

# PROGRAMME DE COLLES N° 8

Semaine du 18/11/2024 au 22/11/2024

👉 *Applications, fonctions numériques de la variable réelle* 👈

## Format de la colle :

- Automatismes de calcul (env. 10 min) : quelques items simples parmi les thèmes de la liste (actualisée chaque semaine) en page 2.
- Restitution du cours (env. 15 min) : définition et/ou théorème des chapitres au programme, puis démonstrations, exemples ou exercices exigibles listés plus bas.
- Exercice(s) libre(s) (env 30 min).

## — Chapitre 6 : Applications —

Tout le chapitre.

NB : le programme officiel ne différencie pas fonction et application.

### 1 Applications, restriction, prolongement

- 1.1 Généralités : une application est un triplet, image, antécédent, notations, diagramme associé . . . . .
- 1.2 Famille indexée par un ensemble . . . . .
- 1.3 Restriction, prolongement . . . . .
- 1.4 Opérations algébriques dans  $\mathcal{F}(E, \mathbb{K})$  . . . . .
- 1.5 Fonction identité et composition d'applications . . . . .
- 1.6 Fonction indicatrice d'un ensemble . . . . .

### 2 Injection, surjection, bijection

- 2.1 Injectivité, cas des fonctions réelles strictement monotones, composition d'injections . . . . .
- 2.2 Surjectivité, composition de surjections . . . . .
- 2.3 Bijektivité : bijection, fonction réciproque, lien avec l'inversibilité à droite et à gauche . . . . .

### 3 Image directe, image réciproque

- 3.1 Image directe, opérations . . . . .
- 3.2 Image réciproque, opérations, cas d'une fonction bijective : l'image directe d'une partie par  $f^{-1}$  est égale à l'image réciproque par  $f$  . . . . .

## — Chapitre 7 : Fonctions numériques de la variable réelle —

Seulement la section 1.

### 1 Définition, généralités

- 1.1 Fonction numérique de la variable réelle . . . . .
- 1.2 Courbe d'une fonction réelle de la variable réelle . . . . .
- 1.3 Parité, imparité, la bijection réciproque d'une bijection impaire est impaire . . . . .

- 1.4 Périodicité . . . . .
- 1.5 Fonctions majorées, minorées, bornées, extrema . . . . .
- 1.6 Monotonie, cas de la réciproque d'une bijection monotone . . . . .

### Démonstrations, exemples ou exercices exigibles comme questions de cours

- Chapitre 6. Propositions 5 et 6. La composée de deux injections est une injection, la composée de deux surjections est une surjection et les réciproques partielles.
- Chapitre 6. Proposition 7 :  $f : E \rightarrow F$  est bijective si et seulement si elle admet un même inverse à droite et à gauche, qui se trouve être  $f^{-1}$ .
- Chapitre 6. Propositions 9 et 10. Si  $f : E \rightarrow F$ ,  $A, A' \subset E$  et  $B, B' \subset F$  alors

$$f(A \cup A') = f(A) \cup f(A') \quad \text{et} \quad f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$$

- Chapitre 7. Exemple 2.7 et Proposition 4.(vi). Si  $f : X \rightarrow Y$  avec  $X, Y \subset \mathbb{R}$  est une fonction impaire et bijective alors  $f^{-1}$  est impaire.  
Si  $f$  est bijective et strictement monotone, alors  $f^{-1}$  aussi de même sens de variations que  $f$ .

## Automatismes de calcul

On donne quelques exemples de capacité attendue pour chaque thème.

[Le cahier de calcul](#) fournit également une excellente source d'entraînement/inspiration.

- **Logique, raisonnement**

Exemples : montrer que  $x^2 + y^2 \geq 2xy$  pour tous  $x, y \in \mathbb{R}$ , savoir écrire en langage symbolique qu'une suite est majorée, qu'une fonction est  $2\pi$ -périodique et savoir nier ces assertions.

- **Trigonométrie.**

Exemples : formule  $\cos(2a)$ , résolution de  $\sin a = \sin b$ ,  $\cos(2x + 1) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\cos x = \sin x$ .

- **Inégalités : résoudre/prouver des inégalités simples**

Exemples : résoudre  $|x| \leq 3x + 2$ , montrer que  $|\sin(nx)| \leq n |\sin x|$  pour tous  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , encadrer rapidement  $x \mapsto \frac{\cos x + 2}{x^2 + 4}$  sur  $[0; 1]$ .

- **Calcul élémentaire de nombres complexes** (module, argument, linéarisation, angle moitié, racines carrées,  $n$ -ièmes).

Exemples : calculer la forme exponentielle de  $\sqrt{3} - 3i$ , les racines carrées de  $3 - 4i$ , linéarisation de  $\cos^3 x$ , résolution de  $z^n = 1$  dans  $\mathbb{C}$ .

- **Calcul algébrique** (fractions, simplification d'expressions, sommes et produits usuels, coefficients binomiaux, formule du binôme, etc).

Exemples : donner la formule pour  $\sum_{k=1}^n q^k$ , calculer  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k$ , écrire  $\prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k+1}$  avec des factorielles.