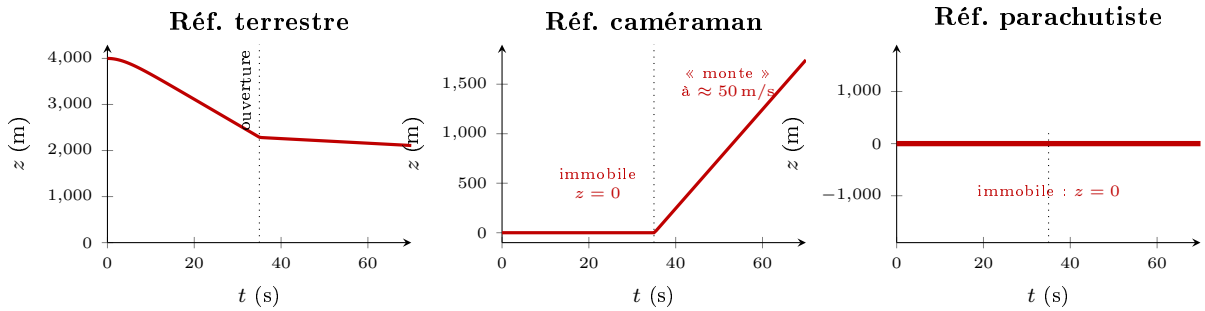
Vidéo : un même saut vu dans trois référentiels





La vidéo est filmée par un **caméraman en chute libre** qui saute avec un parachutiste. Pendant la chute, le parachutiste semble **immobile** devant la caméra ; puis il ouvre son parachute et **semble partir vers le haut** à toute vitesse !
Pourtant, dans le référentiel terrestre, le parachutiste n'est jamais monté : il a seulement *ralenti*, alors que le caméraman a continué à tomber.
À faire : on note $z(t)$ la position du parachutiste sur un axe vertical **orienté vers le haut**. Tracer l'allure de $z(t)$ dans chacun des trois référentiels. Que vaut $\dot{z}(t)$ dans chaque cas ?

Modèle : chute libre avec frottements (vitesse limite $\approx 55\,\text{m/s}$), ouverture du parachute à $t_0 = 35\,\text{s}$, vitesse limite sous voile $\approx 5\,\text{m/s}$.



- **Référentiel terrestre :** z diminue toujours ($\dot{z} < 0$) ; pente de plus en plus forte puis constante ($\dot{z} \approx -55\,\text{m/s}$), puis, après l'ouverture, pente faible ($\dot{z} \approx -5\,\text{m/s}$).
- **Référentiel du caméraman :** $z = 0$ tant que les deux tombent ensemble ($\dot{z} = 0$), puis z augmente : $\dot{z} > 0$, le parachutiste « monte » à $\approx 50\,\text{m/s}$ par rapport au caméraman.
- **Référentiel du parachutiste :** il est immobile dans son propre référentiel : $z(t) = 0$ et $\dot{z} = 0$ à tout instant.

Le mouvement (la trajectoire, la vitesse, le signe de $\dot{z}$...) dépend du référentiel !

Définition

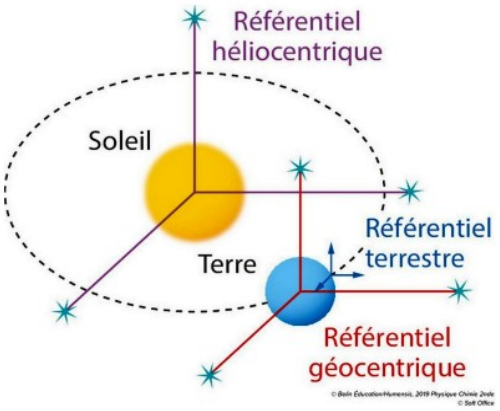
Lorsque l'on décrit un mouvement, il faut donc choisir un référentiel.

Déf : un référentiel est un système d'axes muni d'une horloge.

Il y a donc une infinité de référentiels imaginables. En pratique, il y a deux façons de définir un référentiel : ou bien en donnant un solide de référence (c'est par exemple le cas du référentiel ter-

restre), ou bien en donnant un point fixe et trois directions de référence (donc en pratique des points) : c'est par exemple le cas des référentiels géocentrique et héliocentrique.

Référentiel	**Origine du repère**	**Axes**
Terrestre (ou réf. du laboratoire)	Un point de la Terre ou « proche » de la Terre	Liés à la Terre
Géocentrique	Centre de masse de la Terre	Pointent vers 3 étoiles lointaines
Héliocentrique (ou de Kepler)	Centre de masse du Soleil	
De Copernic	Centre de masse du système solaire	



△ Attention

Il ne faut pas confondre le **référentiel**, c'est-à-dire le système de référence (notion physique), **avec le repère**, c'est-à-dire **l'outil géométrique** qui sert à décrire le mouvement (notion mathématique). Il y a une infinité de repères différents qui peuvent être associés à un même référentiel. En SI, quasiment tous les mouvements sont implicitement étudiés dans le référentiel terrestre et seul le repère est précisé, mais en physique on se forcera à définir le référentiel.

b) Vecteurs position, vitesse et accélération

♥

$\overrightarrow{OM}$ est le **vecteur position** : il est homogène à une longueur.

$\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}$ est le **vecteur vitesse instantanée**.

$\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2}$ est le **vecteur accélération instantanée**.

Toutes ces grandeurs dépendent du référentiel d'étude ! C'est pour cette raison qu'il est important de le préciser avant de mener une étude cinématique.

Remarque (vocabulaire) : il ne faut pas confondre vecteur vitesse $\vec{v}$ et « vitesse ».

La vitesse peut être la norme du vecteur vitesse : $v = \|\vec{v}\|$
ou la projection du vecteur vitesse sur un axe : $v = \vec{v} \cdot \vec{e}_x$ (dans ce cas, elle peut être négative).

