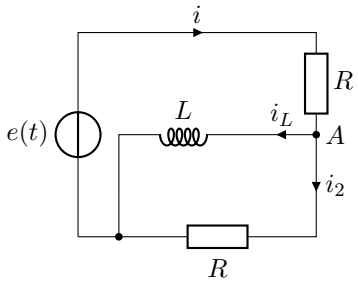
Correction du DS02 2026-2027

Circuit RL – Lunette astronomique – Lampe à secouer – Pont de Wheatstone

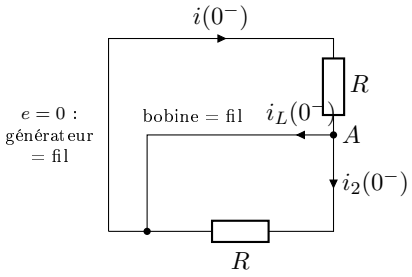
Exercice I : Circuit RL (extrait ENAC)



Q1) Pour la bobine (convention récepteur), $u_L = L\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}$. En régime stationnaire, i_L = cste donc $\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} = 0$ et $u_L = 0$:

en régime stationnaire, la bobine est équivalente à un fil ♥

Q2) Pour $t < 0$, $e = 0$ et le régime permanent est établi : le générateur se comporte comme un fil (tension nulle) et la bobine aussi (Q1). Schéma équivalent à $t = 0^-$:

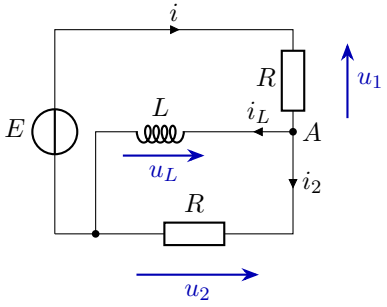


Le circuit ne contient plus aucune source. Loi des mailles dans la maille extérieure (générateur, R du haut, bobine) : $e = u_R + u_L$, soit $0 = Ri(0^-) + 0$:

$$\boxed{i(0^-) = 0}$$ ♥

La bobine court-circuite la résistance du bas : $i_2(0^-) = 0$, et la loi des nœuds en A donne $i_L(0^-) = i(0^-) - i_2(0^-) = 0$.

Q3) Pour $0 < t < t_1$, $e = E$. On oriente les tensions et les courants :



On écrit toutes les lois :

- loi des mailles (maille extérieure) : $E = u_1 + u_L$ (1) ; la bobine et la résistance du bas sont en parallèle : $u_2 = u_L$;
- loi des nœuds en A : $i = i_L + i_2$ (2) ;
- relations tension-courant : $u_1 = Ri$, $u_2 = Ri_2$, $u_L = L\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}$.

Étape 1 : on élimine i_2. La maille contenant les deux résistances donne $E = u_1 + u_2 = Ri + Ri_2 = Ri + R(i - i_L)$ d'après (2), soit

$$E = 2Ri - Ri_L.$$

On dérive par rapport au temps (E est constant) : $0 = 2R\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} - R\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t}$, d'où $\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} = 2\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$.

Étape 2 : on reporte dans (1) : $E = Ri + L\dfrac{\mathrm{d}i_L}{\mathrm{d}t} = Ri + 2L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$. On divise par $2L$:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{i}{\tau} = \frac{E}{R\tau} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{2L}{R}} \ ♥$$

Remarque

Vérifications : $\tau = \frac{2L}{R}$ est bien homogène à un temps (L/R en secondes). En régime permanent, $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0$ donne $i = \frac{E}{R}$: la bobine court-circuite la résistance du bas, il ne reste que R en série, c'est cohérent. Enfin, i_L est continu, donc $i_L(0^+) = 0$ et $E = 2Ri(0^+)$: $i(0^+) = \frac{E}{2R}$ (i, lui, est discontinu).

Exercice 2 : Lunette astronomique (E3A)

Q1) L'œil (sans défaut) n'accommode pas s'il observe un objet **à l'infini** : l'image finale donnée par la lunette doit donc être à l'infini. Pour l'oculaire, l'image intermédiaire $A'B'$ doit alors se trouver dans son **plan focal objet**.

