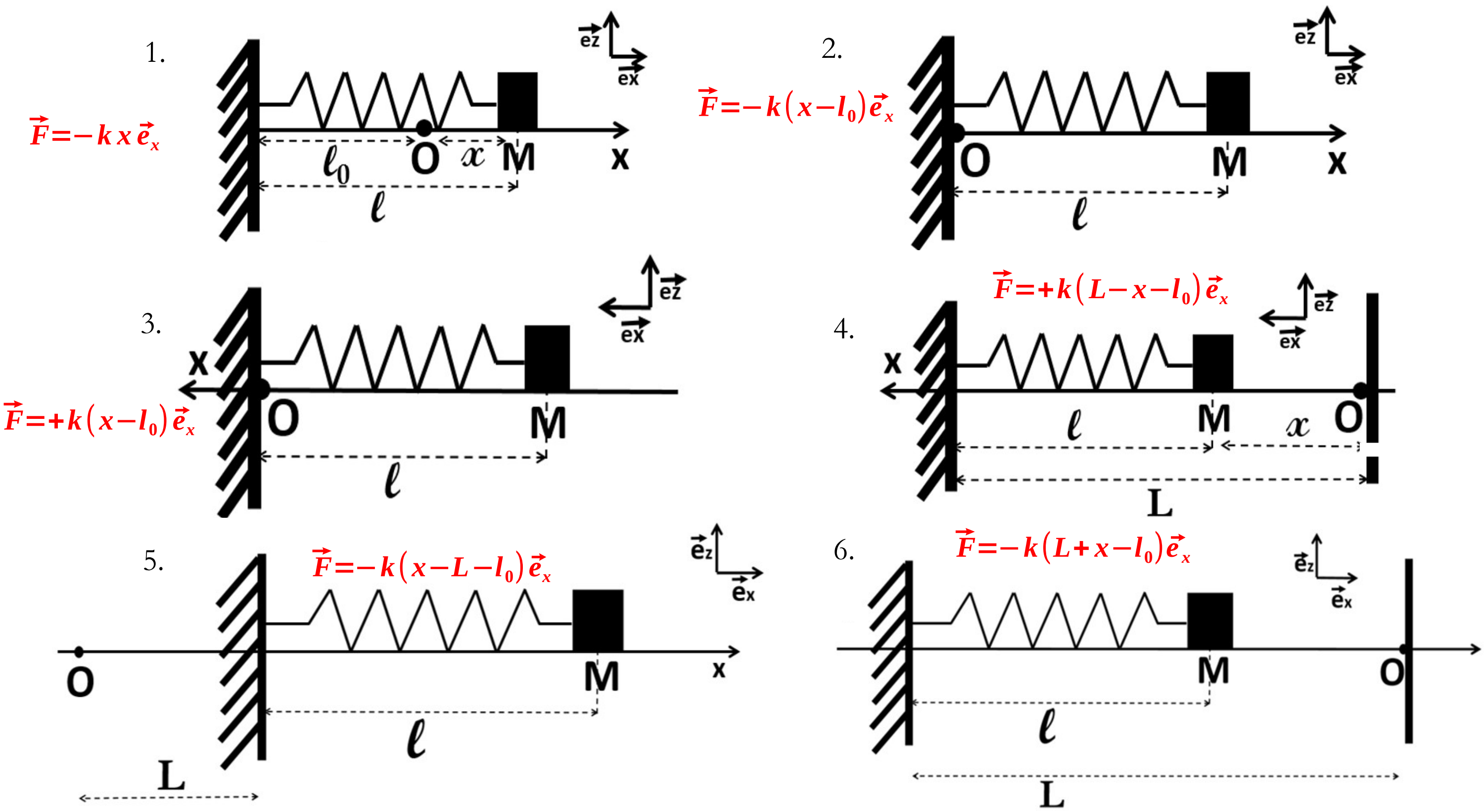
TD06- OSCILLATEUR HARMONIQUE

Exercice 2 : expression de la force de rappel

Donner l'expression de la force de rappel du ressort (de raideur k et de longueur à vide l_0) qui s'exerce sur le point M en fonction de x, $\vec{e}_x$, et éventuellement d'autres paramètres à déterminer.



méthode : si $\vec{e}_x$ s'éloigne du point d'accroche du ressort : $\vec{F}=-k(l-l_0)\vec{e}_x$

si $\vec{e}_x$ est orienté vers le point d'accroche du ressort : $\vec{F}=+k(l-l_0)\vec{e}_x$

on cherche ensuite l'expression de la longueur du ressort l en fonction des paramètres du problème, en se rappelant que :

- **l est positive par définition**
- x peut être négatif selon le sens de l'axe et la position de l'origine du repère

Exercice 3

1. $\frac{dx}{dt}=-A\omega_0\sin(\omega_0 t)+B\omega_0\cos(\omega_0 t)$ $\qquad \frac{d^2x}{dt^2}=-A\omega_0^2\cos(\omega_0 t)-B\omega_0^2\sin(\omega_0 t)=-\omega_0^2 x(t)$

on a bien $\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_0^2 x(t)=0$

2. $\frac{dx}{dt}=C\omega_0\cos(\omega_0 t+\psi)$ $\qquad \frac{d^2x}{dt^2}=-C\omega_0^2\sin(\omega_0 t+\psi)=-\omega_0^2 x(t)$

on a bien $\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_0^2 x(t)=0$

3. $\frac{dx}{dt}=-D\omega_0\sin(\omega_0 t+\phi)$ $\qquad \frac{d^2x}{dt^2}=-D\omega_0^2\cos(\omega_0 t+\phi)=-\omega_0^2 x(t)$

on a bien $\frac{d^2x}{dt^2}+\omega_0^2 x(t)=0$

Exercice 4 : Pour mieux comprendre le cours (2)

Résoudre les équations différentielles suivantes en introduisant une pulsation propre ω_0 et en représentant le système physique correspondant pour t>0.

