CHAP. 08 : BASES DE LA DYNAMIQUE NEWTONIENNE

Objectifs ♥

1 Établir l'expression de la quantité de mouvement d'un système restreint au cas de deux points sous la forme $\vec{p} = m\,\vec{v}(G)$ (lien avec la vitesse du centre de masse d'un système fermé).

2 Décrire le mouvement relatif de deux référentiels galiléens.

3 Citer une situation où la description classique de l'espace ou du temps est prise en défaut.

4 Établir un bilan des forces sur un système ou sur plusieurs systèmes en interaction et en rendre compte sur un schéma.

5 Déterminer les équations du mouvement d'un point matériel ou du centre de masse d'un système fermé.

6 Mettre en équation le mouvement sans frottement et le caractériser comme un mouvement à $\vec{a}$ constant.

7 Établir l'équation du mouvement du pendule simple. Justifier l'analogie avec l'oscillateur harmonique dans le cadre de l'approximation linéaire.

8 Exploiter, sans la résoudre analytiquement, une équation différentielle du mouvement prenant en compte la résistance de l'air sur une chute : analyse en ordres de grandeur, vitesse limite, simulation numérique. Écrire une équation adimensionnée.

9 Exploiter les lois de Coulomb dans les trois situations : équilibre, mise en mouvement, freinage. Formuler une hypothèse (glissement ou non) et la valider.

10 *Proposer un protocole expérimental de mesure de frottements fluides, puis permettant d'étudier une loi de force.*

11 *Mettre en œuvre un microcontrôleur lors d'un test de traction.*

Ce qu'en disent les rapports de jury

Centrale 2023 : il est indispensable de **définir le système** d'étude pour toute application d'un principe, en thermodynamique aussi bien qu'en mécanique.
Centrale 2019 (PC) : l'équation vérifiée par $v(t)$ étant obtenue par application d'un principe fondamental de la dynamique, il est indispensable d'**expliciter le système** et de le considérer ponctuel, de **définir le référentiel** et de le considérer galiléen, et d'effectuer un **bilan des forces**.
2023 : la détermination de la trajectoire d'un objet ponctuel seulement soumis à son poids n'est réussie que par **10 % des candidats** ayant eu à le faire !

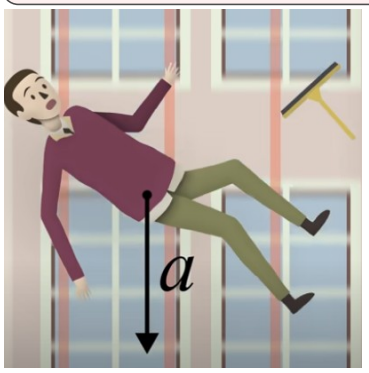
I Principes fondamentaux

1.1 Référentiel galiléen

Définition

Un référentiel est dit galiléen si les lois de Newton y sont vérifiées (en particulier le principe d'inertie, voir I.2).

Exemple de référentiel non galiléen



Un laveur de vitres tombe en même temps que son lave-vitre. On étudie le mouvement du lave-vitre M dans le référentiel lié à la personne en chute libre (origine O sur la personne).
Dans ce référentiel, le lave-vitre semble **immobile** (on néglige les frottements de l'air).
Si le principe d'inertie s'appliquait, les forces exercées sur le lave-vitre **devraient se compenser**. Or ce n'est pas le cas : **la seule force qui s'exerce sur lui est son poids !**
Conclusion : le principe d'inertie n'est pas vérifié, le référentiel d'étude n'est donc pas galiléen.

Remarques

Aucun référentiel n'est rigoureusement galiléen. En revanche, on peut considérer que certains référentiels sont galiléens à l'échelle d'une **durée caractéristique** τ de l'expérience :

- le référentiel **terrestre** peut être supposé galiléen si $\tau \ll 24\,\text{h}$ (durée d'une rotation de la Terre sur elle-même) ;
- le référentiel **géocentrique** si $\tau \ll 1\,\text{an}$ (durée d'une révolution de la Terre autour du Soleil) ;
- le référentiel **héliocentrique** si $\tau \ll 230\,\text{Ma}$ (durée d'une révolution du Soleil autour du centre de la Galaxie) ;
- le référentiel de **Copernic** est le meilleur référentiel galiléen connu.

1.2 Les trois « lois » de Newton

a) 1re loi : principe d'inertie

Principe d'inertie ♥

Il existe des référentiels, dits galiléens, dans lesquels tout système isolé ou pseudo-isolé (soumis à des forces qui se compensent) est immobile ou en mouvement rectiligne uniforme.

Vocabulaire : un système est **isolé** s'il n'est soumis à aucune force ; **pseudo-isolé** si les forces qu'il subit se compensent ($\sum \vec{F} = \vec{0}$).

Conséquence du principe d'inertie. Soit $\mathcal{R}_1$ un référentiel galiléen et $\mathcal{R}_2$ un référentiel en **translation rectiligne uniforme** par rapport à $\mathcal{R}_1$. Un système pseudo-isolé est en mouvement rectiligne uniforme dans $\mathcal{R}_1$; ses vitesses dans $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ diffèrent d'un vecteur constant, donc il est aussi en mouvement rectiligne uniforme dans $\mathcal{R}_2$: $\mathcal{R}_2$ est donc aussi galiléen.

