

# CHAP. 08 : BASES DE LA DYNAMIQUE NEWTONIENNE

## Objectifs :

- Établir l'expression de la quantité de mouvement d'un système restreint au cas de deux points sous la forme  $\vec{p} = m\vec{v}(G)$ . (Lien avec la vitesse du centre de masse d'un système fermé.)
- Décrire le mouvement relatif de deux référentiels galiléens.
- Citer une situation où la description classique de l'espace ou du temps est prise en défaut (ne fonctionne pas)
- Établir un bilan des forces sur un système ou sur plusieurs systèmes en interaction et en rendre compte sur un schéma
- Déterminer les équations du mouvement d'un point matériel ou du centre d'inertie d'un système fermé.
- Mettre en équation le mouvement sans frottement et le caractériser comme un mouvement à  $\vec{a}$  constant.
- Etablir l'équation du mouvement du pendule simple. Justifier l'analogie avec l'oscillateur harmonique dans le cadre de l'approximation linéaire.
- Exploiter, sans la résoudre analytiquement, une équation différentielle du mouvement prenant en compte l'influence de la résistance de l'air sur un mouvement de chute. : analyse en ordres de grandeur, détermination de la vitesse limite, utilisation des résultats obtenus par simulation numérique. Écrire une équation adimensionnée
- Exploiter les lois de Coulomb fournies dans les trois situations : équilibre, mise en mouvement, freinage. Formuler une hypothèse (quant au glissement ou non) et la valider.
- *Proposer un protocole expérimental de mesure de frottements fluides.*
- *Proposer un protocole expérimental permettant d'étudier une loi de force.*
- *Mettre en œuvre un microcontrôleur lors d'un test de traction.*

**Rapport de jury central 2023 :** Le jury rappelle qu'il est indispensable de définir le système d'étude pour toute application d'un principe, en thermodynamique aussi bien qu'en mécanique.

**Rapport de jury centrale 2019 PC.** L'équation vérifiée par  $v(t)$  étant obtenue par application d'un principe fondamental de la dynamique, il est indispensable d'expliciter le système et le considérer ponctuel, de définir le référentiel et le considérer galiléen et d'effectuer un bilan des forces.

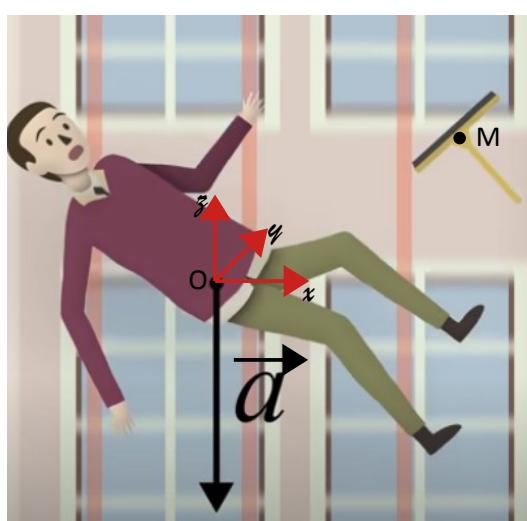
**Jury 2023 :** il y a des lacunes certaines en mécanique du point : par exemple, la détermination d'une trajectoire d'un objet ponctuel seulement soumis à son poids n'est réussie que par 10% des candidats ayant eu à le faire ! ;

## I Principes fondamentaux

### I.1 Référentiel galiléen

Un référentiel est dit galiléen si les lois de Newton sont vérifiées dans ce référentiel

Exemple de référentiel non-galiléen



J'étudie Le mouvement du lave vitre dans le référentiel de centre O lié à la personne en chute libre :

Dans ce référentiel l'objet étudié M semble **immobile** (si on néglige les frottements)

Si le premier principe s'applique, les forces qui s'exercent sur le lave vitre **doivent se compenser**. Or ce n'est pas le cas ! **La seule force qui s'applique est le poids de l'objet.**

Conclusion : le premier principe ne s'applique pas, le référentiel d'étude est donc non galiléen.