1. $(L_1+L_2)\dfrac{d^2q}{dt^2}+\dfrac{C_1+C_2}{C_1C_2}q(t)=0$ **avec $q_0 = C_1U_0$** et $\dot{q}_0=0$

On peut mettre l'équation sous la forme $\dfrac{d^2q}{dt^2}+\dfrac{C_1+C_2}{C_1C_2(L_1+L_2)}q(t)=0$ on reconnaît l'équation homogène différentielle associée à une oscillateur harmonique on a $\omega_0^2=\dfrac{C_1+C_2}{C_1C_2(L_1+L_2)}\Rightarrow\omega_0=\sqrt{\dfrac{C_1+C_2}{C_1C_2(L_1+L_2)}}$

Solutions de l'équation homogène : $\boldsymbol{q(t)=q_0\cos(\omega_0t)+\frac{\dot{q}_0}{\omega_0}\sin(\omega_0t)}$ ici $\boldsymbol{q(t)=C_1U_0\cos(\omega_0t)}$

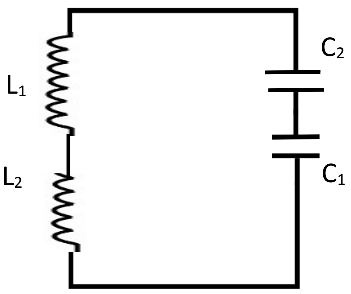
Schéma du circuit :

on sait que pour un circuit LC série on a $\omega_0^2=\dfrac{1}{LC}$

Par identification $\omega_0^2=\dfrac{C_1+C_2}{C_1C_2(L_1+L_2)}=\dfrac{1}{L_{eq}C_{eq}}$ par identification $L_{eq}=L_1+L_2$ et $C_{eq}=\dfrac{1}{\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}}$

Ainsi on reconnaît l'inductance associée à deux bobines en série et la capacité associée à 2 condensateur en série
On peut vérifier que l'on retrouve bien la même équation différentielle

schéma du système



$$(L_1+L_2)\frac{di}{dt}=-\frac{q_1}{C_1}-\frac{q_2}{C_2}$$

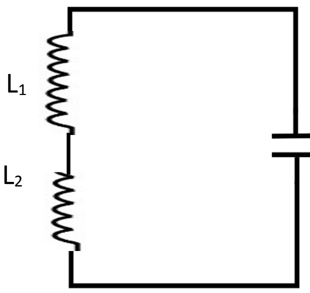
$$q_1(t)+q_2(t)=q_0$$

Ainsi $i(t)=\dfrac{dq_1}{dt}=-\dfrac{dq_2}{dt}$

On a donc $(L_1+L_2)\dfrac{d^2q_1}{dt^2}=-\dfrac{q_1}{C_1}-\dfrac{(q_0-q_1)}{C_2}\Rightarrow(L_1+L_2)\dfrac{d^2q_1}{dt^2}+q_1(\dfrac{1}{C_1}-\dfrac{1}{C_2})=\dfrac{q_0}{C_2}$

Attention : on ne retrouve pas la même équation pour q_1 (ni pour q_2) on ne peut pas considérer que le circuit précédent correspond à l'équation différentielle. Il ne faut pas simplifier trop hâtivement le système

schéma du système



$C_{eq}=\dfrac{C_1C_2}{C_1+C_2}$

$$(L_1+L_2)\frac{di}{dt}=-q(t)\times C_{eq}$$

$$i(t)=\frac{dq}{dt}$$

$$\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{C_1+C_2}{C_1C_2(L_1+L_2)}q(t)=0$$

La tension initiale aux bornes du condensateur doit être $U=\dfrac{q_0}{C_{eq}}$ **comme $q_0 = C_1U_0$** $U=\dfrac{C_1U_0}{C_{eq}}$

2. $(m_1+m_2)\frac{d^2x}{dt^2}+k\,x(t)=0$ avec $x_0=0$ et $\dot{x}_0=A$

On peut mettre l'équation sous la forme $\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{(m_1+m_2)}x(t)=0$ on reconnaît l'équation homogène différentielle associée à une oscillateur harmonique on a $\omega_0^2=\frac{k}{(m_1+m_2)}\Rightarrow\omega_0=\sqrt{\frac{k}{(m_1+m_2)}}$

Solution de l'équation différentielle homogne : $x(t)=x_0\cos(\omega_0 t)+\frac{\dot{x}_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)$ ici $x(t)=A\cos(\omega_0 t)$

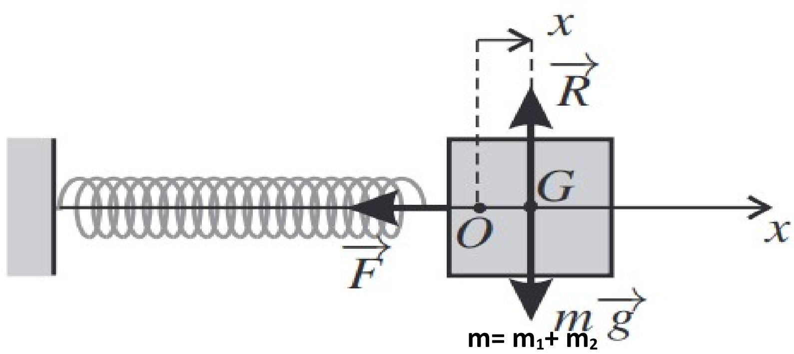
on sait que pour un système masse ressort simple on a $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$

par identification on a $m = m_1 + m_2$

(on peut imaginer que deux mobiles ponctuels de masse respective m_1 et m^2

Modélisation du système

ressort de raideur k



3. $L\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{1}{C_1+C_2}q(t)=E_0$ **avec**

q_0 = $(C_1+C_2)U_0$ et $\dot{q}_0=0$

On peut mettre l'équation sous la forme $\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{1}{L(C_1+C_2)}q(t)=\frac{E_0}{L}$

on reconnaît l'équation différentielle associée à une oscillateur harmonique **avec second membre.**

on a $\omega_0^2=\frac{1}{L(C_1+C_2)}\Rightarrow\omega_0=\sqrt{\frac{1}{L(C_1+C_2)}}$