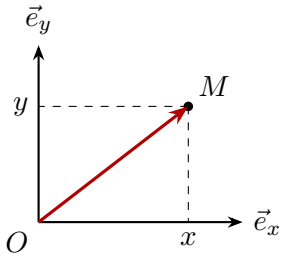
Cela a une importance pour la caractérisation des mouvements :

- « **Mouvement rectiligne** » = **la trajectoire du point est une droite.** ♥
  En termes de vitesse : **la direction de $\vec{v}$ ne varie pas**, par contre la norme de la vitesse peut varier.
- « **Mouvement uniforme** » = **la trajectoire est parcourue à vitesse constante.** ♥
  En termes de vitesse : $v = \|\vec{v}\| = \text{cste}$, **mais le vecteur accélération n'est pas forcément nul !** (le vecteur vitesse ne varie pas en norme, mais sa direction peut varier au cours du temps).

1.3 Repérage d'un point dans un plan

a) Coordonnées cartésiennes

Vecteur position : $\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\,\vec{e}_x + y(t)\,\vec{e}_y = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}_{\vec{e}_x,\vec{e}_y}$



Vecteur vitesse instantanée : $\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}$

$\vec{v}(t) = \dot{x}(t)\,\vec{e}_x + \dot{y}(t)\,\vec{e}_y = \begin{pmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{pmatrix}_{\vec{e}_x,\vec{e}_y} = \begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \end{pmatrix}_{\vec{e}_x,\vec{e}_y}$

Vocabulaire important : $v_x(t) = \vec{v}(t) \cdot \vec{e}_x = \dot{x}(t)$ **est la composante selon l'axe** (Ox) **du vecteur vitesse instantanée.**

C'est aussi la projection sur l'axe (Ox) du vecteur vitesse instantanée.

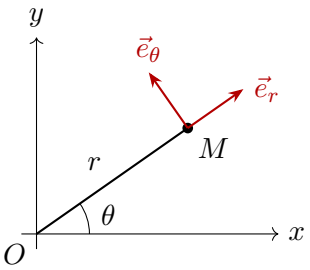
$v_y(t)$ **et** $v_x(t)$ **sont des grandeurs algébriques :**

- **si** $v_x(t) > 0$**, le système se déplace dans le sens des** x **croissants ;**
- **si** $v_y(t) < 0$**, le système se déplace dans le sens des** y **décroissants.**

Notation : on peut écrire de façon équivalente $\dot{x}(t)$, $\dfrac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}$ ou $\dot{x}$.

$$\boxed{\vec{a} = \frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t^2} = \ddot{x}\,\vec{e}_x + \ddot{y}\,\vec{e}_y} \heartsuit$$

b) Coordonnées polaires



Vecteurs de base : $\vec{e}_r = \dfrac{\overrightarrow{OM}(t)}{\|\overrightarrow{OM}(t)\|}$;

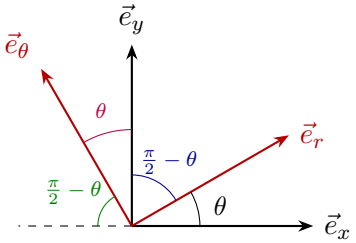
$\vec{e}_\theta$ est tourné de 90° (dans le sens trigonométrique) par rapport à $\vec{e}_r$.

$\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ sont **unitaires** : $\|\vec{e}_r\| = \|\vec{e}_\theta\| = 1$ (et orthogonaux : la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ est orthonormée directe).

Remarque (vocabulaire) : $\vec{e}_\theta$ et $\vec{e}_r$ sont des **vecteurs mobiles**, à la différence des vecteurs du repère cartésien $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$: **leur direction peut changer au cours du temps dans le référentiel d'étude.** ♥

Remarque (notation) : on écrit aussi $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$.

Expression des vecteurs de base polaire dans la base cartésienne :



Pour $\vec{e}_r$: l'angle entre $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_x$ est θ ; l'angle entre $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_y$ est $\frac{\pi}{2} - \theta$ (et $\vec{e}_r$, $\vec{e}_y$ sont dans le même sens) :

$$\boxed{\vec{e}_r = \cos\theta\,\vec{e}_x + \sin\theta\,\vec{e}_y} \heartsuit$$

car $\vec{e}_r \cdot \vec{e}_y = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$.

Pour $\vec{e}_\theta$: l'angle entre $\vec{e}_\theta$ et $\vec{e}_y$ est θ ; l'angle entre $\vec{e}_\theta$ et $\vec{e}_x$ est $\frac{\pi}{2} + \theta$ ($\vec{e}_\theta$ et $\vec{e}_x$ **pas dans le même sens**) :

$$\boxed{\vec{e}_\theta = -\sin\theta\,\vec{e}_x + \cos\theta\,\vec{e}_y} \heartsuit$$

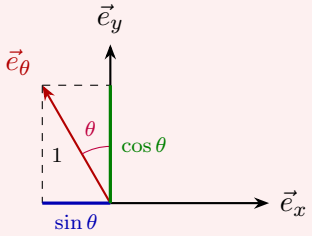
car $\vec{e}_\theta \cdot \vec{e}_x = -\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = -\sin\theta$.

Méthode de projection

Pour trouver le facteur devant $\vec{e}_x$ quand on exprime un vecteur unitaire $\vec{u}$ dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$: on détermine l'angle α entre $\vec{u}$ et $\vec{e}_x$; le facteur sera $\cos\alpha$ et on aura $\vec{u} = \cos\alpha\,\vec{e}_x + \ldots$
Parfois il est plus simple de déterminer l'angle α' entre $\vec{u}$ et $-\vec{e}_x$: le facteur sera $-\cos\alpha'$ et on aura $\vec{u} = -\cos\alpha'\,\vec{e}_x + \ldots$

Autre méthode : triangle rectangle + vérification

1. Valeurs absolues avec le triangle rectangle. On projette $\vec{u}$ (de norme 1) sur les deux axes : on obtient un triangle rectangle d'hypoténuse 1. Le côté **adjacent** à l'angle connu vaut cos, le côté **opposé** vaut sin. On ne s'occupe pas encore des signes.
Exemple pour $\vec{e}_\theta$: l'angle θ est entre $\vec{e}_\theta$ et $\vec{e}_y$, donc la composante sur $\vec{e}_y$ (adjacent) vaut $\cos\theta$ et celle sur $\vec{e}_x$ (opposé) vaut $\sin\theta$ en valeur absolue.