À retenir ♥

Les référentiels galiléens sont en translation rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres.

Exemples : un ascenseur qui monte à vitesse constante, un train roulant en ligne droite à vitesse constante...

☞ Vidéo : une balle lancée à 100 km/h depuis un camion roulant à 100 km/h





Une machine à lancer, fixée sur le plateau d'un camion qui roule à 100 km/h en ligne droite, envoie une balle **vers l'arrière** à 100 km/h (vitesse mesurée par rapport au camion).

À faire :

1. Quelle est la vitesse de la balle juste après le lancer dans le référentiel terrestre ? $\vec{v} = \vec{0}$: les deux vitesses se compensent.
2. Décrire sa trajectoire dans le référentiel terrestre, puis dans celui du camion. Sol : chute **verticale**. Camion : **parabole** (balle lancée horizontalement).
3. Les deux référentiels sont-ils galiléens ? Comparer l'accélération de la balle dans chacun. Oui (translation rectiligne uniforme) : $\vec{a} = \vec{g}$ dans les deux.

Le mouvement est relatif, mais l'**accélération est la même** dans tous les référentiels galiléens : c'est elle que relie le PFD aux forces.

b) 2e loi : principe fondamental de la dynamique

On définit la **quantité de mouvement** d'un point M de masse m et de vitesse $\vec{v}$ dans un référentiel $\mathcal{R}$ par :

$$\boxed{\vec{p} = m\,\vec{v}} \heartsuit$$

Remarques : $\vec{p}$ **dépend du référentiel choisi** ; elle s'exprime en $\mathrm{kg\,m\,s^{-1}}$. La masse m qui intervient ici est la **masse inertielle** : elle mesure la « résistance » d'un corps à la mise en mouvement.

Quantité de mouvement d'un système de deux points M_1 et M_2, de masses m_1, m_2 et de vitesses $\vec{v}_1$ et $\vec{v}_2$ dans $\mathcal{R}$.

La quantité de mouvement de l'ensemble $\{M_1 + M_2\}$ est la somme des quantités de mouvement : $\vec{p}_{\text{tot}} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$.

Or, par définition du **centre de masse** G (ou centre d'inertie) de l'ensemble des deux points :

$$\boxed{(m_1 + m_2)\,\overrightarrow{OG} = m_1\,\overrightarrow{OM_1} + m_2\,\overrightarrow{OM_2}}$$

En dérivant par rapport au temps (m_1 et m_2 constantes) :

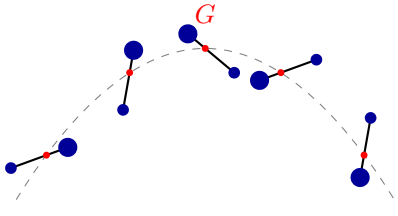
$$(m_1 + m_2)\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OG}}{\mathrm{d}t} = m_1\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM_1}}{\mathrm{d}t} + m_2\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM_2}}{\mathrm{d}t} \iff (m_1 + m_2)\,\vec{v}_G = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$$

Comme $\vec{p}_{\text{tot}} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2$, on en déduit :

$$\boxed{\vec{p}_{\text{tot}} = m_{\text{tot}}\,\vec{v}_G \qquad \text{avec } m_{\text{tot}} = m_1 + m_2} \heartsuit$$

Interprétation : d'un point de vue dynamique, l'ensemble des deux points se comporte comme un point matériel unique placé en G, de masse $m_{\text{tot}} = m_1 + m_2$.

Exemple : un haltère lancé en l'air tourne sur lui-même de façon compliquée, mais son centre de masse G décrit une simple **parabole**, comme un point matériel.



Principe fondamental de la dynamique (PFD) ♥

Dans un référentiel galiléen, la dérivée de la quantité de mouvement d'un système fermé est égale à la somme des forces extérieures qui s'exercent sur lui :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \sum \vec{F}_{\text{ext}}} \ ♥$$

Remarque : si m est constante, le PFD s'écrit $m\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = m\,\vec{a} = \sum \vec{F}_{\text{ext}}$; **ce n'est pas le cas d'une fusée**, qui perd de la masse en éjectant ses gaz.

Méthode : appliquer le PFD (à suivre à chaque fois !)

1. **Système :** le définir précisément ; le modéliser par un point matériel (ou son centre de masse G).
2. **Référentiel :** le préciser et le supposer galiléen (en justifiant si besoin).
3. **Bilan des forces :** les lister **et les représenter sur un schéma**.
4. **PFD :** écrire la relation vectorielle $m\vec{a} = \sum \vec{F}_{\text{ext}}$.
5. **Projection :** choisir une base adaptée (cartésienne, polaire…) et projeter.

c) 3e loi : principe des actions réciproques

Principe des actions réciproques ♥

Si un système A exerce une force sur un système B, alors B exerce sur A une force de même direction, de même norme et de sens opposé :

$$\boxed{\vec{F}_{A\to B} = -\vec{F}_{B\to A}} \ ♥$$

☞ Vidéo : se propulser avec une bouteille de gaz





« Newton » se tient sur un chariot à roulettes en tenant une bouteille de gaz comprimé. Il ouvre la vanne : le gaz s'échappe d'un côté… et le chariot part dans l'autre sens !