Remarques :

**Aucun référentiel n'est rigoureusement galiléen.** En revanche on peut considérer que certains référentiel sont galiléen sur **une échelle de temps caractéristique :**

- le **ref Terrestre** peut être supposé galiléen pour des expériences dont la durée  $\tau$  est faible devant **24 h**
- le **référentiel géocentrique** pour  $\tau_g << 1$  an
- le **référentiel héliocentrique** pour  $\tau_g << 230$  Ma
- le **ref de Copernic** est le meilleur ref gal identifié

## I.2 Les 3 « lois » de Newton

### a 1<sup>ère</sup> loi : principe d'inertie

Tout corps soumis à une force résultante nulle est **immobile** ou en mouvement **rectiligne uniforme**

#### Conséquence du principe d'inertie

Soit  $\mathcal{R}_1$  un référentiel galiléen et  $\mathcal{R}_2$  un référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport à  $\mathcal{R}_1$ . Si un corps est en mouvement rectiligne uniforme par rapport à  $\mathcal{R}_1$ , alors il l'est aussi par rapport à  $\mathcal{R}_2$  :

$\mathcal{R}_2$  est donc aussi galiléen.

#### Conséquence :

les référentiels galiléens sont en **translation rectiligne uniforme** les uns par rapport aux autres.

#### Exemple : référentiel associé à un ascenseur en translation à vitesse constante

### b 2<sup>ème</sup> loi : principe fondamental de la dynamique

On définit la quantité de mouvement d'un point M de masse m et de vitesse v dans un référentiel  $\mathcal{R}$  comme :

Remarques :  $\vec{p}$  dépend du référentiel choisi.  
m est la **masse inertielle**  $\vec{p}=m\vec{v}$

**Quantité de mouvement de deux points  $M_1$  et  $M_2$  de vitesse  $\vec{v}_1$  et  $\vec{v}_2$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$ .**

la quantité de mouvement de l'ensemble  $\{M_1$  et  $M_2\}$  est la somme des quantités de mouvement des deux points :

$$\vec{p}_{tot}=\vec{p}_1+\vec{p}_2=m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2$$

Or par définition du centre de gravité G d'un ensemble de 2 points :  $\vec{OG}(m_1+m_2)=m_1\vec{OM}_1+m_2\vec{OM}_2$

En dérivant par rapport au temps :  $\frac{d\vec{OG}}{dt}(m_1+m_2)=m_1\frac{d\vec{OM}_1}{dt}+m_2\frac{d\vec{OM}_2}{dt} \Leftrightarrow (m_1+m_2)\vec{v}_G=m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2$

comme  $\vec{p}_{tot}=m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2$  on en déduit :  $\vec{p}_{tot}=m_{tot}\vec{v}_G$

Remarque :

l'ensemble des deux points se comporte, d'un point de vu dynamique, comme un objet ponctuel placé en G de masse  $m_{tot}=m_1+m_2$  et de vitesse  $\vec{v}_G=\frac{m_1\vec{v}_1+m_2\vec{v}_2}{m_1+m_2}$

animation altère

#### Principe fondamental de la dynamique :

La variation de quantité de mouvement d'un système est égale à la somme des forces extérieures s'exerçant sur le système :

$$\frac{d\vec{p}}{dt}=\sum \vec{F}_{ext}$$

Remarque : si  $m=cste$ , alors le principe fondamental de la dynamique se traduit par  $m \frac{d\vec{v}}{dt} = \sum \vec{F}_{ext}$   
(mais pas dans le cas de l'étude d'une **fusée** par exemple).

### c 3<sup>ème</sup> loi : principe des actions réciproques

Si A exerce une force sur B, alors B exerce une force sur A de norme égale, de sens opposé et de même direction :

$$\vec{F}_{A \rightarrow B} = -\vec{F}_{B \rightarrow A}$$

## I.3 Limites

«principe» = postulat non démontré et considéré comme valable jusqu'à ce qu'il ait été contredit par l'expérience

- En mécanique classique, le temps est **absolu**. On considérera que cela est vrai si  $\|\vec{v}\| < < c$  (dans le réf d'étude)
  - Sinon, on utilisera la théorie **de la relativité restreinte**, ou celle de **la relativité générale (Très largement hors programme)** .
- Exemple le caractère absolu du temps est prise en défaut : les corrections relativistes sont utiles pour régler l'horloge des satellites de positionnement GPS afin qu'ils réalisent des mesures précises (à  $10^{-9}$  s près) d'intervalles de temps (et donc de distances)
- En mécanique classique, l'énergie et la matière sont **continues**. On considérera que cela est vrai si la taille caractéristique du système est grande devant le nanomètre .
- Sinon, on utilisera la théorie de **la mécanique quantique** .