2. Signes lus sur la figure. $\vec{e}_\theta$ pointe vers les x négatifs et les y positifs : $\vec{e}_\theta = -\sin\theta\,\vec{e}_x + \cos\theta\,\vec{e}_y$.

3. Vérification avec des cas particuliers. Pour $\theta = 0$ on doit trouver $\vec{e}_\theta = \vec{e}_y$: $-\sin 0\,\vec{e}_x + \cos 0\,\vec{e}_y = \vec{e}_y$ ✓. Pour $\theta = \frac{\pi}{2}$ on doit trouver $\vec{e}_\theta = -\vec{e}_x$: $-\sin\frac{\pi}{2}\,\vec{e}_x + \cos\frac{\pi}{2}\,\vec{e}_y = -\vec{e}_x$ ✓.
Ce test détecte presque toutes les erreurs de signe et les inversions cos ↔ sin.

Vecteur position en coordonnées polaires :

$$\boxed{\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e}_r} \heartsuit$$

Dérivée temporelle des vecteurs de base polaire. $\vec{e}_r = \cos\theta\,\vec{e}_x + \sin\theta\,\vec{e}_y$ donc

$$\frac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\cos(\theta)\big)\vec{e}_x + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\sin(\theta)\big)\vec{e}_y \qquad (\vec{e}_x, \vec{e}_y \text{ fixes}).$$

Or θ est (a priori) aussi une fonction du temps : on devrait écrire en toute rigueur $\cos(\theta(t))$. On dérive donc une **fonction composée** : $t \mapsto u = \theta(t) \mapsto v(u) = \cos(u)$, et $\big(v(u(t))\big)' = u'(t) \times v'(u(t))$.

Avec la notation physique $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\theta(t)\big) = \dot{\theta}(t)$ et comme $\cos'(x) = -\sin(x)$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\cos\theta(t)\big) = \dot{\theta}(t) \times \big(-\sin\theta(t)\big) \quad \text{qu'on écrit plus simplement} \quad \boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\cos\theta) = -\dot{\theta}\sin\theta}$$

De même $\boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\sin\theta) = \dot{\theta}\cos\theta}$ ♥. Ainsi

$$\frac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t} = -\dot{\theta}\sin\theta\,\vec{e}_x + \dot{\theta}\cos\theta\,\vec{e}_y = \dot{\theta}\,\underbrace{\big(-\sin\theta\,\vec{e}_x + \cos\theta\,\vec{e}_y\big)}_{\vec{e}_\theta}$$

$$\frac{\mathrm{d}\vec{e}_\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(-\sin\theta\big)\vec{e}_x + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\cos\theta\big)\vec{e}_y = -\dot\theta\cos\theta\,\vec{e}_x - \dot\theta\sin\theta\,\vec{e}_y = -\dot\theta\,\underbrace{\big(\cos\theta\,\vec{e}_x + \sin\theta\,\vec{e}_y\big)}_{\vec{e}_r}$$

À retenir ♥

$$\frac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t} = \dot\theta\,\vec{e}_\theta \qquad \frac{\mathrm{d}\vec{e}_\theta}{\mathrm{d}t} = -\dot\theta\,\vec{e}_r$$

À connaître par cœur, pas à redémontrer à chaque fois.

Vecteur vitesse instantanée en coordonnées polaires :

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(r\,\vec{e}_r\big) = \dot r\,\vec{e}_r + \underbrace{r(t)}_{\text{dépend du temps}}\frac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t} \quad \text{donc}$$

$$\boxed{\vec{v} = \dot r\,\vec{e}_r + r\dot\theta\,\vec{e}_\theta} \ ♥$$

Vecteur accélération instantanée :

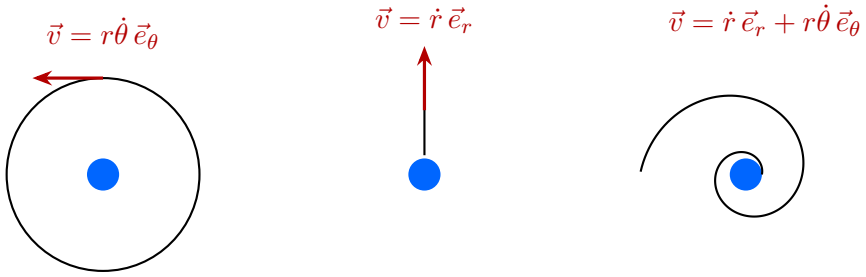
$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(\dot r\,\vec{e}_r + r\dot\theta\,\vec{e}_\theta\big) = \ddot r\,\vec{e}_r + \dot r\underbrace{\frac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t}}_{\dot\theta\vec{e}_\theta} + \dot r\dot\theta\,\vec{e}_\theta + r\ddot\theta\,\vec{e}_\theta + r\dot\theta\underbrace{\frac{\mathrm{d}\vec{e}_\theta}{\mathrm{d}t}}_{-\dot\theta\vec{e}_r}$$

$$\boxed{\vec{a}(t) = \big(\ddot r - r\dot\theta^2\big)\,\vec{e}_r + \big(r\ddot\theta + 2\dot r\dot\theta\big)\,\vec{e}_\theta} \ ♥$$

Rappels sur la trajectoire :

- la trajectoire d'un point M est la courbe tangente à tout instant au vecteur vitesse instantanée de M ;
- la trajectoire dépend du référentiel d'étude (l'expression du vecteur vitesse aussi).

Pour chaque trajectoire autour de la Terre, la forme attendue pour le vecteur vitesse instantanée :

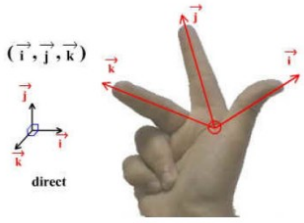


cercle : r = cste | radiale : θ = cste | spirale

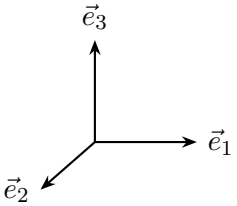
1.4 Repérage d'un point dans l'espace (et pas dans le plan !)