Mais l'objet observé (planète) est lui aussi à l'infini : son image par l'objectif se forme dans le **plan focal image de l'objectif**. Il faut donc que ces deux plans soient confondus :

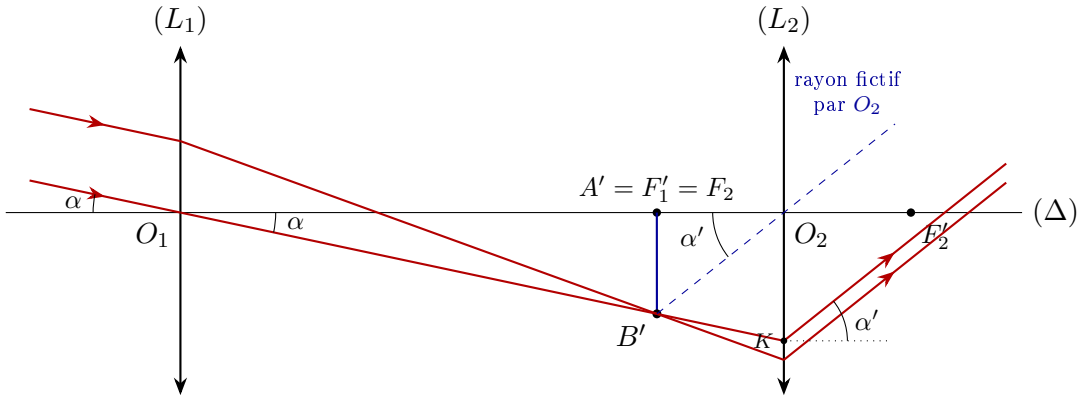
$$\boxed{F_1' = F_2 \quad \Longrightarrow \quad \overline{O_1O_2} = f_1' + f_2'} \ ♥$$

Un tel système, qui donne d'un objet à l'infini une image à l'infini, est dit *afocal*. A.N. $O_1O_2 = 100 + 2 = 102\,\mathrm{cm}$.

Q2) Les conditions de Gauss sont réalisées lorsque tous les rayons sont **paraxiaux** : proches de l'axe optique et peu inclinés par rapport à celui-ci. Dans ces conditions, on obtient un stigmatisme et un aplanétisme approchés.

Construction (sans souci d'échelle) :

- le rayon passant par O_1 n'est pas dévié ; il coupe le plan focal image de L_1 en B' (foyer secondaire) ;
- tous les rayons incidents parallèles à celui-ci (même angle α) convergent en B' ;
- B' est dans le plan focal objet de L_2 : les rayons ressortent parallèles entre eux, et parallèles à la droite $(B'O_2)$ (rayon fictif passant par le centre optique de L_2, non dévié).



Q3) Dans le triangle $O_1A'B'$ rectangle en A' : $\tan\alpha = \dfrac{A'B'}{f_1'}$ (en valeur absolue). Dans le triangle $O_2A'B'$ rectangle en A' : $\tan\alpha' = \dfrac{A'B'}{f_2'}$.

Dans les conditions de Gauss, $\tan\alpha \simeq \alpha$ et $\tan\alpha' \simeq \alpha'$. Avec les angles orientés, l'image est renversée (α' est de signe opposé à α, cf. figure) : $\alpha = -\dfrac{\overline{A'B'}}{f_1'}$ et $\alpha' = \dfrac{\overline{A'B'}}{f_2'}$, d'où

$$\boxed{G = \frac{\alpha'}{\alpha} = -\frac{f_1'}{f_2'}} \heartsuit$$

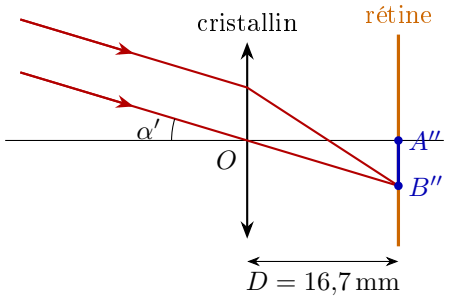
A.N. $G = -\dfrac{100}{2{,}0} = -50$: la planète est vue sous un angle 50 fois plus grand, et renversée.

Q4) **Angle sous lequel on voit la Lune à l'œil nu.** La Lune, de diamètre $d_L = 3400\,\text{km}$, est à la distance $d_{TL} = 3{,}8 \times 10^5\,\text{km} \gg d_L$: elle est vue sous l'angle (petit, donc $\tan\alpha \simeq \alpha$)

$$\alpha \simeq \frac{d_L}{d_{TL}} = \frac{3400}{3{,}8 \times 10^5} \approx 8{,}9 \times 10^{-3}\,\text{rad}\ (\approx 0{,}51°)$$

Angle à la sortie de la lunette. D'après Q3, $|\alpha'| = |G|\,\alpha = 50 \times 8{,}9 \times 10^{-3} \approx 0{,}45\,\text{rad}\ (\approx 26°)$.

