CHAP. 07 : NOTIONS DE CINÉMATIQUE

Objectifs :

1 Différencier un solide d'un système déformable.
2 Comprendre la notion de référentiel, le caractère relatif du mouvement et le caractère absolu des distances et des intervalles de temps.
3 Etablir les expressions des composantes du vecteur-position, du vecteur-vitesse et du vecteur-accélération dans le seul cas des coordonnées cartésiennes et cylindriques.
4 Exprimer à partir d'un schéma le déplacement élémentaire dans les différents systèmes de coordonnées, construire le trièdre local associé et en déduire les composantes du vecteur-vitesse en coordonnées cartésiennes et cylindriques.
5 Choisir un système de coordonnées adapté au problème posé.
6 Identifier les degrés de liberté d'un mouvement. Choisir un système de coordonnées adapté au problème.
7 Exemple 1 : mouvement de vecteur-accélération constant : exprimer la vitesse et la position en fonction du temps. Obtenir la trajectoire en coordonnées cartésiennes.
8 Exemple 2 : mouvement circulaire uniforme et non uniforme : exprimer les composantes du vecteur-position, du vecteur-vitesse et du vecteur-accélération en coordonnées polaires. Identifier les liens entre les composantes du vecteur-accélération, la courbure de la trajectoire la norme du vecteur-vitesse et sa variation temporelle. Situer qualitativement la direction de $\vec{a}$ dans la concavité d'une trajectoire plane.
9 Donner les expressions des vecteurs vitesse et accélération dans le repère de Frenet
10 Reconnaître et décrire une translation rectiligne, une translation circulaire.
11 Rotation d'axe Δ :Décrire la trajectoire d'un point quelconque du solide et exprimer sa vitesse en fonction de sa distance à l'axe et de la vitesse angulaire.
12 *Réaliser et exploiter quantitativement un enregistrement vidéo d'un mouvement : évolution temporelle des vecteurs $\vec{v}$ et $\vec{a}$.*

I Cinématique du point

I.1. Notion de point matériel

Dans tous les exemples étudiés au lycée (ou en cours de SI), les systèmes mécaniques étudiés sont des solides

Def : un solide est un système indéformable c-à-d que la distance entre deux points quelconques reste la même au cours du tps

Rmq :

Le solide indéformable est un modèle : un solide parfaitement indéformable n'existe pas. Ce modèle n'est évidemment pas adapté pour décrire les systèmes déformables tels que les fluides, les milieux granulaires (tas de sable) ou encore les solides « mous » (pâte à modeler). Il exclut aussi tous les systèmes composés de plusieurs solides liés entre eux par des liaisons possédant au moins un degré de liberté : deux solides indéformables ne forment pas nécessairement un solide indéformable. Exemple : un vélo et ses roues

Pour repérer ce solide dans **l'espace à 3 dimension** et dans le cas le plus général, on a besoin : **de 3 coordonnées et de 3 angles**

En physique on simplifie souvent l'étude :

On néglige l'extension spatiale du solide et les éventuelles rotations de ce dernier sur lui même

On modélise alors le solide par un **point matériel** **qui possède la même masse que le solide étudier mais qui est concentrée en un point.**

Pour repérer un point matériel dans l'espace on a donc besoin que de 3 coordonnées (pas de 3 angles)

I.2. Description du mouvement d'un point

a Notion de référentiel

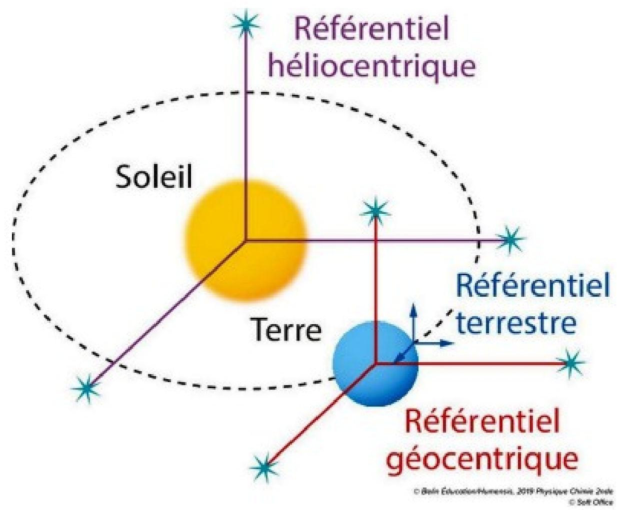
La description d'un mouvement dépend de l'observateur :**on bouge toujours par rapport à quelque chose** (Exemple du passager assis dans un train, immobile par rapport au train mais en mouvement par rapport au quai lorsque le train avance) ;

Lorsque l'on décrit un mouvement, il faut donc choisir un référentiel

Def : un référentiel est un système d'axe muni d'une horloge

Il y a donc une infinité de référentiels imaginables. En pratique, il y a deux façons de définir un référentiel : . ou bien en donnant un solide de référence, c'est par exemple le cas du référentiel terrestre ; . ou bien en donnant un point fixe et trois directions de référence (donc en pratique des points), c'est par exemple le cas des référentiels géocentrique ou héliocentrique.

Référentiel	**Origine du repère**	**Axes**
Terrestre (ou réf du laboratoire	Un point de la Terre ou « proche » de la Terre	Liés à la terre
Géocentrique	Centre de masse de la Terre	Pointent vers 3 étoiles lointaines
Héliocentrique (ou de Kepler)	Centre de masse du soleil	
De Copernic	Centre de masse du système solaire	



Attention ! Il ne **faut pas confondre le référentiel,** c'est-à-dire le système de référence (notion physique) **avec le repère,** c'est-à-dire **l'outil géométrique** qui sert à décrire le mouvement (notion mathématique). Il y a une infinité de repères différents qui peuvent être associés à un même référentiel. En SI quasiment tous les mouvements sont implicitement étudiés dans le référentiel terrestre et où seul le repère est précisé, mais en physique on se forcera a définir le référentiel.

b Vecteurs position, vitesse et accélération

$\vec{OM}$ est le vecteur position il est homogène à une longueur

$\vec{v}=\frac{d\vec{OM}}{dt}$ est le vecteur vitesse instantanée

$\vec{a}=\frac{d\vec{v}}{dt}=\frac{d^2\vec{OM}}{dt^2}$ est le vecteur accélération instantanée

Toutes ces grandeurs dépendent du référentiel d'étude ! C'est pour cette raison qu'il est important de le préciser avant de mener une étude cinématique

Rmq (vocabulaire) : **il ne faut pas confondre vecteur vitesse $\vec{v}$ et « vitesse »**

la vitesse peut être la norme du vecteur-vitesse : $v=\|\vec{v}\|$

ou la projection du vecteur vitesse sur un axe $v=\vec{v}\cdot\vec{e}_x$ (dans ce cas elle peut être négatif)

cela a une importance pour la caractérisation des mouvements :

→ « Mouvement rectiligne » = **la trajectoire du point est une droite.**

En terme de vitesse : La direction de $\vec{v}$ ne varie pas , par contre la vitesse v peut varier

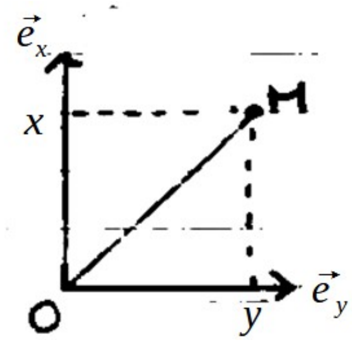
→ « Mouvement uniforme » = **la trajectoire est parcourue à vitesse constante.**

En terme de vitesse : v=cste

(ne varie pas en norme, par contre la direction du vecteur vitesse peut varier au cours du temps !)