Deux méthodes possibles pour résoudre l'équation avec un second membre

méthode 1 : les solutions seront de la forme $q(t) = q_H(t) + q_p(t)$

avec $q_p(t)$ une solution particulière : $q_p(t)=E_0(C_1+C_2)$

et q_H (t) la solution de l'équation différentielle homogène associée

on connaît la forme des solution de l'équation différentielle homogène associée

$q_H(t)=a\cos(\omega_0 t)+b\sin(\omega_0 t)$

Les solutions sont donc de la forme

$q(t)=q_H(t)+q_p(t)=a\cos(\omega_0 t)+b\sin(\omega_0 t)+E_0(C_1+C_2)$

à t=0 $\dot{q}_0=0\Rightarrow b=0$ **donc** $q(t)=a\cos(\omega_0 t)+E_0(C_1+C_2)$

à t=0 $q_0=U_0(C_1+C_2)\Rightarrow a+E_0(C_1+C_2)=U_0(C_1+C_2)\Rightarrow a=(U_0-E_0)(C_1+C_2)$

finalement $\boldsymbol{q(t)=(U_0-E_0)(C_1+C_2)\cos(\omega_0 t)+E_0(C_1+C_2)}$

Méthode 2 : on effectue le changement de variable u(t) = q(t) – $E_0(C_1 + C_2)$

la variable u(t) vérifie l'équation différentielle homogène : $\ddot{u}(t)+\omega_0^2 u(t)=0$

les solutions sont donc de la forme $u(t)=u_0\cos(\omega_0 t)+\frac{\dot{u}_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)$

avec $u_0 = q_0 - E_0(C_1 + C_2) = (U_0 - E_0)(C_1 + C_2)$ et $\dot{u}_0=\dot{q}_0=0$ donc

finalement $u(t)=(U_0-E_0)(C_1+C_2)\cos(\omega_0 t)$

comme $q(t) = u(t) + E_0(C_1 + C_2)$, on retrouve $q(t)=(U_0-E_0)(C_1+C_2)\cos(\omega_0 t)+E_0(C_1+C_2)$

schéma du système

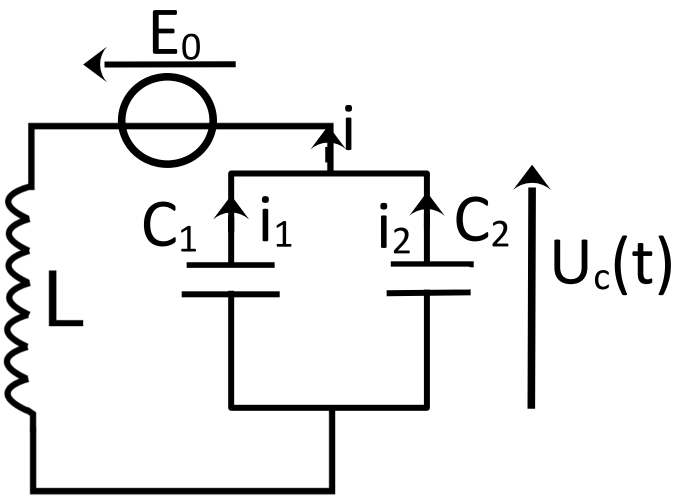
on sait que pour un circuit LC série on a $\omega_0^2=\frac{1}{LC}$

Par identification $\omega_0^2=\frac{1}{L(C_1+C_2)}=\frac{1}{L_{eq}C_{eq}}$ par identification $L_{eq}=L$ et $C_{eq}=C_1+C_2$

Ainsi on reconnaît la capacité associée à 2 condensateur en parallèle

de plus dans l'équation différentielle qui correspond à la loi des mailles on voit la présente d'un second membre constant qui correspond à un générateur idéal de tension de fem E_0

On peut vérifier que l'on retrouve bien la même équation différentielle à partir du schéma du système



Lois des mailles
$$L\frac{di}{dt}=\frac{-q_1}{C_1}+E_0$$
$$L\frac{di}{dt}=\frac{-q_2}{C_2}+E_0$$
$$\frac{q_1}{C_1}=\frac{q_2}{C_2}$$

Loi des noeuds $i=i_1+i_2$
$$i=\frac{dq_1}{dt}+\frac{dq_2}{dt}=\frac{dq_1}{dt}\left(1+\frac{C_2}{C_1}\right)$$
$$\frac{di}{dt}=\frac{d^2q_1}{dt^2}\left(\frac{C_1+C_2}{C_1}\right)$$
$$L\frac{d^2q_1}{dt^2}\frac{(C_1+C_2)}{C_1}=\frac{-q_1}{C_1}+E_0$$
$$\frac{d^2q_1}{dt^2}=\frac{-q_1}{L(C_1+C_2)}+E_0\frac{C_1}{(C_1+C_2)L} \quad (1)$$