À faire :

1. La bouteille exerce une force sur le gaz pour l'éjecter. Quelle force le gaz exerce-t-il sur la bouteille ? Une force opposée (3e loi) : c'est elle qui pousse le chariot.
2. On considère le système {chariot + Newton + bouteille + gaz}, initialement immobile. Que dire de sa quantité de mouvement horizontale ? Système pseudo-isolé horizontalement : $\vec{p}_{\text{tot}}$ reste nulle, donc $m_{\text{ch}}\vec{v}_{\text{ch}} = -m_{\text{gaz}}\vec{v}_{\text{gaz}}$.

C'est le principe de la propulsion des **fusées** : elles avancent en éjectant des gaz vers l'arrière, même dans le vide (il n'y a pas besoin « d'appui » sur l'air).

1.3 Limites de la mécanique classique

« Principe »

Un principe est un postulat non démontré, considéré comme valable tant qu'il n'est pas contredit par l'expérience.

- En mécanique classique, **le temps est absolu** (il s'écoule de la même façon dans tous les

référentiels). C'est valable si $\|\vec{v}\| \ll c$ dans le référentiel d'étude. Sinon, il faut utiliser **la relativité restreinte** ou **la relativité générale** (hors programme).

Exemple où le temps absolu est pris en défaut : les satellites GPS doivent mesurer des durées à 10^{-9} s près (donc des distances au mètre près) ; sans corrections relativistes sur leurs horloges, la position calculée dériverait de plusieurs kilomètres par jour.

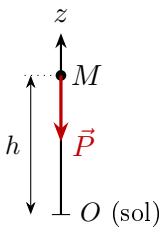
- En mécanique classique, **l'énergie et la matière sont continues**. C'est valable si la taille caractéristique du système est grande devant le nanomètre. Sinon, il faut utiliser **la mécanique quantique**.

II Applications

2.1 Mouvement dans le champ de pesanteur uniforme

a) Cas sans frottements

On lâche **sans vitesse initiale**, d'une hauteur h, un objet de masse m.
Système : {objet} de masse m, assimilé à un point matériel M.
Référentiel : terrestre, supposé galiléen (TSG).
Bilan des forces : le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ seul (frottements de l'air négligés).
PFD : $m\vec{a} = m\vec{g}$ donc



$$\boxed{\vec{a} = \vec{g}} \heartsuit$$

Le mouvement est à vecteur accélération constant, et ne dépend pas de la masse de l'objet !

On intègre avec l'axe (Oz) vertical **ascendant** et les conditions initiales $\vec{v}(0) = \vec{0}$, $z(0) = h$:

$$\vec{v}(t) = -g\,t\,\vec{e}_z \qquad \text{et} \qquad \boxed{z(t) = -\frac{1}{2}g\,t^2 + h}$$

Attention : avec un axe orienté **vers le bas** (et O au sol), on obtiendrait $z(t) = +\frac{1}{2}g\,t^2 - h$.

Durée de la chute : elle se termine à l'instant T tel que $z(T) = 0$: $-\frac{1}{2}gT^2 + h = 0 \Rightarrow \boxed{T = \sqrt{\frac{2h}{g}}}$

Vérification : $\left[\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{L\,T^{-2}}}\right]^{1/2} = \mathrm{T}$ ✓

Vitesse juste avant l'impact : $\boxed{v_{\text{impact}} = g\,T = \sqrt{2gh}}$

Limite du modèle : si $h \to \infty$, alors $v_{\text{impact}} \to \infty$: irréaliste ! On s'attend plutôt à une vitesse limite… il faut prendre en compte les frottements de l'air.

Avec une vitesse initiale non verticale, on retrouve le mouvement **parabolique** étudié au chapitre 07.

☞ Vidéo : esprit critique – le saut du « Megawoosh »




Un homme dévale un immense toboggan aquatique, s'envole depuis un tremplin et atterrit… dans une petite piscine gonflable, plusieurs dizaines de mètres plus loin !

À faire :

1. Frottements de l'air négligés : quelle est la nature de la trajectoire après le tremplin ? Une parabole, car $\vec{a} = \vec{g}$.
2. On estime à $H \approx 10\,\text{m}$ la hauteur entre le sommet de la trajectoire et la piscine. Estimer la vitesse verticale à l'entrée dans l'eau. $v_z = \sqrt{2gH} \approx 14\,\text{m/s} \approx 50\,\text{km/h}$.
3. La piscine a environ $d \approx 1\,\text{m}$ de profondeur. Estimer la décélération nécessaire pour s'arrêter avant le fond. Conclure. $a \approx v_z^2/(2d) \approx 100\,\text{m/s}^2 \approx 10\,g$: très dangereux !