Le système possède **3 degrés de liberté** lorsqu'il se déplace dans l'espace, alors qu'il en possède 2 quand il se déplace dans le plan.

a) Base orthonormée directe

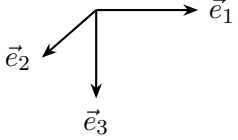


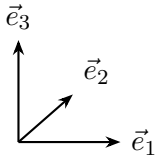
Un repère orthonormé $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est **direct** si ses trois vecteurs de base, pris dans cet ordre, ont des directions qui correspondent à celles des trois premiers doigts de la main droite.
Attention ! L'ordre des vecteurs a une importance ! Le repère $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ est direct, mais le repère $(\vec{i},\vec{k},\vec{j})$ ne l'est pas.



FAUX (indirect)

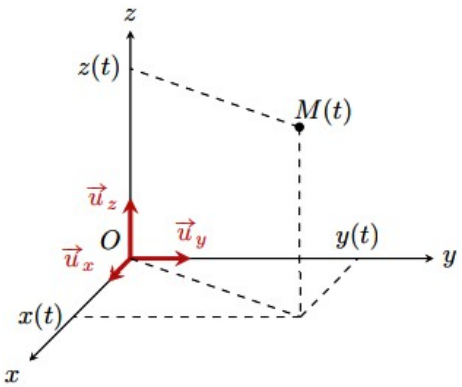
BON (direct)



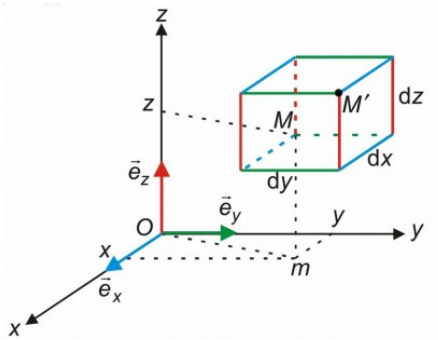


BON (direct)

b) Coordonnées cartésiennes



Notion de déplacement élémentaire



Le déplacement élémentaire du point passant de M à M' infiniment voisin s'écrit : $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MM'}$

En coordonnées cartésiennes :

$$\boxed{\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}x\,\vec{e}_x + \mathrm{d}y\,\vec{e}_y + \mathrm{d}z\,\vec{e}_z}$$ ♥

Vecteur position :

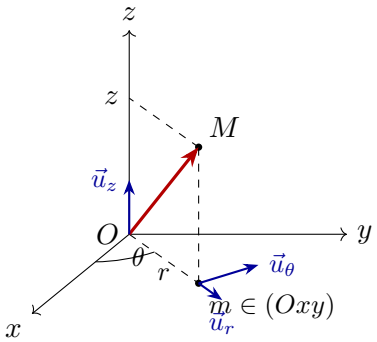
$$\boxed{\overrightarrow{OM} = x(t)\,\vec{e}_x + y(t)\,\vec{e}_y + z(t)\,\vec{e}_z = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}_{\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z}}$$

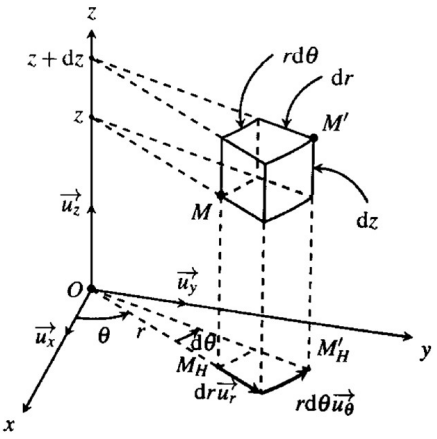
Remarque (notation) : souvent, on sous-entend la dépendance en t : $\overrightarrow{OM} = x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z$.

Vecteur vitesse instantanée en coordonnées cartésiennes : $\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\vec{e}_x + \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\vec{e}_y + \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\vec{e}_z$, soit

$$\boxed{\vec{v} = \dot{x}\,\vec{e}_x + \dot{y}\,\vec{e}_y + \dot{z}\,\vec{e}_z \qquad \vec{a} = \ddot{x}\,\vec{e}_x + \ddot{y}\,\vec{e}_y + \ddot{z}\,\vec{e}_z}$$ ♥

c) Coordonnées cylindriques





Le déplacement élémentaire du point passant de M à M' infiniment voisin s'écrit :

$$\boxed{\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{MM'} = \mathrm{d}r\,\vec{u}_r + r\,\mathrm{d}\theta\,\vec{u}_\theta + \mathrm{d}z\,\vec{u}_z}$$

♥

$r = Om$, avec m la projection orthogonale de M dans le plan (Oxy), et $\theta \in [0, 2\pi[$.

Coordonnées cylindriques = coordonnées polaires + hauteur z.

Vecteur position : $\boxed{\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}_r + z\,\vec{u}_z}$ ♥

Le déplacement élémentaire se décompose en 3 composantes :

- une variation de la distance r pour arriver en M' ;
- une rotation (variation de θ seul en conservant le même r) ;
- une variation de z seul.

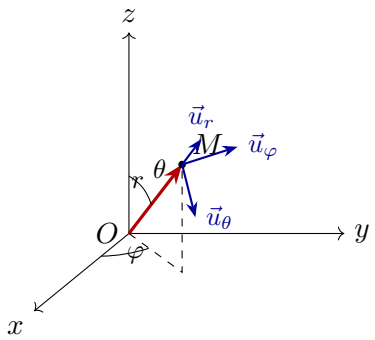
Vecteur vitesse : $\vec{v}(t) = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\vec{u}_r + r\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\vec{u}_\theta + \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\vec{u}_z$

soit $\boxed{\vec{v}(t) = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + \dot{z}\,\vec{u}_z}$ ♥