## II Applications

### II.1 Mouvement dans le champ de pesanteur uniforme

#### a) Cas sans frottements

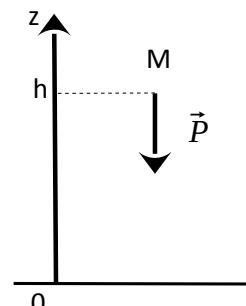
système : { masse  $m$  } ref : TSG Bilan des forces :  $\vec{P} = m\vec{g}$

On lache sans vitesse initiale une masse  $m$ , d'une hauteur  $h$

PFD  $m\vec{a} = m\vec{g} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g}$

comme  $\vec{v}_0 = \vec{0}$  le mvt est rectiligne et  $\vec{v} = -gt\vec{e}_z$   $z(t) = \frac{-1}{2}gt^2 + h$

si axe vers le bas  $z(t) = \frac{+1}{2}gt^2 - h$



durée de la chute : fin de chute à T tel que  $z(T) = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2}gt^2 + h = 0 \Rightarrow T = \sqrt{\frac{2h}{g}}$  dim :  $\left(\frac{L}{LT^{-2}}\right)^{\frac{1}{2}} = T$

vitesse juste avant l'impacte :  $\vec{v}_{impact} = gT = \sqrt{2gh}$

Limite u modèle : si  $h \rightarrow \infty, v_{impact} \rightarrow \infty$  on s'attend plutôt à une vitesse limite

#### b) Cas avec frottements de la forme $\vec{F} = -\alpha \vec{v}$ ( $\alpha$ n'est pas une constante de raideur)

Bilan des forces  $\vec{P} = m\vec{g}$  et  $\vec{F} = -\alpha \vec{v}$

alors  $m \frac{d\vec{v}}{dt} = m\vec{g} - \alpha \vec{v} \Rightarrow \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{\alpha}{m} \vec{v} = \vec{g}$

On projette sur l'axe (Oz) :  $\frac{-dv}{dt} - \alpha v = -g \Rightarrow \frac{dv}{dt} + k v = g$  (  $\vec{v} = -\|\vec{v}\| \vec{e}_z = -v \vec{e}_z$  à cause du choix du sens de l'axe)

les sol sont alors de la forme :  $v(t) = A \exp(-\frac{\alpha}{m}t) + \text{sol particulière}$

on identifie le temps caractéristique de variation de la vitesse  $\tau = \frac{m}{\alpha}$

Ici,  $\frac{\alpha}{m} v_p = g \Rightarrow v_p = \frac{mg}{\alpha}$  donc  $v(t) = A \exp(-\frac{\alpha}{m}t) + \frac{mg}{\alpha}$ . Et comme  $v(0) = 0$   $v(0) = A \exp(0) + \frac{mg}{\alpha}$

donc  $A = -\frac{mg}{\alpha}$  finalement  $v(t) = \frac{mg}{\alpha} \left(1 - \exp\left(-\frac{\alpha}{m}t\right)\right)$

Rmq :  $\tau = \frac{m}{\alpha}$  est le temps caractéristique du régime transitoire de chute pour  $t > 5\tau$  la vitesse ne varie plus et vaut  $v_{\text{lim}} = m \frac{g}{\alpha}$

voc à retenir :  $v_{\text{lim}} = m \frac{g}{\alpha}$  est la vitesse constante atteinte en régime permanent. **On l'appelle vitesse limite**

**Physiquement** : les deux forces s'opposent en sens. La force de frottement augmente en norme jusqu'à compenser parfaitement le poids à l'instant (approximatif)  $t = 5\tau = 5 \frac{m}{\alpha}$ . à partir de ce moment le système devient pseudo-isolé → donc le mouvement devient **rectiligne uniforme**