I.3. Repérage d'un point dans un plan

a Coordonnées cartésiennes



vecteur position $\vec{OM}$:

$$\vec{OM}(t)=x(t)\vec{e}_x+y(t)\vec{e}_y=\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}_{\vec{e}_x,\vec{e}_y}$$

vecteur vitesse instantanée $\vec{v}=\dfrac{d\vec{OM}}{dt}$

$$\vec{v}(t)=\dot{x}(t)\vec{e}_x+\dot{y}(t)\vec{e}_y=\begin{pmatrix}\dot{x}(t)\\\dot{y}(t)\end{pmatrix}_{\vec{e}_x,\vec{e}_y}=\begin{pmatrix}v_x(t)\\v_y(t)\end{pmatrix}_{\vec{e}_x,\vec{e}_y}$$

vocabulaire important :

$v_x(t)=\vec{v}(t)\cdot\vec{e}_x=\dot{x}(t)$) **est la composante selon l'axe Ox du vecteur vitesse instantanée .**

C'est aussi la projection sur l'axe (Ox) du vecteur vitesse instantanée

v_y(t) et v_x(t) sont des grandeurs algébriques :

si v_x(t) >0 le système se déplace dans le sens des x croissants

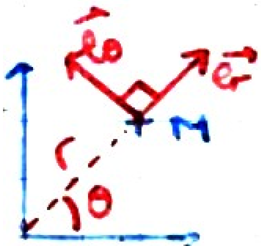
si v_y(t) <0 le système se déplace dans le sens des y décroissants

Notation : on peut écrire de façon équivalente : $\dot{x}(t)$ ou $\dfrac{dx(t)}{dt}$ ou $\dot{x}$

vecteur accélération instantanée $\vec{a}=\dfrac{d^2\vec{OM}}{dt^2}=\ddot{x}\,\vec{e}_x+\ddot{y}\,\vec{e}_y$¿

b Coordonnées polaires

:animation



vecteurs de base : → $\vec{e}_r=\dfrac{\vec{OM}(t)}{\|\vec{OM}(t)\|}$

→ $\vec{e}_\theta$ est tourné de 90° (dans le sens trigonométrique) par rapport à $\vec{e}_r$

Rmq (vocabulaire) : $\vec{e}_\theta$ et $\vec{e}_r$ sont des **vecteurs mobiles** à la différence des vecteurs du repère cartésien $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$, **leur direction peut changer au cours du temps dans le référentiel d'étude**

Rmq (notation) : on écrit aussi $\vec{u}_r$ et $\vec{u}_\theta$

Expression des vecteurs de base polaire dans la base cartésienne :

Angle θ entre $\vec{e}_\theta$ et $\vec{e}_y$
$\vec{e}_r$ et $\vec{e}_y$ sont dans le même sens

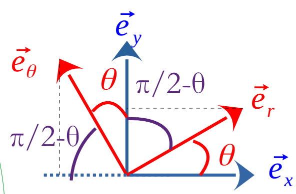
Angle de $\pi/2$ -θ entre $\vec{e}_\theta$ et $\vec{e}_x$
$\vec{e}_\theta$ et $\vec{e}_x$ **pas dans le même sens**

On en déduit :

$$\vec{e}_\theta=\cos(\theta)\vec{e}_y\ -\sin(\theta)\vec{e}_x$$

$\vec{e}_\theta\cdot\vec{e}_y$

$\vec{e}_\theta\cdot\vec{e}_x=-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=-\sin(\theta)$



Angle θ entre $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_x$
$\vec{e}_r$ et $\vec{e}_x$ sont dans le même sens

Angle de $\pi/2$ - θ entre $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_y$
$\vec{e}_r$ et $\vec{e}_y$ dans dans le même sens

On en déduit :

$$\vec{e}_r=\cos(\theta)\vec{e}_x\ +\sin(\theta)\vec{e}_y$$

$\vec{e}_r\cdot\vec{e}_x$

$\vec{e}_r\cdot\vec{e}_y=+\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=+\sin(\theta)$

vecteur position $\vec{OM}$ **en coordonnées polaires :** $\boxed{\vec{OM} = r\,\vec{e}_r}$

Dérivée temporelle des vecteurs de base polaire

$$\vec{e}_r = \cos(\theta)\vec{e}_x + \sin(\theta)\vec{e}_y \quad \text{donc} \quad \frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{d}{dt}(\cos(\theta)\vec{e}_x) + \frac{d}{dt}(\sin(\theta)\vec{e}_y) = \frac{d}{dt}(\cos(\theta))\vec{e}_x + \frac{d}{dt}(\sin(\theta))\vec{e}_y$$

Or θ est (à priori) aussi une fonction du temps on devrait écrire en toute rigueur $\cos(\theta(t))$ on dérive donc ici une fonction composée :

$$t \xrightarrow{u} \theta(t) \xrightarrow{v} \cos(\theta(t)) \quad \text{donc} \quad \cos(\theta(t)) = v \circ u(t) = v(u(t)) \quad \text{ainsi}$$

$$\frac{d}{dt}(\cos(\theta(t))) = v(u(t))' = \boldsymbol{u'(t) \times v'(u(t))}$$

avec la notation physique $\frac{d}{dt}(\theta(t)) = \dot{\theta}(t)$ qui correspond à $\theta'(t)$ et comme $\cos(x)' = -\sin(x)$

on a finalement $\frac{d}{dt}(\cos(\theta(t))) = \dot{\theta}(t) \times (-\sin(\theta(t)))$ qu'on écrit plus simplement $\boxed{\frac{d}{dt}(\cos(\theta)) = -\dot{\theta}\sin\theta}$

De même $\boxed{\frac{d}{dt}(\sin(\theta)) = \dot{\theta}\cos(\theta)}$

ainsi $\frac{d\vec{e}_r}{dt} = -\dot{\theta}\sin\theta\,\vec{e}_x + \dot{\theta}\cos\theta\,\vec{e}_y = \dot{\theta}\underbrace{(-\sin\theta\,\vec{e}_x + \cos\theta\,\vec{e}_y)}_{\vec{e}_\theta}$ donc $\boxed{\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\,\vec{e}_\theta}$