De même on peut montrer que $i=\frac{dq_1}{dt}+\frac{dq_2}{dt}=\frac{dq_2}{dt}\left(1+\frac{C_1}{C_2}\right)\Rightarrow\frac{d^2q_2}{dt^2}=\frac{-q_2}{L(C_1+C_2)}+E_0\frac{C_2}{(C_1+C_2)L}$ **(2)**

$$\frac{d^2q_1}{dt^2}+\frac{d^2q_2}{dt^2}=\frac{-q_1}{L(C_1+C_2)}+\frac{-q_2}{L(C_1+C_2)}+E_0\frac{C_1}{(C_1+C_2)L}+E_0\frac{C_2}{(C_1+C_2)L}$$

$$\frac{d^2(q_1+q_2)}{dt^2}=\frac{-(q_1+q_2)}{(C_1+C_2)L}+E_0\frac{(C_1+C_2)}{(C_1+C_2)L}$$

en posant $q(t) = q_1(t) + q_2(t)$ on a bien l'équation différentielle

$L\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{1}{C_1+C_2}q(t)=E_0$ **de plus à $t=0^-$ si la tension aux bornes des condensateurs est U_0 est que les condensateur sont en convention récepteur on a $q_0 = q_{10} + q_{20} = (C_1 + C_2)U_0$**

Exercice 5 : Tension aux bornes d'un oscillateur à quartz

La tension électrique v(t) aux bornes d'un oscillateur à quartz (tel qu'on en trouve dans les montres) vérifie l'équation différentielle :

$$\frac{d^2v}{dt^2}+A^2v(t)=0 \quad \text{Avec } A = 4{,}239\text{x}10^{10} \text{ SI}$$

1 Quelle est la dimension de A ? Donner son unité dans le système international.

On reconnaît l'équation différentielle associée à un oscillateur harmonique de la forme $\frac{d^2v}{dt^2}+\omega_0^2v(t)=0$

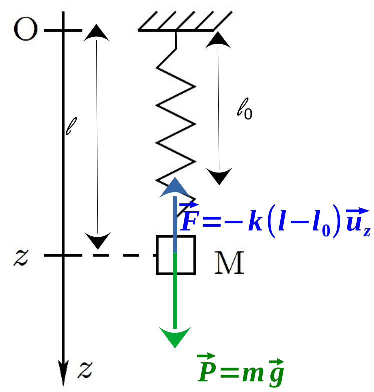
par identification $\omega_0=A$ A est donc une pulsation propre qui possède la dimension de l'inverse d'un temps $[A]=T^{-1}$ l'unité d'une pulsation est **rad.s^{-1}**

2 Exprimer en fonction de A puis calculer la fréquence et la période de cet oscillateur.

$$\omega_0=A=2\pi f_0\Rightarrow f_0=\frac{A}{2\pi} \qquad T_0=\frac{1}{f_0}\Rightarrow T_0=\frac{2\pi}{A}$$

Exercice 6 : Oscillations verticales

Un ressort de longueur à vide l_0 et de raideur k est fixé en O au plafond (voir figure). À son autre extrémité est attaché un mobile M de masse m, repéré par son abscisse z telle que la position du mobile soit : $\overrightarrow{OM}=z\vec{u}_z$. L'origine du repère est imposée comme sur la figure ci-contre.



Effectuer un bilan des forces sur la masse. On considère qu'il n'y a pas de frottements.

Le poids : $\vec{P}=mg\vec{u}_z$ la force de rappel : $\vec{F}=-k(l-l_0)\vec{u}_z=-k(z-l_0)\vec{u}_z$

Établir l'équation du mouvement de la masse.

D'après le principe fondamental de la dynamique appliqué au mobile dans le référentiel d'étude supposé galiléen :

$$m\vec{a}=\vec{P}+\vec{F}$$

$$\vec{a}=\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}=\frac{d^2z}{dt^2}\vec{u}_z \quad \text{donc} \quad m\ddot{z}\vec{u}_z=mg\vec{u}_z-k(z-l_0)\vec{u}_z$$

en projetant sur l'axe z : $m\ddot{z}=mg-k(z-l_0)\Rightarrow\ddot{z}(t)+\frac{k}{m}z(t)=g+\frac{kl_0}{m}$

Quelle est l'expression de la position d'équilibre z_{EQ} ?

à l'équilibre l'objet est immobile dans le référentiel d'étude, son accélération est donc nulle

ainsi on a $\frac{k}{m}z_{eq}=g+k\frac{l_0}{m}\Rightarrow \boldsymbol{z_{eq}=\frac{mg}{k}+l_0}$

On pose u(t) = z(t) − z_{EQ}. Trouver l'équation différentielle satisfaite par u(t).

on a aussi

z(t) = u(t) + z_{EQ} soit $z(t)=u(t)+\frac{mg}{k}+l_0$ comme z_{eq} ne dépend pas du temps on a $\dot{z}(t)=\dot{u}(t)$

1 en remplaçant dans l'équation différentielle du mouvement

$$\ddot{z}+\frac{k}{m}z=g+\frac{kl_0}{m} \Leftrightarrow \ddot{u}(t)+\frac{k}{m}(u(t)+\frac{mg}{k}+l_0)=g+\frac{kl_0}{m} \Leftrightarrow \ddot{u}(t)+\frac{k}{m}u(t)+g+\frac{kl_0}{m}=g+\frac{kl_0}{m} \Leftrightarrow \boldsymbol{\ddot{u}(t)+\frac{k}{m}u(t)=0}$$

Quelle est la période des oscillations ? Commenter.