Fin de l'histoire : cette vidéo est en réalité une publicité virale (pour un logiciel Microsoft) : le vol a été réalisé par montage et animation. Un **pointage vidéo** permet de tester si la trajectoire affichée est bien une parabole…

b) Cas avec frottements de la forme $\vec{F} = -\alpha\,\vec{v}$

($\alpha > 0$ est un coefficient de frottement, en $\text{kg}\,\text{s}^{-1}$: ce n'est **pas** une constante de raideur.)

Bilan des forces : poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et force de frottement $\vec{F} = -\alpha\,\vec{v}$.

PFD : $m\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = m\vec{g} - \alpha\,\vec{v} \iff \dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\alpha}{m}\vec{v} = \vec{g}$

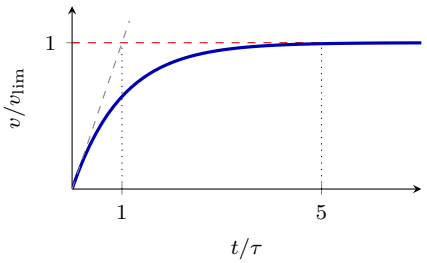
Projection sur (Oz) ascendant : l'objet descend, donc $\vec{v} = -\|\vec{v}\|\,\vec{e}_z = -v\,\vec{e}_z$ (à cause du choix du sens de l'axe) :

$$-\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - \frac{\alpha}{m}v = -g \iff \boxed{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{\alpha}{m}v = g}$$

Les solutions sont de la forme $v(t) = A\,e^{-t/\tau} + v_p$ où l'on identifie le **temps caractéristique** $\tau = \dfrac{m}{\alpha}$.

Solution particulière constante : $\dfrac{\alpha}{m}v_p = g \Rightarrow v_p = \dfrac{mg}{\alpha}$.

Condition initiale $v(0) = 0$: $A + \dfrac{mg}{\alpha} = 0 \Rightarrow A = -\dfrac{mg}{\alpha}$.



$$\boxed{v(t) = \frac{mg}{\alpha}\left(1 - e^{-t/\tau}\right) \qquad \text{avec } \tau = \frac{m}{\alpha}}$$ ♥

Remarque : τ est le temps caractéristique du **régime transitoire** : pour $t > 5\tau$, la vitesse ne varie quasiment plus et vaut $v_{\text{lim}} = \dfrac{mg}{\alpha}$.

À retenir ♥

v_{lim} est la vitesse constante atteinte en régime permanent : on l'appelle vitesse limite.

Physiquement : le poids et la force de frottement sont de sens opposés. La norme de la force de frottement augmente avec la vitesse jusqu'à compenser le poids (vers $t \approx 5\tau$). Le système devient alors pseudo-isolé : son mouvement est rectiligne uniforme.

Écrire une équation adimensionnée

On mesure chaque grandeur avec son échelle caractéristique : on pose $u = \dfrac{v}{v_{\text{lim}}}$ et $t^* = \dfrac{t}{\tau}$ (sans dimension). Comme $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \dfrac{v_{\text{lim}}}{\tau}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t^*} = g\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t^*}$, l'équation devient :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t^*} + u = 1} \quad \Rightarrow \quad u(t^*) = 1 - e^{-t^*}$$

Une seule courbe universelle décrit toutes les chutes de ce type, quelles que soient m et α : c'est la courbe tracée ci-dessus.

c) Cas avec frottements de la forme $\vec{F} = -\lambda\, v\, \vec{v}$

Bilan des forces : $\vec{P} = m\vec{g}$ et $\vec{F} = -\lambda\, v\, \vec{v}$, où $v = \|\vec{v}\|$, qu'on peut aussi écrire $\vec{F} = -\lambda\, v^2\, \vec{u}$ avec $\vec{u} = \dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ le vecteur unitaire de même direction et de même sens que $\vec{v}$.

PFD : $m\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = m\vec{g} - \lambda\, v\, \vec{v}$. On projette sur (Oz), toujours dirigé vers le haut : $m\dfrac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = -mg - \lambda\, v\, v_z$.

v_z, projection de $\vec{v}$ sur (Oz), est une grandeur algébrique ; l'objet lâché sans vitesse initiale descend toujours, donc $v_z = -v$:

$$-m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -mg - \lambda\, v\,(-v) \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{\lambda}{m}v^2 = g}$$

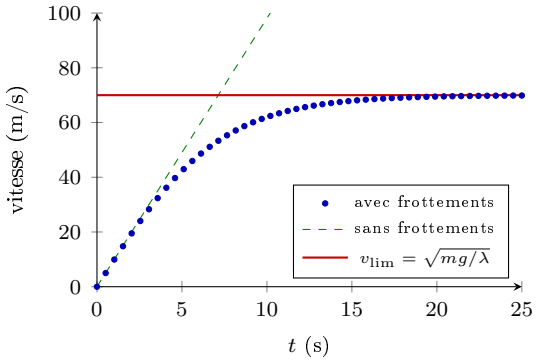
C'est une équation différentielle **non linéaire** (terme en v^2) : on ne sait pas la résoudre simplement à la main, mais elle se résout facilement **numériquement** (méthode d'Euler, voir TP info).