De même $\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = \frac{d}{dt}(\cos(\theta)\vec{e}_y) + \frac{d}{dt}(-\sin(\theta)\vec{e}_x) = -\dot{\theta}\sin\theta\,\vec{e}_y - \dot{\theta}\cos\theta\,\vec{e}_x = -\dot{\theta}\underbrace{(\cos\theta\,\vec{e}_x + \sin\theta\,\vec{e}_y)}_{\vec{e}_r}$

donc $\boxed{\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\,\vec{e}_r}$

vecteur vitesse instantanée en coordonnées polaires :

$$\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}(r\,\vec{e}_r) = \dot{r}\,\vec{e}_r + \underbrace{r(t)}_{\text{r(t) dépend du temps}}\frac{d\vec{e}_r}{dt} \quad \text{donc} \quad \boxed{\vec{v} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\,\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta}$$

vecteur accélération instantanée : $\vec{a}(t) = \frac{d^2\vec{OM}}{dt^2} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{r}\,\vec{e}_r + r\,\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta)$

$$\vec{a}(t) = \ddot{r}\,\vec{e}_r + \dot{r}\overbrace{\frac{d\vec{e}_r}{dt}}^{\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta} + \dot{r}\,\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + r\,\ddot{\theta}\,\vec{e}_\theta + r\,\dot{\theta}\overbrace{\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}}^{-\dot{\theta}\,\vec{e}_r} \longrightarrow \boxed{\vec{a}(t) = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta}$$

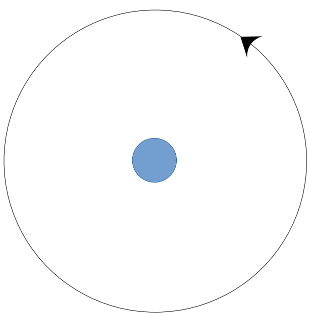
Rappel sur les trajectoire :

- la trajectoire d'un point M est la courbe tangente à tout instant au vecteur vitesses instantanée de M

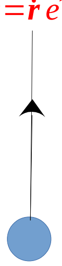
- la trajectoire dépend du référentiel d'étude ! (l'expression du vecteur vitesse aussi)

Pour chaque trajectoire autour de la terre, donner la forme attendu pour le vecteur vitesse instantanée

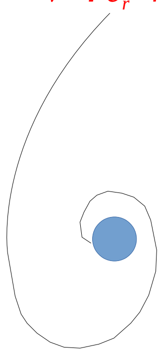
$\vec{v} = r\,\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$



$\vec{v} = \dot{r}\,\vec{e}_r$



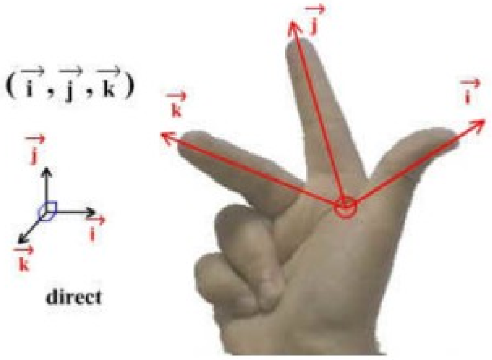
$\vec{v} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\,\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$



I.4. <u>Repérage d'un point dans l'espace (et pas dans le plan !)</u>

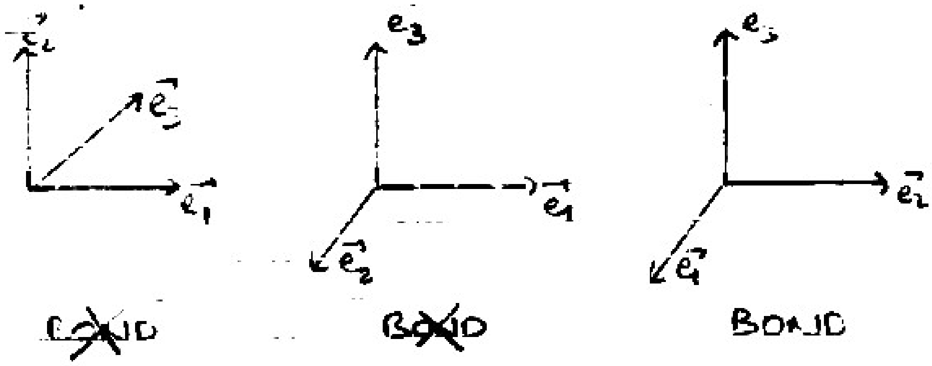
le système possède 3 degrés de liberté lorsqu'il se déplace dans l'espace alors qu'il en possède 2 quand il se déplace dans le plan

a *Base orthonormée directe*

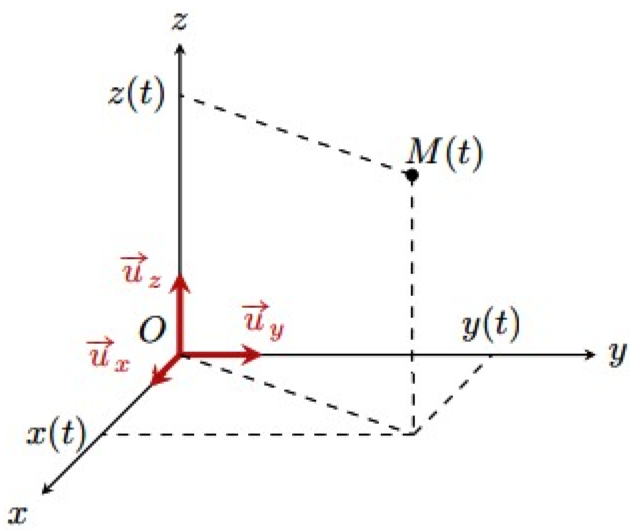


Un repère orthonormé ($\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) est direct si ses trois vecteurs de base pris dans cet ordre ont des directions qui correspondent à celles des trois premiers doigts de la main droite.

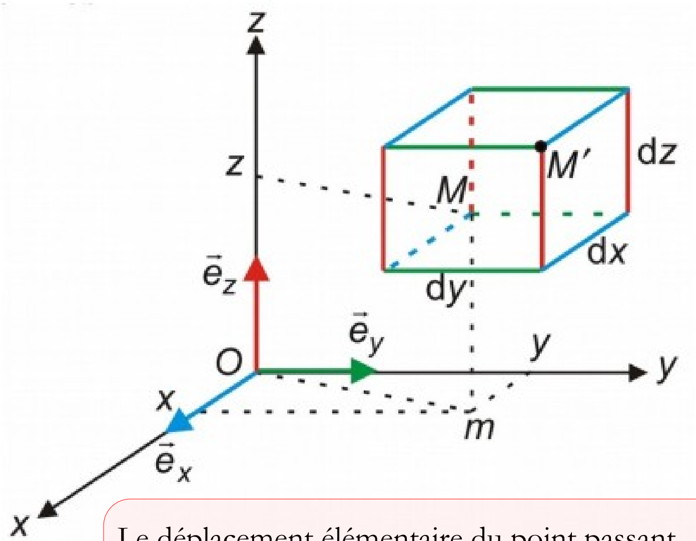
Attention ! L'ordre des vecteurs a une importance ! Le repère ($\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) est direct, mais le repère ($\vec{i}$, $\vec{k}$, $\vec{j}$) ne l'est pas.