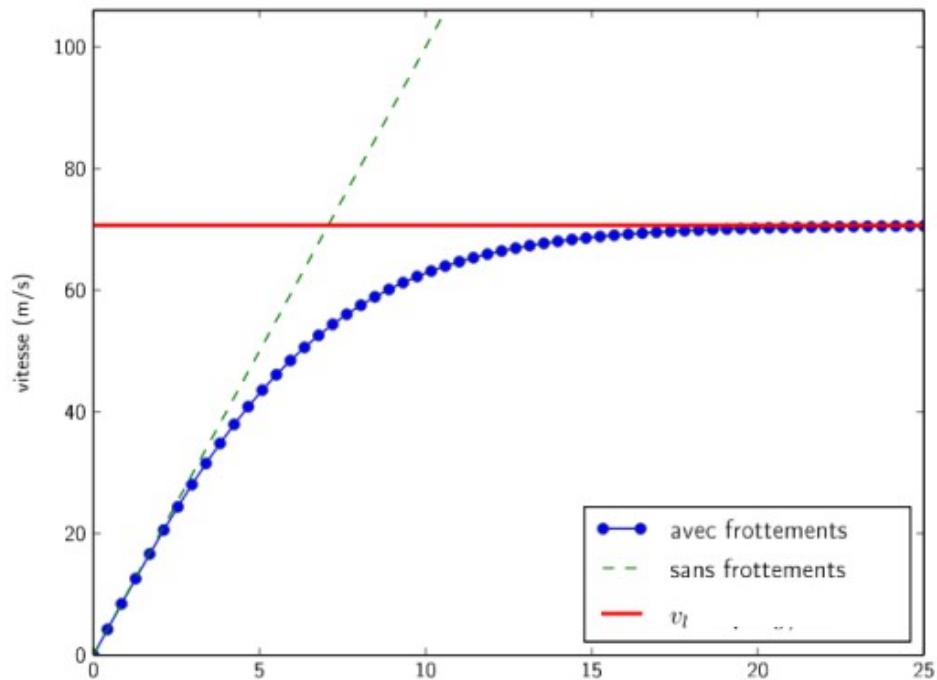
**c) Cas avec frottements de la forme  $\vec{F} = -\lambda v \vec{v}$**

Bilan des forces :  $\vec{P} = m \vec{g}$  et  $\vec{F} = -\lambda v \vec{v}$  où  $v = \|\vec{v}\|$  qu'on peut aussi écrire  $\vec{F} = -\lambda v^2 \vec{u}$  avec  $\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$  un vecteur unitaire dirigé dans le même sens et la même direction que le vecteur vitesse

Alors le PFD donne  $m \frac{d\vec{v}}{dt} = m \vec{g} - \lambda v \vec{v}$  on projette sur (Oz) tjr dirigé vers le haut :  $m \frac{d-v}{dt} = -mg - \lambda v v_z$   $v_z$  étant la projection sur l'axe (Oz) du vecteur  $\vec{v}$  qui est une grandeur algébrique et comme l'objet va systématiquement vers le bas si on le lâche sans vitesse initiale, on a toujours  $v_z = -v$

donc  $-m \frac{dv}{dt} = -mg - \lambda v(-v) \Rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{\lambda}{m} v^2 = g$

C'est une équation différentielle non linéaire qui peut facilement se résoudre numériquement **voir TP info kilomètre lancé**



**Solution**  $v(t) = v_{\text{lim}} \text{th} \left( \sqrt{\frac{\lambda g}{m}} t \right)$  avec  $v_{\text{lim}} = \sqrt{\frac{mg}{\lambda}}$  (démonstration hors programme)

**d) méthode pour trouver la vitesse limite**

on part de l'équation du mvt sur (Oz) :  $\frac{dv}{dt} + \frac{\alpha}{m} v = g$  ou  $\frac{dv}{dt} + \frac{\lambda}{m} v^2 = g$  selon le type de force de frottement

On s'intéresse au régime permanent au cours duquel la vitesse limite est atteinte donc :  $v = v_{\lim}$

Par définition du régime permanent, la vitesse ne varie plus au cours du temps dans ce régime donc  $\frac{dv_{\lim}}{dt} = 0$

ainsi en régime permanent on a :