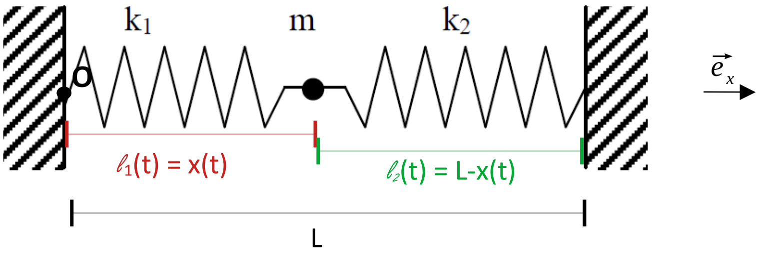
On reconnaît l'équation différentielle homogène associée à un oscillateur harmonique $\ddot{u}(t)+\omega_0^2u(t)=0$

par identification la pulsation propre est $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$

On retrouve la même pulsation propre (et donc aussi la même période des oscillations) que pour un oscillateur harmonique horizontale

Exercice 7 : Ressorts reliés horizontalement

Deux ressorts linéaires sont reliés à une masse m, leur autre extrémité restant fixée à un support vertical (voir schéma). Le premier ressort a une raideur k_1 = 3,0 $N.m^{-1}$ et une longueur à vide l_{10} = 10 cm ; le second a une raideur k_2 = 10 $N.m^{-1}$ et une longueur à vide l_{20} = 20 cm. Les 2 supports sont distants de L = 1 m. La masse m est susceptible d'osciller horizontalement (on ne tient pas compte du poids), sans frottement.



1 Rechercher la position d'équilibre de la masse. L'origine en O et le sens de $\vec{e}_x$ sont imposés comme ci-dessus.

Bilan des forces sur le mobile :
Force du ressort de raideur k_1 sur le mobile : $\vec{F}_1=-k_1(l_1(t)-l_{10})\vec{e}_x=-k_1(x(t)-l_{10})\vec{e}_x$
Force du ressort de raideur k_2 sur le mobile : $\vec{F}_2=k_2(l_2(t)-l_{20})\vec{e}_x$
(pas de – car pour ce ressort le vecteur directeur n'est pas orienté du point d'attache vers le mobile)
d'après la paramétrisation choisie $\vec{F}_2=k_2(L-x(t)-l_{20})\vec{e}_x$
si on néglige le poids et les frottements ce sont les seules forces à considérer
à l'équilibre on a x= x_{eq} qui ne varie pas, l'accélération est nulle, donc les forces se compensent → leur somme vectorielle est nulle :

$$\vec{F}_1+\vec{F}_2=\vec{0}\Rightarrow -k_1(x_{eq}-l_{10})\vec{e}_x+k_2(L-x_{eq}-l_{20})\vec{e}_x=\vec{0}$$

$k_1(x_{eq}-l_{10})\vec{e}_x=k_2(L-x_{eq}-l_{20})\vec{e}_x$ en projetant sur l'axe Ox : $k_1(x_{eq}-l_{10})=k_2(L-x_{eq}-l_{20})$

$$(k_1+k_2)x_{eq}=k_2(L-l_{20})+k_1 l_{10}\Rightarrow x_{eq}=\frac{k_2(L-l_{20})+k_1 l_{10}}{k_1+k_2}$$

2 Déterminer l'équation différentielle qui caractérise le mouvement de la masse.

D'après le principe fondamental de la dynamique appliqué au mobile dans le référentiel d'étude

$$m\vec{a}=\vec{F}_1+\vec{F}_2$$

$$\vec{a}=\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}=\frac{d^2x}{dt^2}\vec{e}_x \quad \text{donc} \quad m\ddot{x}\vec{e}_x=-k_1(x(t)-l_{10})\vec{e}_x+k_2(L-x(t)-l_{20})\vec{e}_x$$

en projetant sur l'axe Ox : $m\ddot{x}=-k_1(x(t)-l_{10})+k_2(L-x(t)-l_{20})$

$$m\ddot{x}+(k_1+k_2)x(t)=(k_1+k_2)x_{eq}$$

3 En déduire que ce dispositif est équivalent à un ressort unique dont on déterminera la raideur équivalente.

$\ddot{x}+\frac{(k_1+k_2)}{m}x(t)=\frac{(k_1+k_2)}{m}x_{eq}$ on retrouve l'équation différentielle associée à un oscillateur harmonique de pulsation $\omega_0=\sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}}$ pour un système masse ressort unique on a $\omega_0=\sqrt{\frac{k_{eq}}{m}}$

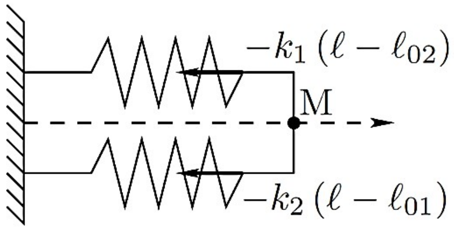
la constante de raideur équivalente est donc $\mathbf{k_{eq} = k_1 + k_2}$

4 Calculer la période d'oscillation de la masse m (on prendra m = 100 g)

$$\omega_0=\frac{2\pi}{T_0}\Rightarrow T_0=2\pi\sqrt{\frac{m}{k_1+k_2}} \quad \text{A.N} \quad T_0=2\pi\sqrt{\frac{100\cdot 10^{-3}}{3+10}}=0{,}55\,s$$

Exercice 8* : Association de ressorts en parallèle

On associe en parallèle (cf figure) deux ressorts élastiques, alignés, de raideurs k_1 et k_2, de longueur à vide ℓ_{01} et ℓ_{02}, formant un système élastique unique de longueur $\ell = \ell_1 = \ell_2$.