Solution (démonstration hors programme) :

$$v(t) = v_{\text{lim}}\,\text{th}\left(\sqrt{\frac{\lambda g}{m}}\,t\right) \text{ avec } v_{\text{lim}} = \sqrt{\frac{mg}{\lambda}}$$

Adimensionnement : avec $u = v/v_{\text{lim}}$ et $t^* = t\,g/v_{\text{lim}}$: $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t^*} + u^2 = 1$.

Simulation numérique



d) Méthode pour trouver la vitesse limite

On part de l'équation du mouvement sur (Oz) : $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\alpha}{m}v = g$ ou $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\lambda}{m}v^2 = g$ selon le type de frottement.

En **régime permanent**, la vitesse limite est atteinte et **ne varie plus :** $\dfrac{\mathrm{d}v_{\text{lim}}}{\mathrm{d}t} = 0$. Ainsi :

Frottement $\vec{F} = -\alpha\,\vec{v}$

$$0 + \frac{\alpha}{m}v_{\text{lim}} = g \;\Rightarrow\; \boxed{v_{\text{lim}} = \frac{mg}{\alpha}} \;\heartsuit$$

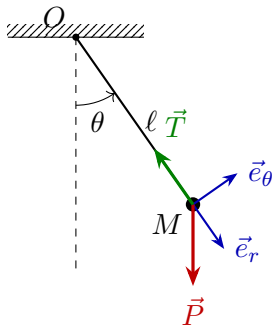
Frottement $\vec{F} = -\lambda\, v\, \vec{v}$

$$0 + \frac{\lambda}{m}v_{\text{lim}}^2 = g \;\Rightarrow\; \boxed{v_{\text{lim}} = \sqrt{\frac{mg}{\lambda}}} \;\heartsuit$$

Quand choisir une forme plutôt que l'autre ? En première année, l'énoncé le précise toujours. En deuxième année, on utilisera le **nombre de Reynolds**, qui est d'autant plus grand que l'écoulement autour de l'objet est turbulent : frottement linéaire pour les petits objets lents (Reynolds faible), quadratique pour les objets rapides (Reynolds élevé : parachutiste, balle de tennis...).

2.2 Mouvement d'un pendule simple

a) Équation du mouvement



Système : {masse m} assimilée à un point M, accrochée à un fil inextensible de longueur ℓ et de masse négligeable.
Référentiel : terrestre, supposé galiléen.
On travaille en **coordonnées polaires** de centre O, plus adaptées à la géométrie du système (trajectoire circulaire).
Bilan des forces : le poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et la tension du fil $\vec{T} = -T\,\vec{e}_r$ (frottements négligés).
On écarte le pendule d'un angle θ_0 et on le lâche sans vitesse initiale.
Objectif : exprimer $\theta(t)$.
PFD : $m\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \vec{P} + \vec{T}$

Cinématique en coordonnées polaires : $\vec{v} = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\ell\,\vec{e}_r) = \dot{\ell}\,\vec{e}_r + \ell\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$; or $\ell = \text{cste}$ donc $\dot{\ell} = 0$ et $\boxed{\vec{v} = \ell\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta}$

(La notation « point » pour la dérivée temporelle est due à Newton ; on ne l'utilise qu'en mécanique. Vous pouvez toujours écrire $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ si c'est plus clair pour vous.)

$\dfrac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\ell\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta) = \ell\ddot{\theta}\,\vec{e}_\theta + \ell\dot{\theta}\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_\theta}{\mathrm{d}t}$ et $\dfrac{\mathrm{d}\vec{e}_\theta}{\mathrm{d}t} = -\dot{\theta}\,\vec{e}_r$ donc $\boxed{\vec{a} = \ell\ddot{\theta}\,\vec{e}_\theta - \ell\dot{\theta}^2\,\vec{e}_r}$

Poids dans la base polaire : $\vec{P} = mg\cos\theta\,\vec{e}_r - mg\sin\theta\,\vec{e}_\theta$

Le PFD s'écrit : $m\left(\ell\ddot{\theta}\,\vec{e}_\theta - \ell\dot{\theta}^2\,\vec{e}_r\right) = mg\cos\theta\,\vec{e}_r - mg\sin\theta\,\vec{e}_\theta - T\,\vec{e}_r$

Projection sur $\vec{e}_\theta$: $m\ell\ddot{\theta} = -mg\sin\theta$ soit (à savoir retrouver !)

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0}$$ ♥

Bonus – projection sur $\vec{e}_r$: $-m\ell\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta - T$, soit $T = mg\cos\theta + m\ell\dot{\theta}^2$: la tension est maximale au passage par la verticale.

b) Approximation des petits angles, analogie avec l'oscillateur harmonique

L'équation n'est **pas linéaire** à cause de la fonction sinus : on ne sait pas la résoudre à la main. En revanche, un élève de prépa sait résoudre une équation différentielle linéaire ! Il faudrait avoir $\theta(t)$ à la place de $\sin\theta(t)$.

Rappel (optique géométrique) : si $\theta \ll 1\,\text{rad}$, on peut faire l'**approximation des petits angles** : $\sin\theta \approx \theta$ (en pratique, l'erreur reste inférieure à 2 % tant que $\theta \lesssim 20°$).