Si force de frottement de la forme  $\vec{F} = -\alpha \vec{v}$

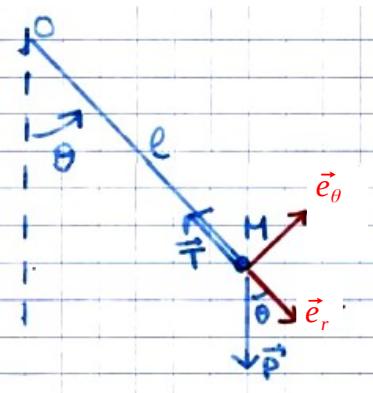
Si force de frottement de la forme  $\vec{F} = -\lambda v \vec{v}$ :

$$0 + \frac{\alpha}{m} v_{\lim} = g \Rightarrow v_{\lim} = \frac{mg}{\alpha}$$

$$0 + \frac{\lambda}{m} v_{\lim}^2 = g \Rightarrow v_{\lim} = \sqrt{\frac{gm}{\lambda}}$$

**Quand choisir une forme plutôt que l'autre ?**

En première année ce sera toujours rappelé, en deuxième année on pourra utiliser le nombre de Reynolds qui augmente globalement plus l'écoulement est turbulent autour de l'objet

**II.2 Mouvement d'un pendule simple****a Équation du mouvement**

système {masse M} hyp : on néglige la masse du fil

on se place en coordonnées polaires car elles sont plus adaptées à la géométrie du système BDF :

$\vec{P} = m\vec{g}$  et  $\vec{T} = -T\vec{e}_r$  la Tension du fil

On écarte le pendule de  $\theta_0$  et on lâche sans vitesse initiale :

objectif : Exprimer  $\theta(t)$

$$\text{PFD : } m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P} + \vec{T}$$

$$\text{en coordonnées polaires : } \vec{v} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\vec{OM}}{dt} = \frac{d}{dt}(\ell\vec{e}_r) = \dot{\ell}\vec{e}_r + \ell\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

$$\text{or comme } \ell(t) = \text{cste} \text{ alors } \dot{\ell} = \frac{d\ell}{dt} = 0 \text{ on a donc } \vec{v} = \ell\dot{\theta}\vec{e}_\theta$$

( la notation avec les points au dessus des grandeurs pour désigner une dérivée temporelle est dû à Newton, on utilise cette notation seulement en mécanique, vous pouvez utiliser la notation avec des  $d/dt$  pour plus de clarté )

$$\vec{v} = \ell\dot{\theta}\vec{e}_\theta \text{ et } \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(\ell\dot{\theta}\vec{e}_\theta) = \ell\ddot{\theta}\vec{e}_\theta + \ell\dot{\theta}\frac{d}{dt}(\vec{e}_\theta) \text{ et } \frac{d}{dt}(\vec{e}_\theta) = -\dot{\theta}\vec{e}_r$$

$$\text{donc } \vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \ell\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - \ell\dot{\theta}^2\vec{e}_r$$

Exprimons le poids dans la base polaire  $\vec{P} = mg \cos(\theta)\vec{e}_r - mg \sin(\theta)\vec{e}_\theta$

$$\text{Le PFD s'écrit : } m(\ell\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - \ell\dot{\theta}^2\vec{e}_r) = mg \cos(\theta)\vec{e}_r - mg \sin(\theta)\vec{e}_\theta - T\vec{e}_r$$

Ainsi le PFD en projection sur  $\vec{e}_\theta$  donne :  $m\ell\ddot{\theta}\vec{e}_\theta = -mg \sin(\theta) \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{\ell} \sin(\theta)$  à savoir retrouver

### b Approximation des petits angles,analogie avec l'oscillateur harmonique

L'équation différentielle n'est pas une équation linéaire à cause de la fonction sin, on ne sait pas la résoudre à la main..

Par contre un élève de prépa sait résoudre une équation diff linéaire !

Pour avoir une équation différentielle linéaire il faudrait avoir  $\theta(t)$  à la place de  $\sin(\theta(t))$ .