Vecteur accélération instantanée en coordonnées cylindriques : $\vec{a} = \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}(t)}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{r}\,\vec{u}_r + r\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + \dot{z}\,\vec{u}_z\right)$, soit

$$\boxed{\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{u}_r + \left(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}\right)\vec{u}_\theta + \ddot{z}\,\vec{u}_z}$$ ♥

d) Coordonnées sphériques



φ est la longitude : $\varphi \in [0, 2\pi[$

θ est la colatitude (angle par rapport à l'axe Oz) : $\theta \in [0, \pi]$

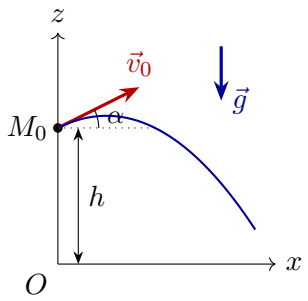
Vecteur position : $\overrightarrow{OM} = r\,\vec{u}_r$

Vecteur vitesse : $\vec{v} = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + r\sin\theta\,\dot{\varphi}\,\vec{u}_\varphi$

Vecteur déplacement élémentaire : $\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}r\,\vec{u}_r + r\,\mathrm{d}\theta\,\vec{u}_\theta + r\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\,\vec{u}_\varphi$

II Étude de mouvements simples

2.1 Mouvement de vecteur accélération constant



On étudie le mouvement d'une balle de masse m, assimilée à son centre de masse M, en chute libre, lancée avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$ à une hauteur (ou cote) h de l'origine O du repère.
Système : {balle} ; **référentiel :** terrestre, supposé galiléen (abrégé TSG).
Bilan des forces : chute libre (pas de force de frottement) donc seulement $\vec{P} = m\vec{g}$.

a) Application de la 2e loi de Newton au système

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = m\vec{a} = \sum \vec{F}_{ext} \iff m\vec{a} = m\vec{g} \iff \vec{a} = \vec{g}$$

$\vec{g}$ est dirigé dans le sens opposé à l'axe Oz : $\vec{a} = \vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} = -g\,\vec{e}_z$ avec $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, soit

$$\boxed{\vec{a}(t) = -g\,\vec{e}_z \iff \begin{cases} a_x(t) = 0 \\ a_y(t) = 0 \\ a_z(t) = -g \end{cases}} \heartsuit$$

b) Vecteur vitesse

Les composantes du vecteur vitesse instantanée sont les primitives par rapport au temps des composantes du vecteur accélération instantanée :

$$\vec{v}(t) = \begin{cases} v_x(t) = C_1 \\ v_y(t) = C_2 \\ v_z(t) = -gt + C_3 \end{cases} = C_1\,\vec{e}_x + C_2\,\vec{e}_y + (-gt + C_3)\,\vec{e}_z$$

avec C_1, C_2, C_3 des constantes que l'on peut déterminer grâce aux conditions initiales.

Soit un vecteur $\vec{v}_0$ de norme v_0 qui forme un angle α avec l'axe Ox. Ses coordonnées dépendent de son orientation :

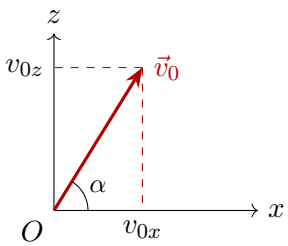


schéma de gauche : $\vec{v}_0$ vers le haut

$$\boxed{\vec{v}_0 = \begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos\alpha \\ v_{0z} = v_0 \sin\alpha \end{cases}} \heartsuit$$

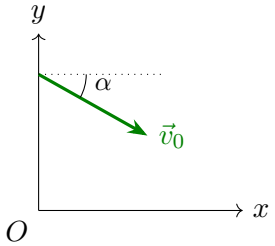


schéma de droite : $\vec{v}_0$ vers le bas

$$\vec{v}_0 = \begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos\alpha > 0 \\ v_{0y} = -v_0 \sin\alpha < 0 \end{cases}$$

△ Attention

Attention au sens du vecteur ! Une composante est négative quand le vecteur pointe dans le sens opposé à l'axe.

Utilisation de la condition initiale sur la vitesse : à l'instant $t = 0$, $\vec{v}(t=0) = \vec{v}_0$:

$$\begin{cases} v_x(t=0) = v_0 \cos\alpha \\ v_y(t=0) = 0 \\ v_z(t=0) = v_0 \sin\alpha \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 = v_0 \cos\alpha \\ C_2 = 0 \\ -g \times 0 + C_3 = v_0 \sin\alpha \end{cases}$$

Finalement :

$$\boxed{\vec{v}(t) = \begin{cases} v_x(t) = v_0 \cos\alpha \\ v_y(t) = 0 \\ v_z(t) = -gt + v_0 \sin\alpha \end{cases}} \heartsuit$$

c) Détermination des coordonnées (lois horaires du mouvement)

On primitive le vecteur vitesse pour obtenir le vecteur position :

$$\overrightarrow{OM}(t) = \begin{cases} x(t) = v_0 \cos\alpha\, t + C_1' \\ y(t) = C_2' \\ z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin\alpha\, t + C_3' \end{cases} \quad \text{avec les conditions initiales} \quad \overrightarrow{OM}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h \end{pmatrix} = h\,\vec{e}_z$$

On obtient les trois **équations horaires du mouvement** :

$$\boxed{\overrightarrow{OM}(t) = \begin{cases} x(t) = v_0 \cos\alpha\, t \\ y(t) = 0 \\ z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin\alpha\, t + h \end{cases}} \heartsuit$$

Remarques : $y = 0$ à tout instant : le mouvement s'effectue dans le plan (Oxz).
Si $v_0 = 0$ (vitesse initiale nulle), alors $x = 0$ à tout instant et $z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + h$: **le mouvement est vertical.**

d) Détermination de la trajectoire du système

Définition

La trajectoire du système est la courbe représentative des positions successives du système.
Ici, c'est la courbe représentative de la fonction d'équation $z = f(x)$.

Remarque : il ne faut pas confondre la trajectoire $z = f(x)$ et les équations horaires $z = f(t)$, $x = g(t)$.