L'équation du mouvement devient : $\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} = -\dfrac{g}{\ell}\theta$ qu'on met sous la forme $\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{g}{\ell}\theta = 0$.

On reconnaît l'équation d'un **oscillateur harmonique** de forme canonique $\dfrac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2\,\theta = 0$, de pulsation propre :

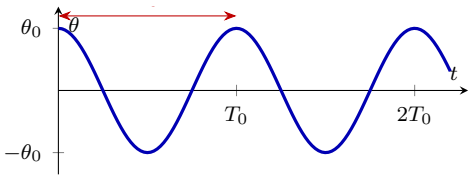
$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}}$$ ♥

c) Résolution et période des oscillations

Les solutions sont de la forme $\theta(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$.

Conditions initiales : $\theta(0) = \theta_0 \iff A \times 1 + B \times 0 = \theta_0 \Rightarrow A = \theta_0$;
sans vitesse initiale : $\dot{\theta}(0) = 0$, avec $\dot{\theta}(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t)$, d'où $-A\omega_0 \times 0 + B\omega_0 \times 1 = 0 \Rightarrow B = 0$.

$$\boxed{\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t)} \heartsuit$$



Période propre des oscillations, telle que $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T_0}$:

$$\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}}$$

On peut s'en servir pour **mesurer** g : $g = \dfrac{4\pi^2\ell}{T_0^2}$.

Remarques :

- **La période ne dépend pas de la masse accrochée**, tant que le modèle reste valable : si la masse est trop faible, on ne peut plus négliger la masse du fil ; si l'objet n'est pas assez dense, on ne peut plus négliger les frottements de l'air.
- **La période ne dépend pas non plus de l'amplitude θ_0** (isochronisme des petites oscillations, découvert par Galilée), ce qui peut sembler contre-intuitif ! Ce n'est plus vrai si θ_0 dépasse une vingtaine de degrés : on sort de l'approximation des petits angles et la période augmente avec l'amplitude.

Histoire des sciences : peser les montagnes avec un pendule

En 1736, **Pierre Bouguer** part au Pérou avec Charles-Marie de La Condamine pour mesurer un arc de méridien à l'équateur et préciser la forme de la Terre (*La Figure de la Terre*, 1749). Il mesure aussi la pesanteur à différentes altitudes grâce à un pendule de longueur toujours identique (36 pouces 7,019 lignes, calibrée sur une règle en fer). Plutôt que de mesurer une variation infime de longueur, il compte **le nombre d'oscillations en 24 h**, en comparant le pendule à une horloge réglée sur les étoiles : d'après $T_0 = 2\pi\sqrt{\ell/g}$, cela revient au même !
Si la pesanteur suit la loi de Newton en $1/r^2$, à l'altitude h (rayon terrestre R) :

$$\Delta g = g' - g = \frac{GM}{(R+h)^2} - \frac{GM}{R^2} = g\left(\frac{1}{(1+h/R)^2} - 1\right) \approx -\frac{2h}{R}\,g$$

Lieu	**Altitude h**	**g mesuré** ($\mathrm{m\,s^{-2}}$)	**$\Delta g/g$ mesuré**	**$\Delta g/g$ calculé** ($-2h/R$)
Niveau de la mer	0	9,779	0	–
Quito	2857 m	9,772	$-1/1331$	$-1/1116$
Pichincha	4744 m	9,768	$-1/845$	$-1/672$

La pesanteur diminue bien avec l'altitude, mais **moins que prévu** : le plateau des Andes, sous le pendule, l'attire. Pourtant, cette attraction est plus faible que celle attendue pour une telle masse de roche, **comme si les montagnes étaient creuses** ! Ce mystère sera expliqué en 1889 par Clarence Dutton : les montagnes ont une « racine » de roches plus légères que les roches environnantes (*isostasie*).
Pour en savoir plus : `planet-terre.ens-lyon.fr/ressource/pendule-pesanteur-altitude.xml`

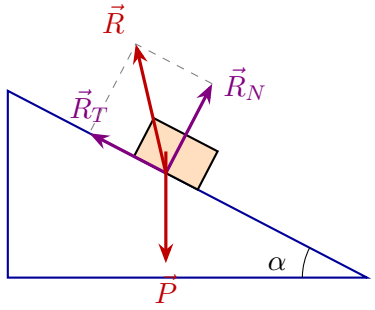
2.3 Mouvement d'un solide en translation avec frottements

a) Lois de Coulomb

Vocabulaire : l'étude des frottements s'appelle la **tribologie**. Guillaume Amontons (1699) puis Charles-Augustin Coulomb (1781) ont établi des lois **phénoménologiques**, c'est-à-dire fondées sur des résultats expérimentaux, sans chercher de théorie sous-jacente plus profonde. Elles rendent compte du frottement entre deux solides.