Rappel d'optique géométrique :

si  $\theta < < 1$  rad ( ou  $28^\circ$  ) on peut faire l'approx ( dite des petits angles ) :  $\sin(\theta) \approx \theta$

l'équation différentielle du mouvement devient alors dans l'approx des petits angles ;

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{\ell}\theta \quad \text{qu'on peut mettre sous la forme} \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{\ell}\theta = 0$$

On reconnaît l'équation d'un oscillateur harmonique dont la forme canonique

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega_0^2\theta = 0$$

on identifie donc la pulsation propre :  $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$

### c Résolution de l'équation du mouvement et période des oscillations

les solutions sont de la forme  $\theta(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$

conditions initiales :  $\theta(t=0) = \theta_0 \Leftrightarrow A \times 1 + B \times 0 = \theta_0 \Rightarrow A = \theta_0$

souvent pas de vitesse initiale :  $\frac{d\theta}{dt}(t=0) = 0$  avec  $\frac{d\theta}{dt}(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t)$

$-A\omega_0 \times 0 + B\omega_0 \times 1 = 0 \Rightarrow B = 0$  finalement :  $\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t)$

Inserer représentation graphique :

Période des oscillations : ( c'est la période propre ) telle que  $\omega_0 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{2\pi}{T_0}$

$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{\ell}{g}}$  on peut s'en servir pour mesurer g !

$$g = \frac{4\pi^2 \ell}{T_0^2}$$

#### Rmq :

- la période des oscillations ne dépend pas de la masse accrochée

cpdt si la masse est trop faible, on ne peut plus négliger la masse de la corde devant celle du système

-si la masse n'est pas assez dense, on ne peut plus négliger les frottements.

**La période des oscillations ne dépend pas de l'angle initiale ce qui peut sembler contre intuitif !**

Ce n'est plus vrai si l'angle initiale  $\theta_0 << 25^\circ$  (on n'est plus dans l'approximation des petits angles).

### Histoire des sciences : Utilisation scientifique du pendule pour mesurer la masse des montagnes

Pierre Bouguer

En 1736, il part en expédition au Pérou avec Charles-Marie de La Condamine afin de mesurer un arc du méridien au niveau de l'équateur. À son retour en 1743, grâce aux résultats obtenus, il donne une meilleure description de la forme de la Terre. Ce travail est publié en 1749 sous le titre *La Figure de la Terre*. Pierre Bouguer mesure aussi à l'aide d'un pendule la gravité à différentes altitudes et est le premier à essayer de quantifier la poussée horizontale des montagnes sous l'effet de la gravitation. Il observe une différence entre la force de gravité mesurée sur un haut plateau et celle calculée en fonction de l'altitude de celui-ci : l'attraction gravitationnelle des reliefs semble plus faible comme s'il y avait un manque de matière, comme si les montagnes étaient creuses. Cette différence sera expliquée en 1889 par Clarence E. Dutton qui imagine une racine aux montagnes, plus légère que les roches environnantes (cf. ISOSTASIE).

uper article

<https://planet-terre.ens-lyon.fr/ressource/pendule-pesanteur-altitude.xml>

Quel que soit le lieu où Bouguer effectue sa mesure, il utilise un pendule qui a toujours exactement la même longueur (36 pouces 7,019 lignes), calibrée grâce à une règle en fer mesurée très précisément une fois pour toute. Puis il compare les oscillations du pendule à celles d'une horloge qu'il règle sur le ciel par des observations journalières. Il ne juge donc pas des variations de la pesanteur par la différence dans la longueur du pendule mais par le nombre d'oscillations effectuées en 24 heures. La méthode revient au même, comme nous allons le voir, mais il est beaucoup plus aisé de compter un nombre d'oscillations que d'avoir à déceler une variation de longueur de quelques centièmes de lignes (dixièmes de millimètres) !

Au cours de son séjour au Pérou, Bouguer a effectué une série de mesures pendulaires, à trois altitudes différentes : au niveau de la mer, à Quito et à Pichincha (tableau ci-dessus). Si la gravité suit la loi de Newton en  $1/r^2$ , la variation relative de la pesanteur (la variation de la force centrifuge avec l'altitude étant négligeable) est en « *raison doublée des distances* », soit  $\Delta g/g = -2h/R$  (où  $h$  est l'altitude et  $R$  le rayon de la Terre). En effet, si  $g$  est la pesanteur au niveau de la mer et  $g'$  la pesanteur à l'altitude  $h$ , la variation de pesanteur s'écrit (nous négligeons ici l'effet de la rotation journalière)

$$\bullet \Delta g = g' - g = \frac{GM}{(R+h)^2} - \frac{GM}{R^2} = g \cdot \left( \frac{1}{\left(1 + \frac{h}{R}\right)^2} - 1 \right) \approx \frac{-2hg}{R}$$