On supprime la variable temps dans le système d'équations horaires :

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cos\alpha\, t \\ z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin\alpha\, t + h \end{cases} \iff \begin{cases} t = \dfrac{x}{v_0 \cos\alpha} \\ z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin\alpha\, t + h \end{cases}$$

On réinjecte l'expression de t en fonction de x dans l'expression de $z(t)$:

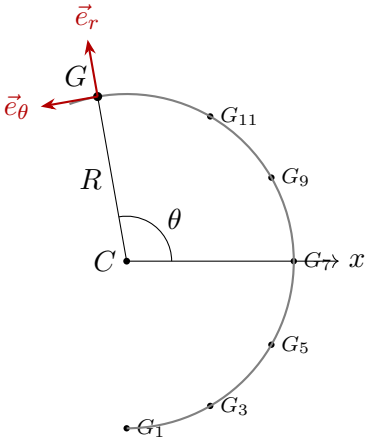
$$z(x) = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0 \cos\alpha}\right)^2 + v_0 \sin\alpha \frac{x}{v_0 \cos\alpha} + h \qquad \text{or} \qquad \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha \qquad \text{soit}$$

$$\boxed{z(x) = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha}\, x^2 + \tan\alpha\, x + h} \heartsuit$$

Cette équation a pour représentation graphique une parabole : on dit que la trajectoire est parabolique.

2.2 Mouvement circulaire

a) Mouvement circulaire uniforme



Circulaire → la distance OG est constante au cours du temps.
Uniforme → la norme du vecteur vitesse est constante au cours du temps : $v = \|\vec{v}\| = v_0 = \textbf{cste}$

Vecteur position : $\boxed{\overrightarrow{OG} = R\,\vec{e}_r}$

Vecteur vitesse : $\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\overrightarrow{OG}) = \underbrace{\dfrac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}}_{0 \text{ car mvt circ.}}\vec{e}_r + R\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_r}{\mathrm{d}t} =$

$R\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta \;\Rightarrow\; \boxed{\vec{v} = R\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta}$ ♥

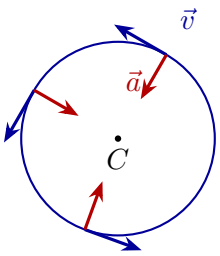
Comme la vitesse est constante : $\|\vec{v}\| = v_0 \iff \|R\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta\| = v_0 \iff R\dot{\theta} = v_0 \iff \boxed{\dot{\theta} = \dfrac{v_0}{R}}$: **la vitesse angulaire est aussi constante.** On note souvent $\omega_0 = \dot{\theta} = \dfrac{v_0}{R}$.

Vocabulaire : comme $\vec{v}$ est orthogonal au rayon R, on dit que le vecteur vitesse est **orthoradial** : il est dirigé selon $\vec{e}_\theta$.

Vecteur accélération :

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}}_{0 \text{ car circ.}}\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + R\,\underbrace{\ddot{\theta}}_{0 \text{ car unif.}}\vec{e}_\theta + R\dot{\theta}\frac{\mathrm{d}\vec{e}_\theta}{\mathrm{d}t} = R\dot{\theta}\big(-\dot{\theta}\,\vec{e}_r\big) \iff \boxed{\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\,\vec{e}_r}$$

En fonction de v_0 et R : $\vec{a} = -R\left(\dfrac{v_0}{R}\right)^2\vec{e}_r \iff \boxed{\vec{a} = -\dfrac{v_0^2}{R}\,\vec{e}_r}$ ♥ En fonction de ω_0 et R : $\boxed{\vec{a} = -R\,\omega_0^2\,\vec{e}_r}$ ♥



△ **Attention**

Mouvement uniforme ne veut pas dire accélération nulle !
Ici le vecteur accélération est constant en norme ; par contre sa direction varie dans la base cartésienne : $\vec{a}$ est dirigé selon $-\vec{e}_r$.

Vocabulaire : comme $\vec{a}$ est dirigé vers le centre et colinéaire à $\vec{e}_r$, on dit que l'accélération est **centripète (dirigée dans la concavité de la trajectoire).**

Remarque (HP) : un objet de masse m en M suivant cette trajectoire subit une force dite centrifuge telle que $\vec{F}_{centrifuge} = -m\vec{a} = m\dfrac{v_0^2}{R}\vec{e}_r$. C'est pour cette raison qu'on est poussé vers l'extérieur dans une voiture qui tourne : plus le virage est serré, plus la force est grande (dépendance en $1/R$) ; plus la vitesse est grande, plus la force est grande (dépendance en v_0^2).

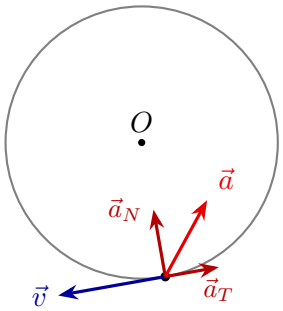
b) Mouvement circulaire non uniforme

On a toujours $\vec{v} = R\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$. **Par contre :**

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}t}}_{0 \text{ car circ.}}\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + R\ddot{\theta}\,\vec{e}_\theta + R\dot{\theta}\frac{\mathrm{d}\vec{e}_\theta}{\mathrm{d}t} = R\ddot{\theta}\,\vec{e}_\theta + R\dot{\theta}\big(-\dot{\theta}\,\vec{e}_r\big) \iff \boxed{\vec{a} = R\ddot{\theta}\,\vec{e}_\theta - R\dot{\theta}^2\,\vec{e}_r}$$

que l'on peut aussi écrire (avec $v = R\dot{\theta}$) :

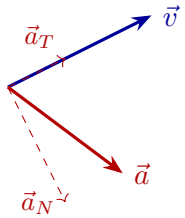
$$\vec{a} = \underbrace{\frac{dv}{dt}\vec{e}_\theta}_{\text{accélération tangentielle } \vec{a}_T} \underbrace{-\frac{v^2}{R}\vec{e}_r}_{\text{accélération centripète } \vec{a}_N} \heartsuit$$



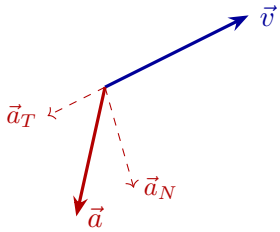
Comme l'accélération angulaire $\ddot{\theta}$ n'est pas nulle, le vecteur accélération possède une composante tangentielle (c'est-à-dire selon $\vec{e}_\theta$).