Expérience historique : on pose un objet sur un plan incliné d'un angle α. Tant que α est inférieur à une valeur limite α_{lim}, l'objet ne bouge pas : **il n'y a pas glissement**. Dès que α dépasse α_{lim}, l'objet se met en mouvement : **il y a glissement**.

b) Mise en équation



Bilan des forces :

- le poids de l'objet $\vec{P}$;
- la réaction du support $\vec{R}$, qu'on décompose en deux composantes : $\vec{R} = \vec{R}_N + \vec{R}_T$
  - $\vec{R}_N$ est la **réaction normale** du support : elle existe même en l'absence de frottement ;
  - $\vec{R}_T$ est la **réaction tangentielle** : elle modélise le frottement du support sur l'objet étudié.

Remarque : si on néglige les frottements, $\vec{R}_T = \vec{0} \Rightarrow \vec{R} = \vec{R}_N$.

Lois de Coulomb du frottement solide ♥

- **En l'absence de glissement** ($\alpha < \alpha_{\text{lim}}$) : $\|\vec{R}_T\| \leqslant f_s \|\vec{R}_N\|$ avec f_s le **coefficient d'adhérence** (ou coefficient statique).
- **Dès que le glissement commence** ($\alpha > \alpha_{\text{lim}}$) : $\|\vec{R}_T\| = f_d \|\vec{R}_N\|$ avec f_d le **coefficient de frottement dynamique** (ou de glissement), et $\vec{R}_T$ **s'oppose au glissement**.

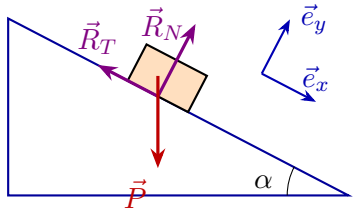
f_s et f_d sont **sans dimension** ; ils dépendent de la nature des surfaces en contact, mais **pas de l'aire de contact**.

Physiquement : à mesure que α augmente, la composante du poids parallèle au plan augmente. Pour maintenir l'équilibre, la norme de $\vec{R}_T$ doit augmenter aussi pour la compenser ; mais elle ne peut pas dépasser le seuil $f_s\|\vec{R}_N\|$: au-delà, l'équilibre est impossible et l'objet glisse. Dès que l'objet glisse, $\|\vec{R}_T\|$ prend la valeur $f_d\|\vec{R}_N\|$.

Valeurs typiques : acier/acier : $f_s \approx 0{,}3$ et $f_d \approx 0{,}1$ acier/glace : $f_s \approx 0{,}05$ et $f_d \approx 0{,}02$ pneu/route sèche : $f \approx 0{,}8$

En général $f_d \leqslant f_s$; dans le modèle le plus simple, on prend $f_d = f_s = f$.

c) Exemple : l'objet sur le plan incliné



À partir de quel angle α le solide commence-t-il à glisser ?
Système : {solide de masse m}. **Réf. :** TSG.
Bilan des forces : $\vec{P}$ et $\vec{R} = \vec{R}_N + \vec{R}_T$ (on fait apparaître les deux composantes).
Composantes : $\vec{R}_N = R_N\,\vec{e}_y$ et $\vec{R}_T = -R_T\,\vec{e}_x$ avec $R_T > 0$;
$\vec{P} = mg\,(\sin\alpha\,\vec{e}_x - \cos\alpha\,\vec{e}_y)$.

Détermination de α_{lim}. Le système est à l'équilibre, donc :

$$\vec{R}_N + \vec{R}_T + \vec{P} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} -R_T + mg\sin\alpha = 0 \\ R_N - mg\cos\alpha = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} R_T = mg\sin\alpha \\ R_N = mg\cos\alpha \end{cases}$$

donc dans ce cas $\dfrac{R_T}{R_N} = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \tan\alpha$. D'après la loi de Coulomb, sans glissement : $\|\vec{R}_T\| \leqslant$

$$f_s\|\vec{R}_N\| \iff \frac{\|\vec{R}_T\|}{\|\vec{R}_N\|} \leqslant f_s.$$

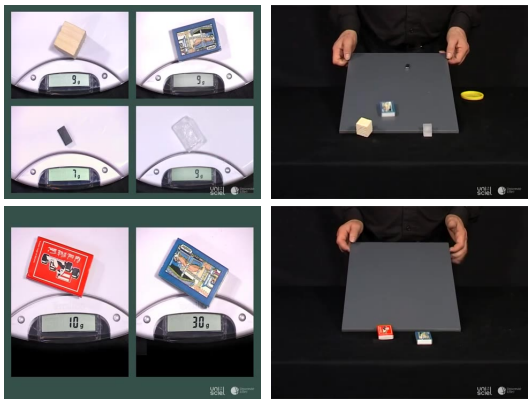
Donc, tant qu'il n'y a pas glissement : $\tan\alpha \leqslant f_s \Rightarrow \alpha \leqslant \arctan(f_s)$. À la limite du glissement :

$$\boxed{\alpha_{\text{lim}} = \arctan(f_s)} \heartsuit$$

Remarques : cet angle est indépendant de la masse m ! A.N. pour acier/acier : $\alpha_{\text{lim}} = \arctan(0{,}3) \approx 16.7°$.

Mesurer α_{lim} fournit donc un protocole simple de mesure de f_s : $f_s = \tan\alpha_{\text{lim}}$.

☞ Vidéo : loi de Coulomb – quand est-ce que ça glisse ?