Bouguer remarque

que la diminution de la pesanteur déduite des mesures pendulaires réalisées à Quito et à Pichincha est bien réelle, importante, mais qu'elle ne suit pas exactement ce rapport, ce qui pose de sérieuses questions : « *Mais pourquoi nos expériences nous donnent-elles donc constamment un rapport qui n'est pas tout à fait conforme ? Faut-il attribuer à quelque erreur de notre part cette différence ; ou serait-il vrai que dans le voisinage des grosses masses comme la Terre, la loi dont il s'agit ne fut observée que d'une manière imparfaite*

Bouguer se sert de ce résultat pour montrer que la diminution de la pesanteur avec l'altitude dépend de certaines circonstances. Si, par exemple, la densité de la montagne était les  $4/3$  de la densité moyenne de la Terre, la pesanteur à Quito serait égale à celle qu'on éprouvait au niveau de la mer. Si la densité de la montagne était encore plus forte, la pesanteur pourrait même augmenter avec l'altitude !

Lieu	Altitude $h$	Longueur du pendule $l$ (en pouces et lignes)	Longueur du pendule $l$ (en lignes)	$\Delta g/g$ (mesure)	$g$ (m.s $^{-2}$ )	$\Delta g/g$ (calcul = $-2h/R$ )
Mer	0	36 pou 7,21 lig	439,21	0	9,779	
Quito	1466 toises (2857 m)	36 pou 6,88 lig	438,88	-1/1331	9,772	-1/1116
Pichincha	2434 toises (4744 m)	36 pou 6,69 lig	438,69	-1/844,6	9,768	-1/672

## II.3 Mouvement d'un solide en translation avec frottements

### a Lois de Coulomb



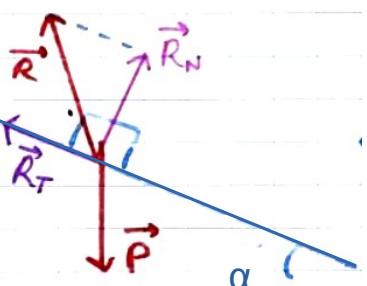
Voc : l'étude des frottements s'appelle la tribologie Charles Augustin Coulomb au début 18 ème établit des lois phénoménologique ( basés sur des résultats expérimentaux sans chercher de théorie sous-jacente plus profondes) l'objectif est de rendre compte des frottement entre deux solides.

### Expérience historique :

Tant que l'angle  $\alpha$  de la pente est inférieur à une valeur limite, l'objet de bouge pas on dit qu'il y a absence de glissement. Dès que l'angle dépasse l'angle  $\alpha_{\min}$ , l'objet se met en mouvement : il y a glissement

### b Mise en équation

BDF : - Poids de l'objet  $\vec{P}$



- Réaction du support  $\vec{R}$  qu'on peut décomposer en deux composantes :  $\vec{R} = \vec{R}_N + \vec{R}_T$   
 où  $\vec{R}_N$  est la réaction normale du support qui existe même en l'absence de frottement  
 $\vec{R}_T$  est la réaction tangentielle qui modélise le frottement du support sur l'objet étudié

Rmq : si on néglige les frottements,  $\vec{R}_T = \vec{0} \Rightarrow \vec{R} = \vec{R}_N$

### Lois de Coulomb

Avec ces expériences Coulomb établit les lois phénoménologiques suivantes :

- En l'absence de glissement ( tant que  $\alpha < \alpha_{\lim}$  ) :  $\|\vec{R}_T\| \leq f_s \|\vec{R}_N\|$  avec  $f_s$  le coefficient d'adhérence (ou statique)
- Dès que le glissement commence (  $\alpha > \alpha_{\lim}$  ) :  $\|\vec{R}_T\| = f_d \|\vec{R}_N\|$  où  $f_d$  est le coefficient dynamique ou de glissement

Physiquement : à mesure que l'angle augmente, la projection du poids sur l'axe X augmente, pour permettre l'équilibre ( pas de glissement ) la norme de  $R_T$  doit aussi augmenter pour compenser la projection du poids, si  $R_T$  dépasse un certains seuil, il n'y a plus équilibre.