Image sur la rétine. On modélise l'œil par une lentille mince (le cristallin, de centre O) et un écran (la rétine) à la distance $D = 16{,}7\,\text{mm}$. L'œil n'accommode pas (Q1) : il voit l'image finale, qui est à l'infini, nettement, donc son image se forme dans le plan focal image du cristallin, c'est-à-dire sur la rétine. Le rayon passant par le centre optique O n'est pas dévié : il arrive sur la rétine en B'', avec



$$\tan|\alpha'| = \frac{A''B''}{D} \qquad \Longrightarrow \qquad A''B'' = D\tan|\alpha'| \simeq D\,|\alpha'| = D\,|G|\,\frac{d_L}{d_{TL}}$$

$$\boxed{A''B'' = D\,\frac{f_1'}{f_2'}\,\frac{d_L}{d_{TL}} \approx 7{,}5\,\text{mm}} \heartsuit$$

A.N. $A''B'' = 16{,}7 \times 50 \times 8{,}9 \times 10^{-3} \approx 7{,}5\,\text{mm}$.

Remarque

À l'œil nu, l'image ne mesurerait que $D\alpha \approx 0{,}15\,\text{mm}$: la lunette la rend 50 fois plus grande ($|G| = 50$). Avec $|\alpha'| \approx 0{,}45\,\text{rad}$, on est à la limite des conditions de Gauss ; le calcul avec la tangente donne $D\tan(0{,}45) \approx 8{,}0\,\text{mm}$, du même ordre de grandeur.

Problème A : Modélisation d'une lampe de secours à secouer

Q1) L'énergie stockée dans un condensateur de capacité C sous la tension U_0 est

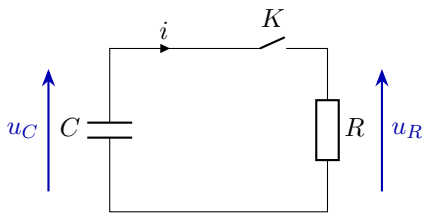
$$\boxed{E_C = \tfrac{1}{2}\,C\,U_0^2}$$ ♥

A.N. $E_C = \frac{1}{2} \times 10 \times 3{,}3^2 \approx 54\,\text{J}$.

Remarque

Pendant la décharge, en convention générateur pour le condensateur ($i = -C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$), la puissance qu'il cède vaut $\mathcal{P} = u_C i = -u_C C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Cu_C^2\right)$: l'énergie $\frac{1}{2}Cu_C^2$ stockée diminue.

Q2) Après fermeture de K :



Loi des mailles : $u_C = u_R$. Loi d'Ohm : $u_R = Ri$. Le courant i sort par la borne + du condensateur (convention générateur) : $i = -C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$. Donc $u_C = R\Big(-C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\Big)$, soit $u_C + RC\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = 0$. En posant $\tau = RC$:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{u_C}{\tau} = 0 \qquad \tau = RC}$$ ♥

Q3) La solution générale est $u_C(t) = \lambda\, e^{-t/\tau}$. La tension aux bornes d'un condensateur est continue : $u_C(0^+) = u_C(0^-) = U_0$, donc $\lambda = U_0$:

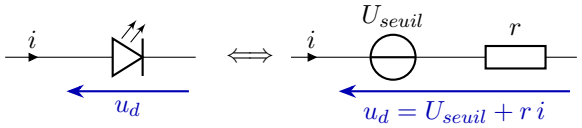
$$\boxed{u_C(t) = U_0\, e^{-t/\tau}}$$ ♥

Q4) La décharge est quasi complète au bout de $\Delta t = 5\tau = 5RC$. Avec $\Delta t = 20\,\text{min}$, on isole R :

$$\boxed{R = \frac{\Delta t}{5C}}$$ ♥

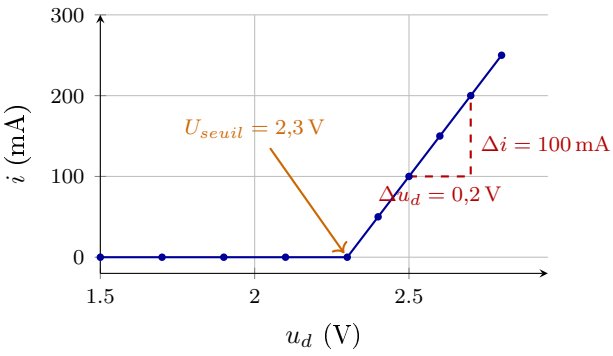
A.N. $R = \dfrac{20 \times 60}{5 \times 10} = 24\,\Omega$.