b Coordonnées cartésiennes



Notion de déplacement élémentaire



Le déplacement élémentaire du point passant de M à M' infiniment voisin s'écrit :

$$d\vec{OM} = \overrightarrow{MM'}$$

En coordonnées cartésiennes :

$$d\vec{OM} = \overrightarrow{MM'} = dx\,\vec{e}_x + dy\,\vec{e}_y + dz\,\vec{e}_z$$

Vecteur position $\vec{OM}$:

$$\vec{OM} = x(t)\vec{e}_x + y(t)\vec{e}_y + z(t)\vec{e}_z = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}_{\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z}$$

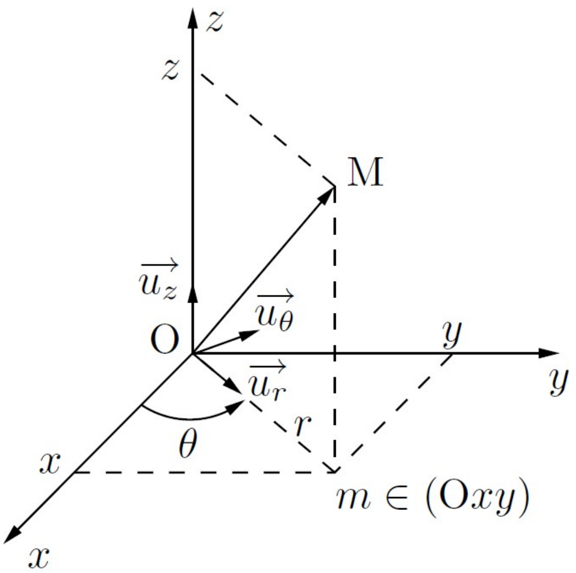
<u>R</u>mq (notation) souvent on sous entend la dépendance en t : $\vec{OM} = x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z$

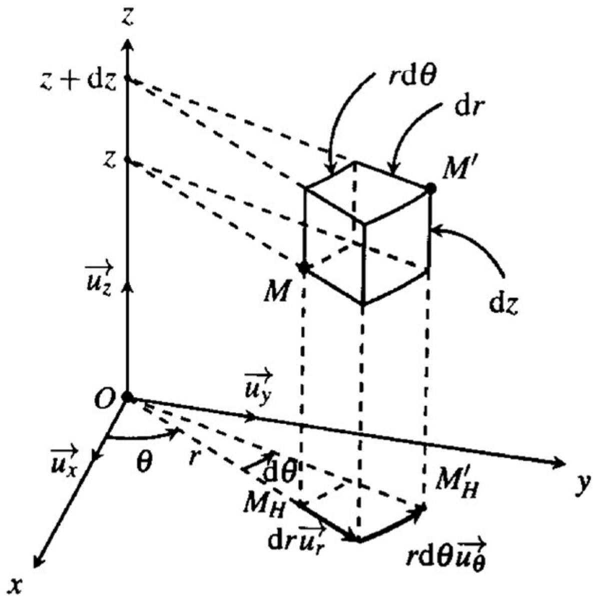
vecteur-vitesse instantanée en coordonnées cartésiennes : $\vec{v} = \dfrac{d\vec{OM}}{dt} = \dfrac{dx}{dt}\vec{e}_x + \dfrac{dy}{dt}\vec{e}_y + \dfrac{dz}{dt}\vec{e}_z$

soit : $\boxed{\vec{v} = \dot{x}\,\vec{e}_x + \dot{y}\,\vec{e}_z + \dot{z}\,\vec{e}_z}$

vecteur-accélération instantanée : $\boxed{\vec{a} = \ddot{x}\,\vec{e}_x + \ddot{y}\,\vec{e}_z + \ddot{z}\,\vec{e}_z}$

c Cordonnées cylindriques





r= Om avec le point m qui est la projection orthogonal de M dans le plan (Oxy)

et $\theta \in [0, 2\pi[$

coordonnées cylindriques = **coordonnées polaires + hauteur z**

vecteur position : $\boxed{\vec{OM} = r\,\vec{u}_r + z\,\vec{u}_z}$

vecteur vitesse : $\vec{v}(t) = \dfrac{d\vec{OM}}{dt} = \dfrac{dr}{dt}\vec{u}_r + r\dfrac{d\theta}{dt}\vec{u}_r + \dfrac{dz}{dt}\vec{u}_z$

soit $\boxed{\vec{v}(t) = \dot{r}\,\vec{u}_r + r\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + \dot{z}\,\vec{u}_z}$

vecteur accélération instantanée en coordonnées cylindriques

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d}{dt}(\dot{r}\,\vec{u}_r + r\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + \dot{z}\,\vec{u}_z) \quad \text{soit} \quad \boxed{\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\vec{u_r} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\,\vec{u_\theta} + \ddot{z}\,\vec{u_z}}$$

Le déplacement élémentaire du point passant de M à M' infiniment voisin s'écrit :

$$\boxed{d\vec{OM} = \vec{MM}' = dr\,\vec{u}_r + r\,d\theta\,\vec{u}_\theta + dz\,\vec{e}_z}$$

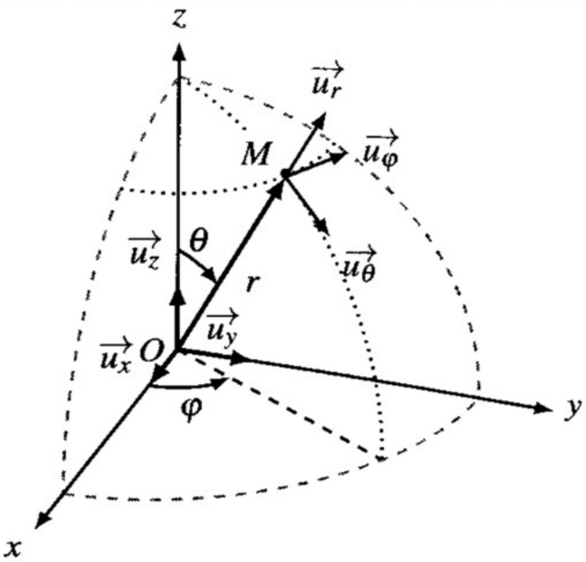
Le déplacement élémentaire se décompose en 3 composantes :

-Une variation de la distance r pour arriver en M'

-Une rotation (variation de θ seul en conservant le même r)