c) Interprétation du vecteur $\vec{a}$

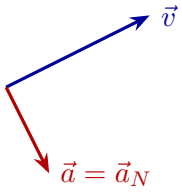
Seule la composante tangentielle du vecteur accélération permet de modifier la norme du vecteur vitesse.



angle aigu entre $\vec{v}$ et $\vec{a}$:
$\vec{v}\cdot\vec{a} > 0 \rightarrow$ **mvt accéléré**



angle obtus :
$\vec{v}\cdot\vec{a} < 0 \rightarrow$ **mvt ralenti**

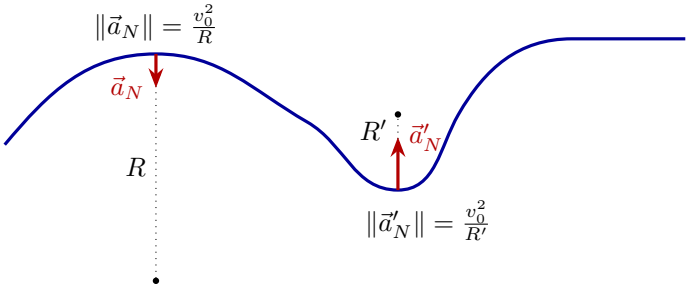


angle droit :
$\vec{v}\cdot\vec{a} = 0 \rightarrow$ **mvt uniforme**

Justification : $\vec{v}\cdot\vec{a} = R\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta \cdot \left(\frac{dv}{dt}\vec{e}_\theta - \frac{v^2}{R}\vec{e}_r\right) = R\dot{\theta}\frac{dv}{dt} = v\frac{dv}{dt}$ (pour $\dot{\theta} > 0$). Donc

$\vec{v}\cdot\vec{a} > 0 \iff \frac{dv}{dt} > 0$ (mvt accéléré) $\qquad$ $\vec{v}\cdot\vec{a} = 0 \iff \vec{a}_T = \frac{dv}{dt}\vec{e}_\theta = \vec{0} \iff v = \text{cste}$ (mvt uniforme)

Remarque : la **composante normale de l'accélération est liée à la courbure de la trajectoire.**

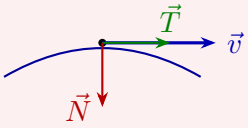


a_N est d'autant plus grand que le rayon de courbure local R est petit. Ici $R > R'$ donc $a'_N > a_N$.

Repère de Frenet ♥

On utilise parfois le repère de Frenet pour écrire le mouvement :

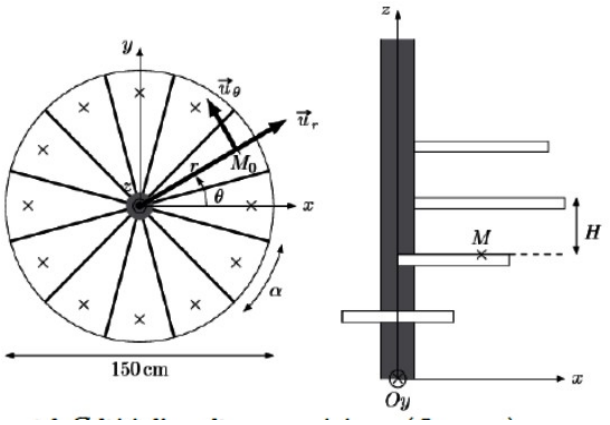
- $\vec{T}$ est le vecteur unitaire tangent à la trajectoire et orienté dans le sens du mouvement (donc de $\vec{v}$) ;
- $\vec{N}$ est le vecteur unitaire normal à la trajectoire, orienté dans le sens de la concavité (donc de $\vec{a}_N$).



$$\vec{a}_{/Frenet} = \frac{dv}{dt}\vec{T} + \frac{v^2}{R}\vec{N} \quad \text{et} \quad \vec{v}_{/Frenet} = v\,\vec{T}$$

Bien adapté quand on ne sait pas a priori si le mouvement est circulaire.

2.3 Mouvement hélicoïdal



Un escalier en colimaçon est constitué de quatorze marches régulièrement disposées autour d'un pilier central. Une personne, assimilée à un point M, monte d'une démarche régulière à raison d'une marche par seconde en restant à $r = 60\,\text{cm}$ de Oz.
Sur la figure de gauche, M_0 est le projeté orthogonal de M sur le plan perpendiculaire à Oz. Les croix représentent les positions successives de M_0 au niveau de chaque marche. La figure fait apparaître l'angle des marches : $\alpha = 30°$.

Q1 On donne $H = 20\,\text{cm}$. Estimer la dérivée temporelle $\dot{z}$ de la cote (altitude) z du point M. Le mouvement est-il accéléré suivant Oz ? Proposer une expression de $z(t)$ en prenant $z = 0$ à $t = 0$.
Une marche par seconde donc $\dot{z} \approx \dfrac{H}{\Delta t}$ avec $\Delta t = 1\,\text{s}$: $\dot{z} \approx 0.2\,\text{m/s}$; le mouvement n'est pas accéléré selon z. En primitivant : $z(t) = 0{,}2\,t + z(0) = 0{,}2\,t$.

Q2 Nous nous intéressons à la rotation de M_0 autour du pilier. Qualifier le mouvement de M_0 et donner la valeur de la vitesse angulaire $\dot{\theta}$.
Le mouvement de M_0 est **circulaire uniforme** : chaque seconde, il monte d'une marche, donc l'angle $\theta(t)$ augmente de 30°. Ainsi $\dot{\theta} \approx \dfrac{\theta(t+\Delta t) - \theta(t)}{\Delta t} = \dfrac{\alpha}{\Delta t}$. A.N. $\dot{\theta} \approx \dfrac{30 \times \pi}{180} \approx 0.52\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$.

Q3 Exprimer les vecteurs vitesse et accélération de M_0 dans le référentiel $\mathcal{R}$. Calculer la norme de la vitesse.
En coordonnées polaires : $\vec{v}(M_0) = \dfrac{\text{d}}{\text{d}t}(r\,\vec{e}_r) = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta = r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$. A.N. $\|\vec{v}(M_0)\| = 0{,}60 \times 0{,}52 \approx 0.31\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$.
$\vec{a}(M_0) = \dfrac{\text{d}}{\text{d}t}(r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta) = -r\dot{\theta}^2\,\vec{e}_r$.