Q5) Lorsque la DEL est passante, la caractéristique est une droite : $i = \dfrac{u_d - U_{seuil}}{r}$, soit $u_d = U_{seuil} + r\,i$. La DEL est donc équivalente à un générateur idéal de tension U_{seuil} (en convention récepteur) en série avec une résistance r :



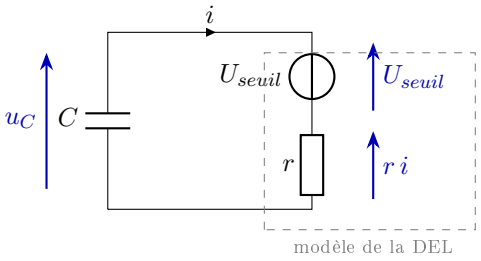
Lecture graphique :

- U_{seuil} est l'abscisse à partir de laquelle i augmente : $U_{seuil} = 2{,}3\,\text{V}$;
- la pente de la droite vaut $\dfrac{1}{r} = \dfrac{\Delta i}{\Delta u_d} = \dfrac{(200-100)\times 10^{-3}}{2{,}7-2{,}5} = 0{,}5\,\text{S}$.



$$\boxed{U_{seuil} = 2{,}3\,\text{V} \qquad r = 2\,\Omega}$$ ♥

Q6) On remplace la DEL par son modèle équivalent :



Loi des mailles : $u_C = U_{seuil} + r\,i$, avec toujours $i = -C\dfrac{\text{d}u_C}{\text{d}t}$ (convention générateur pour C) : $u_C = U_{seuil} - rC\dfrac{\text{d}u_C}{\text{d}t}$, soit $\dfrac{\text{d}u_C}{\text{d}t} + \dfrac{u_C}{rC} = \dfrac{U_{seuil}}{rC}$: on a bien la forme demandée avec

$$\boxed{\tau' = rC}$$ ♥

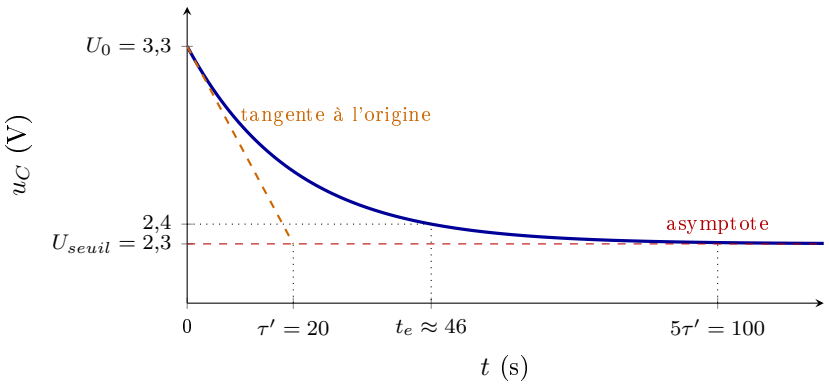
A.N. $\tau' = 2\times 10 = 20\,\text{s}$.

Q7) $u_C(t) = u_{C,h}(t) + u_{C,p}$ avec $u_{C,h} = \lambda e^{-t/\tau'}$ (solution homogène) et $u_{C,p} = U_{seuil}$ (solution particulière constante). Donc $u_C(t) = \lambda e^{-t/\tau'} + U_{seuil}$.

Condition initiale (continuité de u_C) : $u_C(0) = U_0 = \lambda + U_{seuil}$, soit $\lambda = U_0 - U_{seuil}$:

$$\boxed{u_C(t) = (U_0 - U_{seuil})\,e^{-t/\tau'} + U_{seuil}}$$ ♥

Q8) Points importants : valeur initiale $U_0 = 3{,}3\,\text{V}$; asymptote horizontale $u_C = U_{seuil} = 2{,}3\,\text{V}$; la tangente à l'origine coupe l'asymptote en $t = \tau'$; à $t = 5\tau'$, le régime permanent est atteint (à 1 % près).