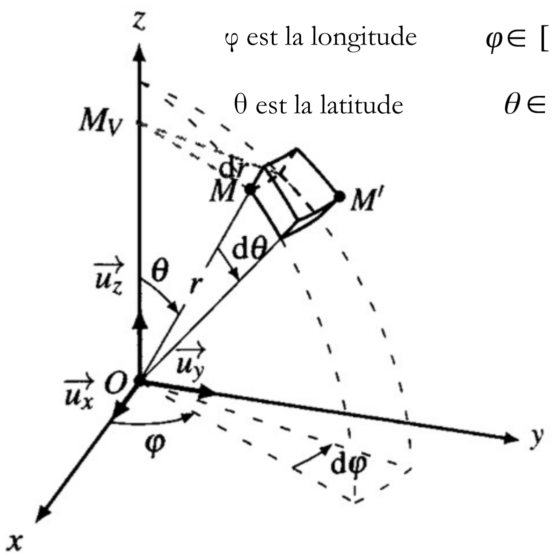
-Une variation de z seul

d Cordonnées sphériques



φ est la longitude $\varphi \in [0, 2\pi[$

θ est la latitude $\theta \in [0, \pi]$



vecteur-position $\vec{OM} = r\,\vec{u}_r$

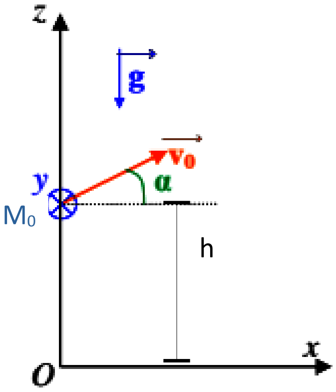
vecteur-vitesse $\vec{v} = \dot{r}\,u_r + r\,\dot{\theta}\,\vec{u}_\theta + r\sin\theta\,\dot{\phi}\,\vec{u}_\phi$

Vecteur déplacement élémentaire

$$d\vec{OM} = dr\,\vec{u}_r + r\,d\theta\,\vec{u}_\theta + r\sin(\theta)\,d\varphi\,\vec{u}_\varphi$$

II Étude de Mouvements simples

II.1 Mouvement de vecteur-accélération constant



On étudie le mouvement d'un balle de masse m, assimilée à son centre de masse M, en chute libre, lancée avec une vitesse initiale v_0 à une hauteur (ou côte) h de l'origine O du repère.

Système : {balle} référentiel : Terrestre, supposé galiléen (abrégé TSG)

Bilan des forces : chute libre (pas de force de frottement) donc seulement $\vec{P}=m\vec{g}$

a) Application de la 2ème loi de Newton au système

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=m\vec{a}=\sum \vec{F}_{ext}\Leftrightarrow m\vec{a}=m\vec{g}\Leftrightarrow\vec{a}=\vec{g}$$

$\vec{g}$ est dirigé dans le sens opposé à l'axe Oz $\vec{a}=\vec{g}=\begin{cases}0\\0\\-g\end{cases}=-g\vec{e}_z$ avec g = 9,81 m.s^{-2} $\quad\vec{a}(t)=-g\vec{e}_z\Leftrightarrow\begin{cases}a_x(t)=0\\a_y(t)=0\\a_z(t)=-g\end{cases}$

b) Vecteur vitesse :

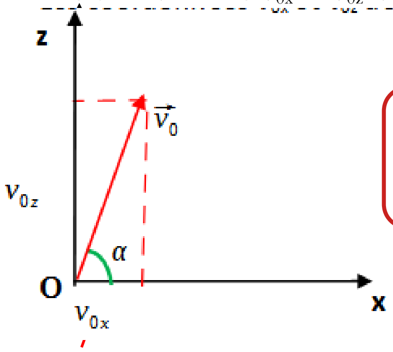
les composantes du vecteur vitesse instantané sont les primitives par rapport au temps des composantes du vecteur accélération instantanées

$$\overrightarrow{v(t)}=\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}(t)=\begin{cases}v_x(t)=C_1\\v_y(t)=C_2\\v_z(t)=-gt+C_3\end{cases}=C_1\vec{e}_x+C_2\vec{e}_y+(-gt+C_3)\vec{e}_z$$

Avec C_1 , C_2 , C_3 des constantes que l'on peut déterminer grâce aux conditions initiales

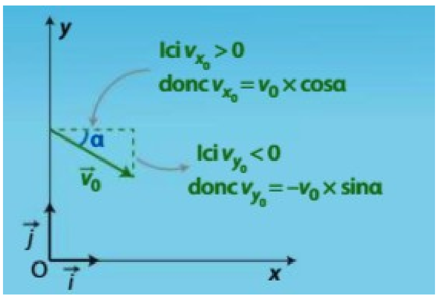
Soit un vecteur $\vec{v}_0$ de norme v_0 qui forme un angle α avec l'axe Ox.

Les coordonnées v_{0x} et v_{0z} de ce vecteur selon les axes Ox et Oz sont données par :



$$\vec{v}_0=\begin{cases}v_{0x}=v_0\times\cos(\alpha)\\v_{0z}=v_0\times\sin(\alpha)\end{cases}$$

Attention au sens du vecteur !



$$\vec{v}_0=\begin{cases}v_{0x}=v_0\times\cos(\alpha)\\v_{0y}=-v_0\times\sin(\alpha)\end{cases}$$

Utilisation de la condition initiale sur la vitesse

À l'instant t=0 $\quad v(\vec{t=0})=\vec{v}_0\Leftrightarrow\begin{cases}v_x(t=0)=v_{0x}=v_0\times\cos(\alpha)\\v_y(0)=0\\v_z(t=0)=v_{0z}=v_0\times\sin(\alpha)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}C_1=v_0\cos\alpha\\C_2=0\\g\times0+C_3=v_0\times\sin(\alpha)\end{cases}$

finalement $\quad\overrightarrow{v(t)}=\begin{cases}v_x(t)=v_0\times\cos(\alpha)\\v_y(t)=0\\v_z(t)=-g\times t+v_0\times\sin(\alpha)\end{cases}$

c) Détermination des coordonnées (lois horaires du mouvement) :

On primitive le vecteur vitesse pour obtenir le vecteur position

$$\vec{OM}(t)=\begin{cases} x(t)=v_0\times\cos(\alpha)\times t+C_1' \\ y(t)=C_2' \\ z(t)=\dfrac{-1}{2}g\times t^2+v_0\times\sin(\alpha)\times t+C_3' \end{cases}$$

en utilisant les contions initiales $\vec{OM}(0)=\begin{pmatrix}0\\0\\h\end{pmatrix}=h\vec{e}_z$

on obtient les trois **équations horaires du mouvement**

$$\boxed{\vec{OM}(t)=\begin{cases} x(t)=v_0\times\cos(\alpha)\times t \\ y(t)=0 \\ z(t)=\dfrac{-1}{2}g\times t^2+v_0\times\sin(\alpha)\times t+h \end{cases}}$$

Rmq : y=0 à tout instant : le mvt s'effectue dans le plan OXZ

Ssi $v_0 = 0$ (vitesse initiale nulle) alors x = 0 à tout instant et $z(t)=\dfrac{-1}{2}g\times t^2+h$ **: le mouvement est vertical**

d) Détermination de la trajectoire du système.

La trajectoire du système est la courbe représentative des postions successives du système.