1 Déterminer la raideur k_{EQ} et la longueur à vide ℓ_{0EQ} du ressort élastique unique équivalent à cette association.

2 Ce ressort est-il plus souple ou plus raide que chacun des deux ressorts dont il est formé ?

Bilan des forces sur le mobile :

Force du ressort de raideur k_1 sur le mobile : $\vec{F}_1=-k_1(l(t)-l_{01})\vec{e}_x$

Force du ressort de raideur k_2 sur le mobile : $\vec{F}_2=-k_2(l(t)-l_{02})\vec{e}_x$

Le poids et la réaction du support se compensent

l'équilibre on a $\ell = \ell_{eq}$ qui ne varie pas, l'accélération est nulle, donc les forces se compensent → leur somme vectorielle est nulle :

$\vec{F}_1+\vec{F}_2=\vec{0}\Rightarrow -k_1(l_{0eq}-l_{01})\vec{e}_x-k_2(l_{0eq}-l_{02})\vec{e}_x=\vec{0}$ **en projetant sur l'axe Ox**

$$-k_1(l_{0eq}-l_{01})-k_2(l_{0eq}-l_{02})=0$$

$$(k_1+k_2)l_{0eq}=k_2 l_{02}+k_1 l_{01}\Rightarrow \boldsymbol{l_{0eq}=\frac{k_2 l_{02}+k_1 l_{01}}{k_1+k_2}}$$

Pour trouver la constante de raideur équivalente il faut considérer une force de rappel équivalente telle que $\vec{F}_{eq}=-k_{eq}(l-l_{0eq})\vec{e}_x$ **et** $\vec{F}_{eq}=\vec{F}_1+\vec{F}_2$

on a $\vec{F}_{eq}=\vec{F}_1+\vec{F}_2=-k_1(l-l_{01})\vec{e}_x-k_2(l-l_{02})\vec{e}_x=-(k_1+k_2)(l(t)-l_{0eq})\vec{e}_x$

Par identification on en déduit $k_{eq} = k_1 + k_2$

Exercice 9* : Mouvement d'un électron piégé dans un puits de potentiel

Un électron de masse m_E=9,11x10^{-31}kg et de charge q=-1,60x10^{-19}C est piégé à l'intérieur d'un dispositif tel que son énergie potentielle est :

$$E_p=\frac{1}{2}\frac{qV_0}{d^2}z^2 \text{ où } V_0 = -5{,}0\text{V et } d=6{,}0\text{mm.}$$

On considère que l'électron peut se déplacer uniquement sur l'axe (Oz).

1 Exprimer l'énergie mécanique de l'électron en fonction de z(t) et de $\frac{dz}{dt}$.

2 On suppose que l'énergie mécanique est constante dans le temps. Exprimer puis calculer la fréquence des oscillations des électrons dans le piège.

1.

$$E_m=E_c+E_p=\frac{1}{2}q\frac{V_0}{d^2}z^2+\frac{1}{2}m_E\left(\frac{dz}{dt}\right)^2$$

2.

on peut retrouver l'équation du mouvement en dérivant la relation de conservation de l'énergie mécanique :

$$\frac{d}{dt}E_m=0\Rightarrow\frac{1}{2}q\frac{V_0}{d^2}2\dot{z}(t)z(t)+\frac{1}{2}m_E 2\ddot{z}(t)\dot{z}(t)=0\Rightarrow\dot{z}(t)\left(q\frac{V_0}{d^2}z(t)+m_E\ddot{z}(t)\right)=0$$

$\ddot{z}(t)+\frac{qV_0}{m_E d^2}z(t)=0$ on reconnaît l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de pulsation propre

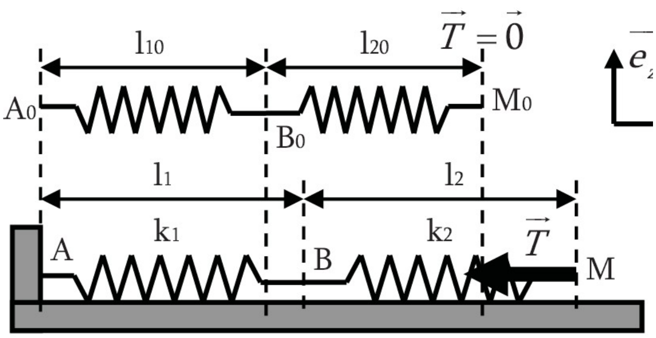
$\omega_0^2=\frac{qV_0}{m_E d^2} \Rightarrow \omega_0=\sqrt{\frac{qV_0}{m_E d^2}}$

on peut vérifier l'homogénéité : $[q\frac{V_0}{d}]=[force]=M\cdot L\cdot T^{-2}$ (norme de la force électrostatique dans un condensateur plan)

$[q\frac{V_0}{m_E d^2}]=\frac{[force]}{M\cdot L}=T^{-2}$ on retrouve bien la dimension d'une pulsation au carré , le résultat est homogène

A.N **f= 2,5 10^7 Hz**

Exercice 10* : Association de ressorts en série



On associe en série (cf figure) deux ressorts élastiques sans masse, alignés, de raideurs k_1 et k_2, de longueur à vide ℓ_{01} et ℓ_{02}, formant un système élastique unique de longueur totale $\ell = \ell_1 + \ell_2$.

1. Montrer que l'ensemble est équivalent à un ressort élastique unique de longueur à vide $\ell_{0EQ} = \ell_{01} + \ell_{02}$ dont on exprimera la constante de raideur k_{EQ} en fonction de k_1 et k_2.
2. Ce ressort est-il plus souple ou plus raide que chacun des deux ressorts dont il est formé ?