Expérience 1 (en haut) : quatre objets de **masses voisines** (7 à 9 g) mais de matériaux différents sont posés sur une plaque qu'on incline progressivement.
Expérience 2 (en bas) : deux boîtes d'allumettes **identiques en surface**, de masses 10 g et 30 g (l'une est lestée de clous).
À faire : décrire et interpréter chaque expérience.
1 : les objets glissent pour des angles différents : α_{lim} dépend de la nature des surfaces (de f_s).
2 : les deux boîtes glissent en même temps : $\alpha_{\text{lim}} = \arctan f_s$ ne dépend pas de m.

Équation du mouvement en phase de glissement ($\alpha > \alpha_{\text{lim}}$). Le PFD appliqué au système s'écrit :

$$\vec{R}_N + \vec{R}_T + \vec{P} = m\vec{a} \Rightarrow \begin{cases} -R_T + mg\sin\alpha = m\ddot{x} \\ R_N - mg\cos\alpha = m\ddot{y} \end{cases}$$

Comme il n'y a pas de déplacement selon (Oy) : $\ddot{y} = 0 \Rightarrow R_N = mg\cos\alpha$ **À ne surtout pas oublier !**

D'après la loi de Coulomb (dynamique) : $R_T = f_d\,R_N$, donc $R_T = f_d\,mg\cos\alpha$.

L'équation du mouvement selon (Ox) s'écrit donc : $m\ddot{x} = -f_d\,mg\cos\alpha + mg\sin\alpha$, soit

$$\boxed{\ddot{x} = g\,(\sin\alpha - f_d\cos\alpha)} \heartsuit$$

Remarques :

- Vérification : comme $\alpha > \alpha_{\text{lim}}$, on a $\tan\alpha > f_s \geqslant f_d$, donc $\sin\alpha - f_d\cos\alpha > 0$: $\ddot{x} > 0$, l'objet accélère bien vers le bas de la pente.
- $g(\sin\alpha - f_d\cos\alpha)$ est indépendant du temps et de x : **le mouvement est rectiligne uniformément accéléré**.
- L'accélération est d'autant plus proche de g que α se rapproche de $\pi/2$ (à $\alpha = \pi/2$: $R_N = 0$, plus de frottement, c'est la chute libre).

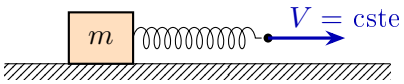
Méthode : glissement ou pas glissement ?

1. **Faire une hypothèse**, par exemple : « il n'y a pas glissement ».
2. Appliquer le PFD avec cette hypothèse (vitesse de glissement nulle) pour obtenir R_T et R_N.
3. **Valider l'hypothèse :** vérifier que $\|\vec{R}_T\| \leqslant f_s\|\vec{R}_N\|$. Si ce n'est pas le cas, l'hypothèse est fausse : il y a glissement, et on reprend avec $\|\vec{R}_T\| = f_d\|\vec{R}_N\|$, $\vec{R}_T$ opposée au glissement.

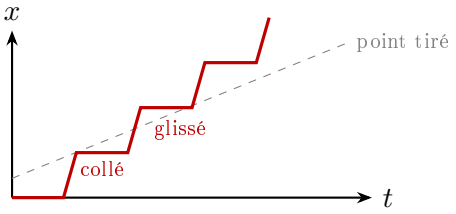
Cas d'un freinage : voir l'exercice sur le freinage d'urgence du TD08.

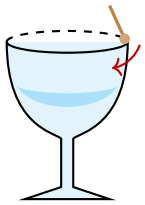
*d) Pour aller plus loin : le mouvement de collé-glissé (*stick-slip*)*

Comme $f_d < f_s$, un objet tiré par un ressort ne glisse pas régulièrement : il **colle**, la force du ressort augmente jusqu'au seuil $f_s\|\vec{R}_N\|$, puis il **glisse** brusquement (le frottement chute à $f_d\|\vec{R}_N\|$), dépasse sa position d'équilibre, s'arrête… et le cycle recommence.

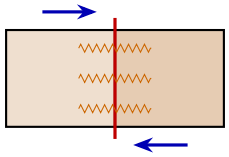


Modèle : patin tiré à vitesse constante via un ressort

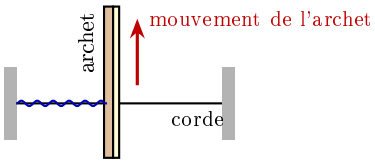



Verre « chantant » : doigt mouillé sur le bord

Musique : verre chantant, **harmonica de verre** de Benjamin Franklin (1761, des bols de verre emboîtés sur un axe tournant), archet de violon, grincement d'une porte ou d'une craie au tableau.


Faille : deux plaques bloquées par le frottement

Séismes : les plaques tectoniques se déplacent lentement (quelques cm/an) mais restent **collées** le long de la faille ; les contraintes s'accumulent pendant des années, puis la faille **glisse** brutalement : c'est le séisme.



Archet frottant une corde

Archet : la colophane augmente f_s ; la corde est entraînée par l'archet (collé), puis s'en décroche (glissé), des centaines de fois par seconde : c'est ce qui la fait vibrer et produire un son entretenu.