Ici, c'est la courbe représentative la fonction d'équation z=f(x)

Rmq: Il ne faut pas confondre **trajectoire z=f(x) et les équations horaires z= f(t) , x = g(t)**

On supprime la variable temps dans le système d'équations horaires :

$$\begin{cases} x(t)=v_0\times\cos(\alpha)\times t \\ z(t)=\dfrac{-1}{2}\times g\times t^2+v_0\times\sin(\alpha)\times t+h \end{cases} \iff \begin{cases} t=\dfrac{x}{v_0\times\cos(\alpha)} \\ z(t)=\dfrac{-1}{2}\times g\times t^2+v_0\times\sin(\alpha)\times t+h \end{cases}$$

On réinjecte l'expression de t en fonction de x dans l'expression de z(t) :

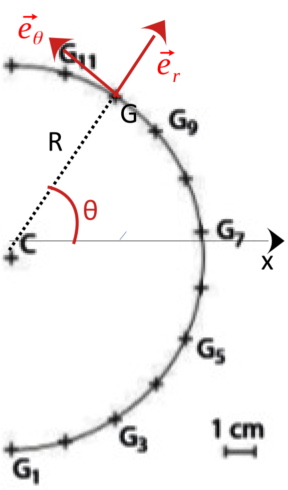
$$z(x)=\frac{-1}{2}\times g\times\left(\frac{x}{v_0\times\cos(\alpha)}\right)^2+v_0\times\sin(\alpha)\times\frac{x}{v_0\times\cos(\alpha)}+h$$

donc $z(x)=\dfrac{-g\,x^2}{2v_0^2\times\cos(\alpha)^2}+\dfrac{v_0\times\sin(\alpha)}{v_0\times\cos(\alpha)}\times x+h$ or $\dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}=\tan(\alpha)$ soit $\boxed{z(x)=\dfrac{-g\,x^2}{2v_0^2\times\cos(\alpha)^2}+\tan(\alpha)x+h}$

Cette équation a pour représentation graphique une parabole, on dit que la trajectoire est parabolique.

II.2 Mouvement circulaire

a) mouvement circulaire uniforme



Circulaire → la distance OG est constante au cours du temps

Uniforme → la norme du vecteur vitesse est constante au cours du temps $\boldsymbol{v=\|\vec{v}\|=v_0=cste}$

<u>**Vecteur position :**</u> $\vec{OG}=R\,\vec{e}_r$

<u>**Vecteur vitesse :**</u> $\vec{v}=\dfrac{d}{dt}(\vec{OG})=\underbrace{\dfrac{dR}{dt}}_{0\text{ car mvt circ}}\vec{e}_r+R\dfrac{d\vec{e}_r}{dt}=R\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta \iff \boxed{\vec{v}=R\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta}$

Comme la vitesse est constante

$\|\vec{v}\|=v_0\Leftrightarrow\|R\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta\|=v_0\Leftrightarrow R\dot{\theta}=v_0\Leftrightarrow\boxed{\dot{\theta}=\dfrac{v_0}{R}}$ La vitesse angulaire est aussi constante

On note souvent $\omega_0=\dot{\theta}=\dfrac{v_0}{R}$

Vocabulaire : comme $\vec{v}$ est orthogonal au rayon R, on dit que le vecteur vitesse est orthoradial

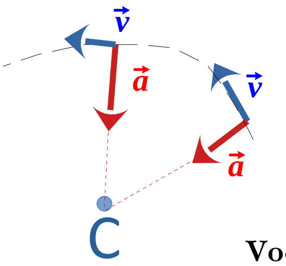
0 car mvt circulaire

vecteur accélération : $\vec{a}=\frac{d}{dt}(\vec{v})=\frac{dR}{dt}\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta+R\ddot{\theta}\,\vec{e}_\theta+R\dot{\theta}\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}=R\dot{\theta}(-\dot{\theta}\,\vec{e}_r)\Leftrightarrow\boxed{\vec{a}=-R\dot{\theta}^2\vec{e}_r}$

0 car mvt uniforme

En fonction de v_0 et R : $\vec{a}=-R\left(\frac{v_0}{R}\right)^2\vec{e}_r\Leftrightarrow\boxed{\vec{a}=\frac{-v_0^2}{R}\vec{e}_r}$ En fonction de ω_0 et R : $\boxed{\vec{a}=-R\,\omega_0^2\,\vec{e}_r}$

$\omega_0=\dot{\theta}=\frac{v_0}{R}$



Attention ! Mouvement uniforme <u>ne veut pas dire accélération nulle</u> :

Ici le vecteur accélération est constant en norme par contre la direction varie dans la base cartésienne : $\vec{a}$ est dirigé selon $-\vec{e}_r$

Vocabulaire : comme $\vec{a}$ est dirigé vers le centre et colinéaire à $\vec{e}_r$ on dit que l'accélération est centripète (dirigée dans la concavité de la trajectoire)

Rmq (HP) : Un objet de masse m en M suivant cette trajectoire subit une force dite centrifuge telle que :

$\vec{F}_{centrifuge}=-m\vec{a}=m\frac{v_0{}^2}{R}\vec{e}_r$: C'est pour cette raison qu'on est poussé vers l'extérieur dans une voiture qui tourne : plus virage est serrer plus la force est grande (dépendance en 1/R) , plus la vitesse est grande plus la force est grande (dépendance en $v_0{}^2$)

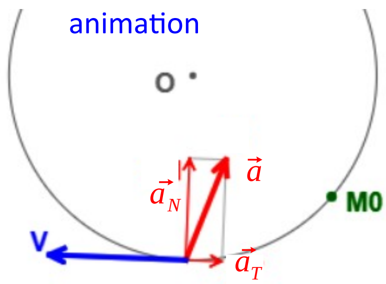
b) Mouvement circulaire non uniforme

On a toujours $\vec{v}=R\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$

0 car mvt circulaire

Par contre $\vec{a}=\frac{d}{dt}(\vec{v})=\frac{dR}{dt}\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta+R\ddot{\theta}\,\vec{e}_\theta+R\dot{\theta}\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}=R\ddot{\theta}\,\vec{e}_\theta+R\dot{\theta}(-\dot{\theta}\,\vec{e}_r)\Leftrightarrow\vec{a}=R\ddot{\theta}\,\vec{e}_\theta-R\dot{\theta}^2\vec{e}_r$

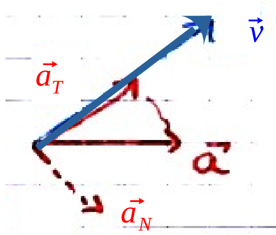
que l'on peut aussi écrire $\boxed{\vec{a}=\underbrace{\frac{dv}{dt}\vec{e}_\theta}_{\text{Accélération tangentielle } \vec{a}_T}+\underbrace{-\frac{v^2}{R}\vec{e}_r}_{\text{Accélération centripète } \vec{a}_N}}$