Remarque

D'après le critère de l'énoncé, la DEL éclaire suffisamment tant que $u_C > U_{seuil} + 0{,}1\,\text{V}$, soit $(U_0 - U_{seuil})e^{-t/\tau'} > 0{,}1$: $t_e = \tau' \ln\dfrac{U_0 - U_{seuil}}{0{,}1} = 20\ln 10 \approx 46\,\text{s}$. On est loin des 20 min de la

notice : avec un courant de l'ordre de 0,5 A, cette DEL est très « gourmande » ; une vraie lampe à secouer utilise un courant bien plus faible.

Q9) R_s est en série avec le condensateur : tout le courant de charge et de décharge la traverse. Elle dissipe par effet Joule la puissance $R_s\, i^2$, perdue pour la lampe, et provoque une chute de tension $R_s\, i$. Il faut donc

$$\boxed{\boldsymbol{R_s} \text{ la plus petite possible}} \heartsuit$$

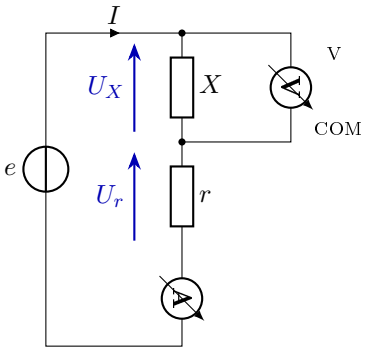
Q10) R_f est en parallèle sur C : même lorsque la lampe est éteinte, le condensateur se décharge à travers R_f, avec la constante de temps $R_f C$ (c'est l'*autodécharge*). Pour que l'énergie reste stockée « pendant plusieurs semaines », il faut $R_f C$ très grand, donc

$$\boxed{\boldsymbol{R_f} \text{ la plus grande possible}} \heartsuit$$

Remarque

Ordre de grandeur : pour $R_f C \approx 3\,\text{semaines} \approx 2\times10^6\,\text{s}$ avec $C = 10\,\text{F}$, il faut $R_f \approx 2\times10^5\,\Omega$.

Problème B : Mesure d'une résistance inconnue



Q1) Circuit série (une seule maille, donc un seul courant I) : générateur e, résistors X et r, et ampèremètre **en série** (le courant le traverse) : borne A du côté où arrive le courant, borne COM du côté de la borne − du générateur.

Q3) Le voltmètre se branche **en dérivation** aux bornes de X : borne V du côté où arrive le courant (potentiel le plus élevé), borne COM de l'autre côté (cf. schéma).

Q2) On néglige la présence de l'ampèremètre (résistance interne nulle). X et r sont en série (même courant) : on peut appliquer la formule du pont diviseur de tension :

$$\boxed{\boldsymbol{U_X = \frac{X}{X+r}\,e}} \heartsuit$$

On a alors $(r+X)\,U_X = X\,e \iff rU_X = X\,(e-U_X)$, d'où

$$\boxed{\boldsymbol{X = \frac{r\,U_X}{e-U_X}}} \heartsuit$$

On peut donc déterminer X connaissant r, U_X et e.

Q4) La loi des mailles donne $e = U_X + U_r$ et la loi d'Ohm $e = XI + rI$, d'où

$$\boxed{\boldsymbol{X = \frac{e-rI}{I} = \frac{e}{I} - r}} \heartsuit$$

A.N. $X = \dfrac{1{,}50}{4{,}290\times10^{-3}} - 100 \approx 249{,}65\,\Omega$.