À partir du moment où l'objet glisse, la composante tangentielle de la réaction du support prend une valeur constante  
 Valeurs typiques :

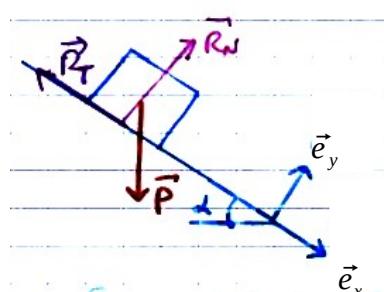
acier/acier  $f_s = 0,3$  et  $f_d = 0,1$

acier/glace  $f_s = 0,05$  et  $f_d = 0,02$

On général  $f_s = f_d$  mais parfois  $f_d < f_s$

### c Exemple

vidéo



À partir de quel angle  $\alpha$  le solide commence-t-il à glisser ?

Système : {solide de masse m}

Ref: TSG BDF :  $\vec{P}$  et  $\vec{R} = \vec{R}_N + \vec{R}_T$  ( on fait apparaître les deux composantes)

détail des composantes :  $\vec{R}_N = R_N \vec{e}_y$      $\vec{R}_T = -R_T \vec{e}_x$  avec  $R_T > 0$

$$\vec{P} = mg (\sin(\alpha) \vec{e}_x - \cos(\alpha) \vec{e}_y)$$

**Détermination de  $\alpha_{\min}$** 

le système est à l'équilibre donc  $\vec{R}_N + \vec{R}_T + \vec{P} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} -R_T + mg \sin(\alpha) = 0 \\ R_N - mg \cos(\alpha) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} R_T = mg \sin(\alpha) \\ R_N = mg \cos(\alpha) \end{cases}$  donc dans ce cas

$\frac{R_T}{R_N} = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \tan(\alpha)$  D'après la loi de Coulomb, quand il n'y a pas de glissement  $\|\vec{R}_T\| \leq f_s \|\vec{R}_N\| \Leftrightarrow \frac{\|\vec{R}_T\|}{\|\vec{R}_N\|} \leq f_s$

donc tant qu'il n'y a pas de glissement :  $\tan \alpha \leq f_s \Rightarrow \alpha \leq \arctan(f_s)$

ainsi à la limite du glissement  $\alpha = \alpha_{\lim} = \arctan(f_s)$  Rmq : angle indépendant de m A.N pour acier/acier :  $16,7^\circ$

**Détermination de l'équation du mouvement en phase de glissement ( $\alpha > \alpha_{\lim}$ )**

le PFD appliquée au système s'écrit :  $\vec{R}_N + \vec{R}_T + \vec{P} = m \vec{a} \Rightarrow \begin{cases} -R_T + mg \sin(\alpha) = m \ddot{x} \\ R_N - mg \cos(\alpha) = m \ddot{y} \end{cases}$

comme il n'y a pas de déplacement selon (Oy) :  $R_N - mg \cos(\alpha) = 0 \Rightarrow R_N = mg \cos(\alpha)$

et comme d'après la loi de coulomb (dynamique) :  $R_T = f_d R_N$  alors  $R_T = f_d m g \cos \alpha$

Donc l'équation du mouvement selon (Ox) s'écrit :  $m \ddot{x} = -f_d m g \cos \alpha + mg \sin(\alpha)$  soit

$$\ddot{x} = g(\sin(\alpha) - f_d \cos(\alpha))$$

Rmq :  $f_d < f_s$  or  $f_s = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$  donc  $\sin \alpha - f_d \cos \alpha > 0$  si  $\alpha > \arctan(f_d)$  ce qui est le cas si  $\alpha > \alpha_{\min} = \arctan(f_s)$

Comme  $g(\sin(\alpha) - f_d \cos(\alpha))$  est indépendant du temps et de x : **le mouvement est rectiligne et uniformément accéléré**

l'accélération est d'autant plus proche de  $-g f_d$  que l'angle  $\alpha$  se rapproche de  $\pi/2$  (logique)

Cas d'un freinage : voir exercice 9 TD 08 sur freinage d'urgence

Le mouvement de collé glissé, comme l'harmonica de verre de benjamin Franklin ou *glassharmonica*. C'est une forme mécanisée du verillon, composée de coupes en verre – d'abord 24, puis jusqu'à 40

les séismes