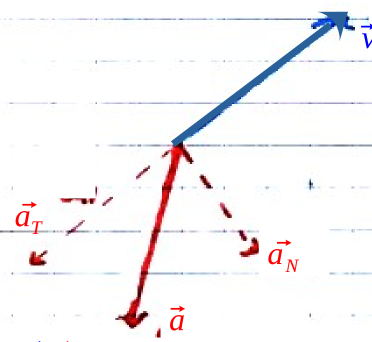


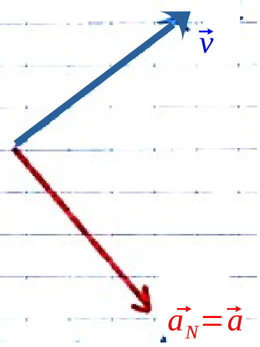
Comme l'accélération angulaire $\ddot{\theta}$ n'est pas nulle :
le vecteur accélération possède une composante tangentielle (c'est à dire selon $\vec{e}_\theta$)

c) Interprétation du vecteur $\vec{a}$

Seule la composante tangentielle du vecteur accélération permet de modifier la norme du vecteur vitesse







Angle aigu entre $\vec{v}$ et $\vec{a}$

$\vec{v}\cdot\vec{a}>0$ → Mvt accéléré

$\vec{v}\cdot\vec{a}=r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta\cdot\left(\frac{dv}{dt}\vec{e}_\theta+-\frac{v^2}{R}\vec{e}_r\right)$

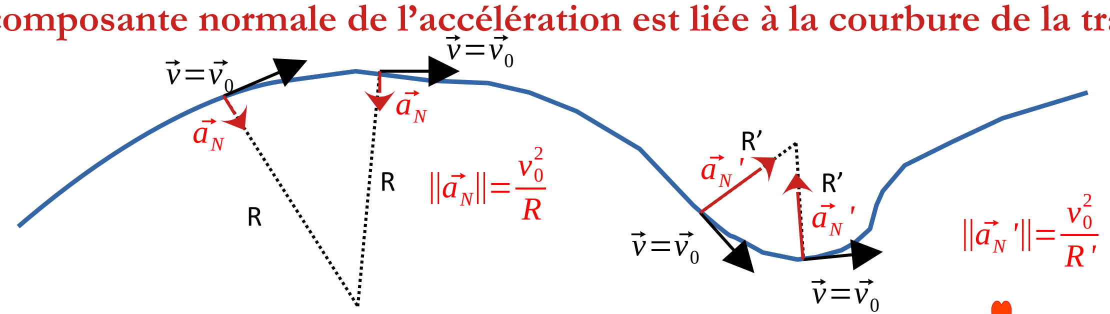
$\vec{v}\cdot\vec{a}=r\dot{\theta}\frac{dv}{dt}$ $\vec{v}\cdot\vec{a}>0\Leftrightarrow=r\dot{\theta}\frac{dv}{dt}>0\Leftrightarrow\frac{dv}{dt}>0$

$\vec{v}\cdot\vec{a}<0$ → Mvt ralenti (décéléré)

$\vec{v}\cdot\vec{a}=0$ → Mvt uniforme

$\vec{a}_T=\frac{dv}{dt}\vec{e}_\theta=\vec{0}\Rightarrow\frac{dv}{dt}=0\Rightarrow v=cste$

Rmq : la **composante normale de l'accélération est liée à la courbure de la trajectoire**



Si a_N est d'autant plus grand que le rayon de courbure local R est petit
Ici R>R' donc $a_N' > a_N$

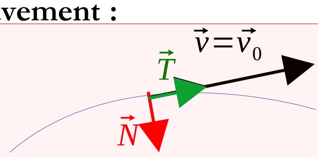
<u>Repère de Frenet :</u> on utilise parfois le repère de Frenet pour d'écrire le mouvement :

- **$\vec{T}$ est le vecteur unitaire tangent à la trajectoire**

et orienté dans le sens du mouvement (donc de $\vec{v}$)

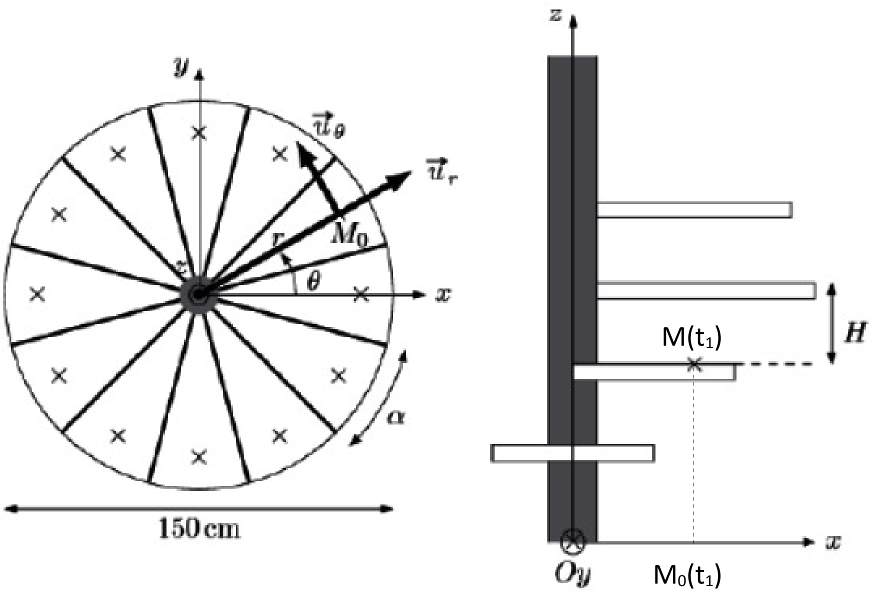
- **$\vec{N}$ est le vecteur unitaire normale à la trajectoire**

orienté dans le sens de la concavité (donc de $\vec{a}_N$)



O n a donc dans ce repère : $a_{\vec{/Frenet}}=\frac{dv}{dt}\vec{T}$ + $\frac{v^2}{R}\vec{N}$ **et** $v_{\vec{/Frenet}}=r\dot{\theta}\vec{T}+\dot{r}\vec{N}$

II.3 Mouvement hélicoïdal



Un escalier en colimaçon est constitué de quatorze marches régulièrement disposées autour d'un pilier central.
Une personne assimiler à un point M monte d'une démarche régulière à raison d'une marche par seconde en restant à r= 60 cm de Oz

sur la figure de gauche M_0 est le projeté ortho de M suivant le plan perpendiculaire à Oz . Les croix représentent les positions successives de M_0 au niveau de chaque marche
la figure fait apparaître l'angle des marches : α=30°

Q1 On donne H = 20 cm Estimer la dérivée temporelle $\dot{z}$ de la cote (altitude) z du point M.
Le mouvement est-il accéléré suivant Oz ? Proposer une expression de z(t) en prenant z=0 à t=0s

une marche par seconde donc $\dot{z}\approx\frac{H}{\Delta t}$ avec Δt = 1s $\dot{z}\approx 0{,}2\,m/s$ le mouvement n'est pas accéléré selon z

En primitivant $z(t)=0{,}2t+z(0)=0{,}2t$

Q2 Nous nous intéressons à la rotation de M_0 autour du pilier .Qualifier le mouvement de M_0 donner la valeur de la vitesse angulaire $\dot{\theta}$

le mouvement de M_0 est circulaire uniforme, chaque seconde il monte d'une marche donc l'angle θ(t) augmente de 30° ainsi $\dot{\theta}\approx\frac{\theta(t+\Delta t)-\theta(t)}{\Delta t}=\frac{\alpha}{\Delta t}$ A.N $\dot{\theta}\approx\frac{30\times\pi}{180}=1{,}4\,rad\cdot s^{-1}$

Q3 Exprimer les vecteurs vitesse et accélération de M_0 dans le référentiel $\mathscr{R}$. Calculer la norme de la vitesse.