1. dans cet exercice la force de rappel équivalente est notée T

Bilan des forces sur le <u>ressort 2</u> :
Force du ressort de raideur k_1 sur le **ressort 2** : $\vec{T}_1=-k_1(l_1(t)-l_{01})\vec{e}_x$

Force du mobile sur le ressort de raideur k_2 : $-\vec{T}_2=+k_2(l_2(t)-l_{02})\vec{e}_x$ (principe d'action réaction)

poids du ressort (négligeable car masse négligeable) et réaction du support négligeable aussi
PFD appliqué au ressort 2 dans le réf d'étude supposé galiléen :
$m_{ressort2}\vec{a}_{res2}=\vec{T}_1+-\vec{T}_2$ **avec $m_{ressort\ 2}$ la masse du ressort 2 et a_{res2} l'accélération de son centre de masse**
comme la masse du ressort 2 est négligeable : on a $\vec{0}=\vec{T}_1+-\vec{T}_2 \Rightarrow \vec{T}_1=\vec{T}_2$

Bilan des forces sur le mobile :
Force du ressort de raideur k_2 sur le mobile : $\vec{T}_2=-k_2(l_2(t)-l_{02})\vec{e}_x$

Le poids et la réaction du support se compensent

PFD appliqué au mobile dans le référentiel d'étude supposé galiléen :

$$m\vec{a}=\vec{T}_2 = \vec{T}_1$$

- <u>**Méthode 1**</u>

Pour trouver la constante de raideur équivalente il faut considérer une force de rappel équivalente telle que $\vec{T}_{eq}=-k_{eq}(l(t)-l_{0eq})\vec{e}_x=(-k_{eq}l(t)+k_{eq}l_{0eq})\vec{e}_x$ **et** $\vec{T}_{eq}=\vec{T}_2=\vec{T}_1$ **avec $\ell(t)=\ell_1(t)+\ell_2(t)$ et $\ell_{0EQ}=\ell_{01}+\ell_{02}$**

on a donc $\vec{T}_{eq}=\vec{T}_2=-k_2(l_2(t)-l_{02})\vec{e}_x=(-k_2 l_2(t)+k_2 l_{02})\vec{e}_x$ **mais aussi**
$\vec{T}_{eq}=\vec{T}_1=-k_1(l_1(t)-l_{01})\vec{e}_x=(-k_1 l_1(t)+k_1 l_{01})\vec{e}_x$

Par identification de la constante indépendante du temps on en déduit

$k_{eq} l_{0eq} = k_1 l_{01}$ **et** $k_{eq} l_{0eq} = k_2 l_{02}$

$\boldsymbol{\ell_{0EQ} = \ell_{01} + \ell_{02}}$

$k_{eq}(l_{01}+l_{02}) = k_1 l_{01}$ **(L1) et** $k_{eq}(l_{01}+l_{02}) = k_2 l_{02}$ **(L2)**

en combinant les deux équations (L1) x k_1 + (L2)x k_2 :

$$(k_1 k_{eq} + k_2 k_{eq})(l_{01}+l_{02}) = k_1 k_2 l_{01} + k_2 k_1 l_{02} = k_1 k_2 (l_{01}+l_{02})$$

finalement $(k_1 k_{eq} + k_2 k_{eq}) = k_1 k_2 \Rightarrow \boldsymbol{k_{eq} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}}$

- **Méthode 2 :**

on veut $\vec{T}_{eq} = -k_{eq}(l(t) - l_{0eq})\vec{e}_x$ **avec** $\boldsymbol{\ell_{0EQ} = \ell_{01} + \ell_{02}}$ **et** $\boldsymbol{\ell(t) = \ell_1(t) + \ell_2(t)}$ **et** $\boldsymbol{\vec{T}_{eq} = \vec{T}_2 = \vec{T}_1}$

on sait que $\vec{T}_1 = -k_1(l_1(t) - l_{01})\vec{e}_x$ **et** $\vec{T}_2 = -k_2(l_2(t) - l_{02})\vec{e}_x$

On remarque que $\frac{\vec{T}_{eq}}{k_{eq}} = -(l(t) - l_{0eq})\vec{e}_x = -(l_1(t) + l_2(t) - (l_{01}+l_{02}))\vec{e}_x = -(l_1(t) - l_{01})\vec{e}_x - (l_2(t) - l_{02})\vec{e}_x$

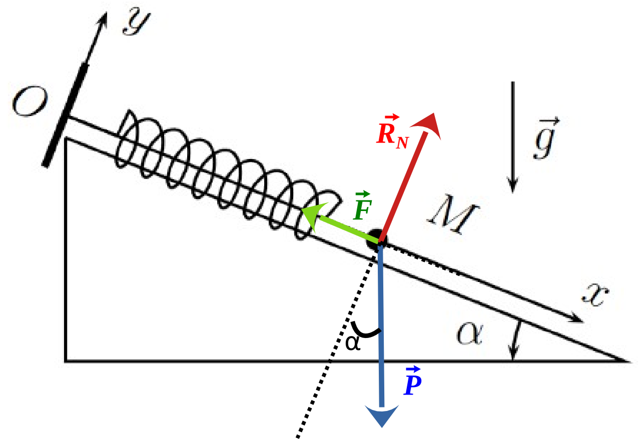
or $\frac{\vec{T}_1}{k_1} = \frac{\vec{T}_{eq}}{k_1} = -(l_1(t) - l_{01})\vec{e}_x$ **et** $\frac{\vec{T}_2}{k_2} = \frac{\vec{T}_{eq}}{k_2} = -(l_2(t) - l_{02})\vec{e}_x$

ainsi $\frac{\vec{T}_{eq}}{k_{eq}} = \frac{\vec{T}_{eq}}{k_1} + \frac{\vec{T}_{eq}}{k_2} \Rightarrow \frac{1}{k_{eq}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \Rightarrow \boldsymbol{k_{eq} = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}}$

Exercice 11* : Oscillateur incliné

Un ressort linéaire de longueur à vide l_0 et de raideur k est fixé en O (voir figure). À son autre extrémité est attaché un mobile M de masse m, repéré par son abscisse x telle que la position du mobile soit : $\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x$. Le ressort se trouve sur un plan incliné d'un angle α par rapport à l'horizontale. On considère que le ressort est de masse négligeable devant m. L'origine du repère est imposée en O comme sur la figure ci-contre. On considère qu'il n'y a pas de frottements.