Q4 Donner le lien entre $\dot{z}$ et $\dot{\theta}$.
$\dot{z} = \dfrac{H}{\Delta t}$ et $\dot{\theta} = \dfrac{\alpha}{\Delta t}$, donc $\boxed{\dot{z} = \dfrac{H}{\alpha}\,\dot{\theta}}$: la hauteur gagnée est proportionnelle à l'angle parcouru ($z = \frac{H}{\alpha}\theta$).

Q5 Exprimer dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ les vecteurs vitesse et accélération de M dans $\mathcal{R}$.
$\vec{v}(M) = \dfrac{\text{d}}{\text{d}t}(r\,\vec{e}_r + z\,\vec{e}_z) = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + \dot{z}\,\vec{e}_z = r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + \dot{z}\,\vec{e}_z$ et $\vec{a}(M) = \dfrac{\text{d}}{\text{d}t}(r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + \dot{z}\,\vec{e}_z) = -r\dot{\theta}^2\,\vec{e}_r$.

III Cinématique du solide : exemples simples

3.1 Translation

Définition

Déf : un solide est en translation lorsque $\forall (A,B) \in$ Solide, $\vec{v}(A) = \vec{v}(B)$. ♥

Remarque : la norme de la vitesse peut varier au cours du temps, mais elle varie de la même façon pour tous les points !

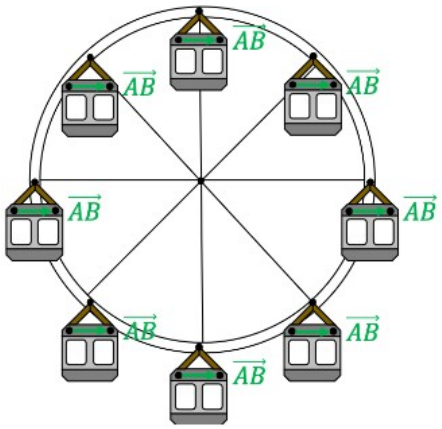
a) Translations rectilignes

Définition

Un solide a un mouvement de translation rectiligne dans un référentiel donné lorsque les trajectoires des points du solide sont des droites parallèles.

Propriété : un solide est en translation lorsque les directions du repère lié au solide sont fixes par rapport au référentiel d'étude.
Exemples : une valise sur un tapis roulant (dans le référentiel terrestre), un ascenseur (dans le référentiel terrestre).

b) Translation circulaire



Définition

Une translation est circulaire (dans un référentiel donné) lorsque chaque point du solide a un mouvement circulaire, de même rayon mais de centre différent. ♥
Exemple : cabine de la grande roue du Prado.

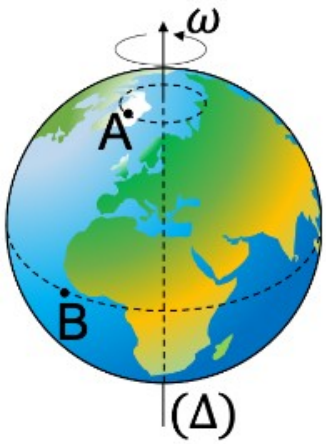
Propriété :

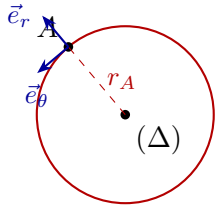
Les axes et les vecteurs reliant deux points du solide (comme $\overrightarrow{AB}$) restent identiques lors de la translation circulaire.

3.2 Rotation autour d'un axe fixe

Définition

Déf : un solide est en rotation autour d'un axe fixe Δ si tous les points du solide sont en mouvement circulaire autour de l'axe Δ. ♥



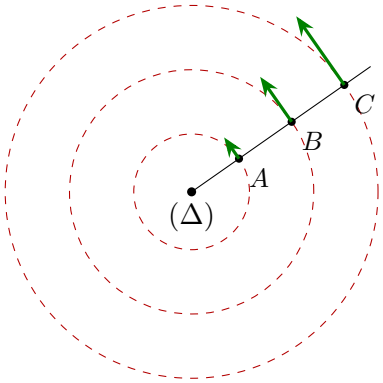


vue de dessus

Soit un solide en rotation autour d'un axe Δ à la vitesse angulaire ω. Soit A un point du solide, à la distance r_A de l'axe Δ. On a $\omega = \dot{\theta}$ (indépendant du point A considéré).
En coordonnées cylindriques : $\vec{v}(A) = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + \dot{z}\,\vec{e}_z$.
Comme $r = r_A = \text{cste}$, $\omega = \dot{\theta}$ et $\dot{z} = 0$:

$$\boxed{\vec{v}(A) = r_A\,\omega\,\vec{e}_\theta}$$ ♥

Champ de vitesse : tous les points du solide possèdent un $\vec{v}$ orthoradial, de norme d'autant plus importante que le point est éloigné de l'axe. À vitesse angulaire constante, la norme est proportionnelle à la distance à l'axe.



$\vec{v}(C) = r_C\,\omega\,\vec{e}_\theta$

$\vec{v}(B) = r_B\,\omega\,\vec{e}_\theta$

$\vec{v}(A) = r_A\,\omega\,\vec{e}_\theta$

Champ d'accélération : à vitesse angulaire ω constante : $\boxed{\vec{a}(B) = -r_B\,\omega^2\,\vec{e}_r}$ ♥

Application

Accélération dans le référentiel géocentrique d'un point B au niveau de l'équateur sur la Terre.
Rayon de la Terre : $R_T = 6370\,\text{km}$; vitesse angulaire de rotation : $\omega = \dfrac{2\pi}{24\times 60\times 60} = 7.3\times 10^{-5}\,\text{rad}\,\text{s}^{-1}$.
Donc $\vec{a}(B) = -R_T\,\omega^2\,\vec{e}_r = -3.4\times 10^{-2}\,\text{m}\,\text{s}^{-2}\,\vec{e}_r$: **ce qui est très faible devant l'accélération de la pesanteur.**