En coordonnées polaires : $\vec{v}(M_0)=\frac{d}{dt}(r\,\vec{e}_r)=\dot{r}\,\vec{e}_r+r\,\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta=r\,\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$ A.N $\|\vec{v}(M_0)\|=0{,}2\times1{,}4=2{,}9\,m\cdot s^{-1}$

$\vec{a}(M_0)=\frac{d}{dt}(r\,\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta)=-r\,\dot{\theta}^2\,\vec{e}_r$

Q4 Donner le lien entre $\dot{z}$ et $\dot{\theta}$

Q5 Exprimer dans la base $(\vec{u}_r,\vec{u}_\theta,\vec{u}_z)$, les vecteurs vitesse et accélération de M dans $\mathscr{R}$

III Cinématique du solide : exemples simples

III.1) Translation

Déf : Un solide est en translation lorsque $\forall(A,B)\in Solide,\ \vec{v}(A)=\vec{v}(B)$

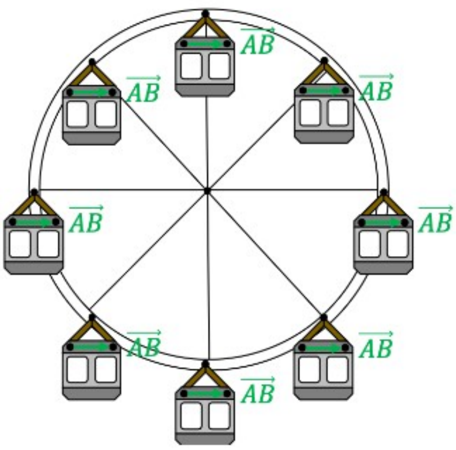
Rmq : La norme de la vitesse peut varier au cours du temps, mais elle varie de la même façon pour tous les points !

a) Translations rectilignes

Def: un solide a un mouvement de translation rectiligne dans un référentiel donnée lorsque les trajectoires des points du solide sont des droites parallèles.

Propriété : Un solide est en translation lorsque les directions du repère lié au solide sont liée par rapport au référentiel d'étude

Exemples : une valise sur un tapis roulant (dans le référentiel terrestre), un ascenseur (dans le référentiel terrestre)



b) translation circulaire

Def : Une translation est circulaire (dans un référentiel donnée) lorsque chaque point du solide a un mouvement circulaire, de même rayon mais de centre différent

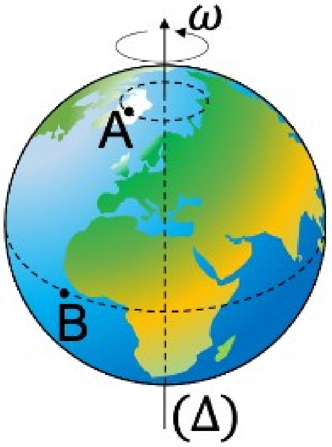
Exemple : cabine de la grande roue du prado

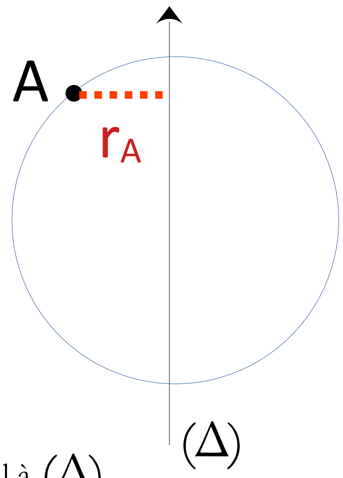
Propriété :

Les axes et les vecteurs reliant deux points du solide (comme $\vec{AB}$) restent identiques lors de la translation circulaire

III.2) Rotation autour d'un axe fixe

Déf : Un solide est en rotation autour d'un axe fixe Δ si tous les points du solide sont en mouvement circulaire autour de l'axe Δ





Soit un solide en rotation autour d'un axe Δ à la vitesse angulaire ω

Soit A un point du solide, à la distance r_A de l'axe Δ

On a $\omega=\dot{\theta}$ (Indépendant du point A considérée)

En coordonnées cylindriques dans le plan normal à Δ et passant par A :

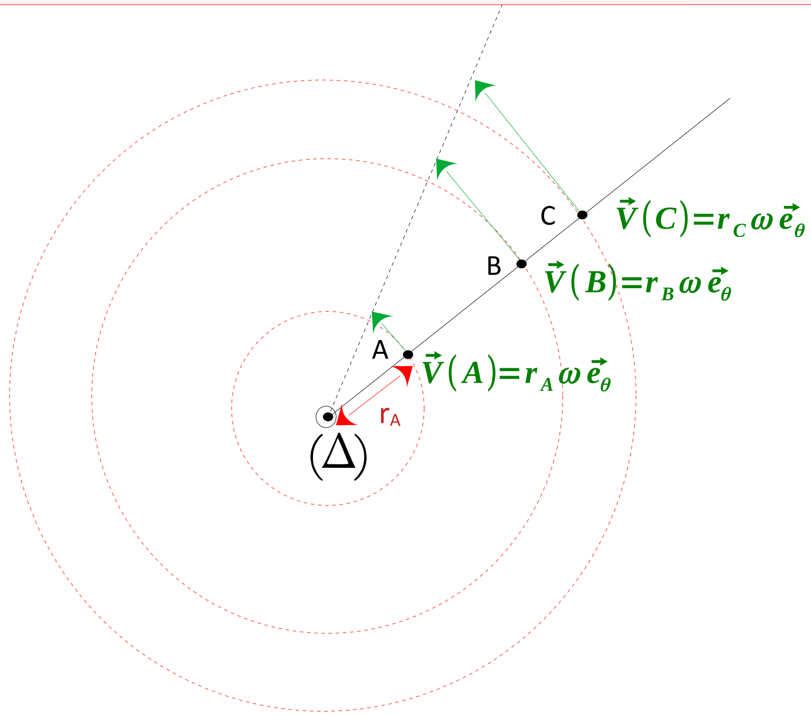
$$\vec{V}(A)=\dot{r}\,\vec{e}_r+r\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta+\dot{z}\,\vec{e}_z$$

Comme $r=r_A$ =cste , $\omega=\dot{\theta}$ et $\dot{z}=0$

$$\boxed{\vec{V}(A)=r\omega\,\vec{e}_\theta}$$

Vue de haut du plan normal à (Δ)

Champ de vitesse : Tous les points du solide possèdent un $\vec{v}$ orthoradial de norme d'autant plus importante que le point est éloignée de l'axe . à vitesse angulaire constante, la norme est proportionnelle à la distance au centre



champ d'accélération : à vitesse angulaire ω constante : $\vec{a}(B)=-r_B\omega^2\,\vec{e}_r$