1 Effectuer un bilan des forces sur le mobile M de masse m. On donnera en particulier les composantes de chaque force sur les axes (Ox) et (Oy).



Force de rappel du ressort :

$\vec{F} = -k(l(t) - l_0)\vec{e}_x = -k(x - l_0)\vec{e}_x$

Réaction du spport :

$\vec{R}_N = R_N \vec{e}_y$

Poids du mobile

$\vec{P} = m\vec{g}$

Projection du poids selon l'axe Ox :

$P_x = \vec{P}\cdot\vec{e}_x = m\vec{g}\cdot\vec{e}_x = m\,g\sin(\alpha)$

Projection du poids selon l'axe Oy :

$P_y = \vec{P}\cdot\vec{e}_y = m\vec{g}\cdot\vec{e}_y = -m\,g\cos(\alpha)$

La projection du poids sur l'axe Oy est dans le sens opposé au vecteur directeur $\vec{e}_y$

2 Établir l'expression de la position d'équilibre x_{EQ}. Vérifier son homogénéité et sa cohérence physique.

À l'équilibre les forces se compensent :

$\vec{F}_{eq}+\vec{R}_N+\vec{P}=\vec{0}$ avec $\boldsymbol{\vec{F}_{eq}=-k(x_{eq}-l_0)\vec{e}_x}$ en projetant sur l'axe Ox : $\boldsymbol{-k(x_{eq}-l_0)+mg\sin(\alpha)=0\Rightarrow x_{eq}=l_0+\frac{mg}{k}\sin(\alpha)}$

on sait que g est homogène à une accélération $[g]=L\cdot T^{-2}$

on sait que pour un ressort horizontal la pulsation propre est $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}\Rightarrow\left[\frac{m}{k}\right]=[\frac{1}{\omega_0^2}]=T^2$

de plus $[\sin\alpha]=\varnothing$ ainsi $[\frac{mg}{k}\sin\alpha]=L\cdot T^{-2}\cdot T^2=L$ l'équation est donc bien homogène

La réaction du support n'intervient pas car elle ne travaille pas lors du mouvement selon l'axe Ox

comme m, g, k et sin(α) sont des grandeurs positives on a x_{eq} **> l_0 ce qui es cohérent cohérent car la force de rappel doit être non nulle pour compenser la composante selon Ox du poids**

3 Établir l'équation du mouvement de la masse. La résoudre pour $x(0)=x_0\neq x_{EQ}$ et $v(0)=0$.

D'après le principe fondamental de la dynamique appliqué au centre de masse du mobile dans le référentiel d'étude

$m\vec{a}=\vec{F}+\vec{R}_N+\vec{P}$

comme le mouvement s'effectue selon l'axe Ox : $\vec{a}=\frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}=\frac{d^2x}{dt^2}\vec{e}_x$

Ainsi $m\ddot{x}\vec{e}_x=\vec{F}+\vec{R}_N+\vec{P}$

en projetant sur l'axe Ox : $m\ddot{x}(t)=-k(x(t)-l_0)+0+mg\sin(\alpha)$

$m\ddot{x}(t)+kx(t)=kl_0+mg\sin(\alpha)$ $\boldsymbol{m\ddot{x}(t)+kx(t)=kx_{eq}}$

On reconnaît l'équation différentielle associée à un oscillateur harmonique avec un second membre

Solution de l'équation différentielle associée à l'équation homogène

$x_H(t)=a\cos(\omega_0 t)+b\sin(\omega_0 t)$ solution particulière $x_p(t) = x_{eq}$

solution générale : $x(t)=a\cos(\omega_0 t)+b\sin(\omega_0 t)+x_{eq}$

à t= 0 $x(0) = x_0$

$a=x_0-x_{eq}$ et comme $v(0) =0$ on a b= 0

finalement $\boldsymbol{x(t)=(x_0-x_{eq})\cos(\omega_0 t)+x_{eq}}$

4 Comment aurait été modifiée l'équation différentielle si on avait choisi l'origine du repère en x_{EQ} ? Justifier.

l'équation différentielle vérifiée par la fonction x(t) est : $\boldsymbol{m\ddot{x}(t)+kx(t)=kx_{eq}}$

Déplacé l'origine en x_{eq} revient à effectuer le changement de variable $x_1(t) = x(t) - x_{EQ}$

en effet quand on avait $x(t) = x_{EQ}$ on a pour la nouvelle variable $x_1(t) = 0$

$\boldsymbol{\ddot{x}_1(t)=\ddot{x}(t)}$ ainsi $\boldsymbol{m\ddot{x}_1(t)+kx_1(t)=0}$

5 Quelle est la période des oscillations ? Commenter (homogénéité, cohérence physique) ?

On reconnaît une équation différentielle d'un oscillateur harmonique de pulsation propre

$$\omega_0^2=\frac{k}{m}\Rightarrow\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$T_0=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

La période est la même quelque soit α

$[T_0]=\left(\frac{M}{\frac{M\cdot L\cdot T^{-2}}{L}}\right)^{\frac{1}{2}}=(T^2)^{\frac{1}{2}}=T$ formule homogène