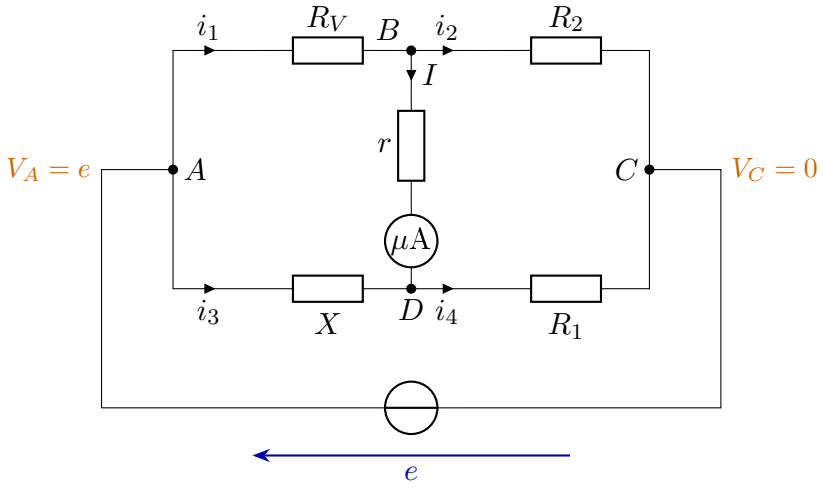
Incertitude. $X = \dfrac{e}{I} - r$ est une différence (cas 2 de l'annexe) entre $\dfrac{e}{I}$ et r ; et $\dfrac{e}{I}$ est un quotient où seule e est incertaine : $u\left(\dfrac{e}{I}\right) = \dfrac{u(e)}{I}$ (cas 1). Donc

$$u(X) = \sqrt{\left(\frac{u(e)}{I}\right)^2 + u(r)^2} = \frac{1}{I}\sqrt{u(e)^2 + u(r)^2 I^2}$$

avec $u(e) = 0{,}001\times e = 1{,}5\times10^{-3}\,\text{V}$ et $u(r) = 0{,}005\times r = 0{,}5\,\Omega$: $u(X) = \sqrt{0{,}35^2 + 0{,}5^2} \approx 0{,}6\,\Omega$.

$$\boxed{X = (249{,}6 \pm 0{,}6)\ \Omega}$$ ♥

Pont de Wheatstone



Q5) Le générateur idéal impose $V_A - V_C = e$ (la flèche de tension pointe vers A, la borne de plus haut potentiel). Comme $V_C = 0$:

$$\boxed{V_A = e}$$ ♥

Dans la branche BD, le microampèremètre a une résistance négligeable : seule r compte. Loi d'Ohm (convention récepteur, I orienté de B vers D, donc de B vers le potentiel V_D) :

$$\boxed{I = \frac{V_B - V_D}{r}}$$ ♥

Méthode : loi d'Ohm en termes de potentiels

Pour une résistance R entre deux points M et N, le courant orienté **de** M **vers** N vaut $i_{M\to N} = \dfrac{V_M - V_N}{R}$ (le courant « descend » les potentiels). Il suffit alors d'écrire la loi des nœuds en remplaçant chaque intensité par cette expression.

Q6) On oriente les courants comme sur le schéma ci-dessus (i_1 de A vers B, i_2 de B vers C, i_3 de A vers D, i_4 de D vers C, I de B vers D).

Nœud B : le courant entrant i_1 est égal à la somme des courants sortants i_2 et I : $i_1 = i_2 + I$. Avec la loi d'Ohm :

$$i_1 = \frac{V_A - V_B}{R_V} = \frac{e - V_B}{R_V}, \qquad i_2 = \frac{V_B - V_C}{R_2} = \frac{V_B}{R_2}, \qquad I = \frac{V_B - V_D}{r}$$

$$\boxed{\frac{e - V_B}{R_V} = \frac{V_B}{R_2} + \frac{V_B - V_D}{r}}$$ ♥

Nœud D : les courants entrants i_3 et I ressortent par i_4 : $i_3 + I = i_4$, avec

$$i_3 = \frac{V_A - V_D}{X} = \frac{e - V_D}{X}, \qquad i_4 = \frac{V_D - V_C}{R_1} = \frac{V_D}{R_1}$$

$$\boxed{\frac{e - V_D}{X} + \frac{V_B - V_D}{r} = \frac{V_D}{R_1}}$$ ♥

Q7) Au nœud B : on développe $\dfrac{e}{R_V} - \dfrac{V_B}{R_V} = \dfrac{V_B}{R_2} + \dfrac{V_B}{r} - \dfrac{V_D}{r}$, puis on regroupe les termes en V_B à gauche :

$$V_B\left(\frac{1}{R_V} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{r}\right) = \frac{e}{R_V} + \frac{V_D}{r} \qquad (1)$$

Au nœud D : $\dfrac{e}{X} - \dfrac{V_D}{X} + \dfrac{V_B}{r} - \dfrac{V_D}{r} = \dfrac{V_D}{R_1}$, d'où

$$V_D\left(\frac{1}{X} + \frac{1}{R_1} + \frac{1}{r}\right) = \frac{e}{X} + \frac{V_B}{r} \qquad (2)$$

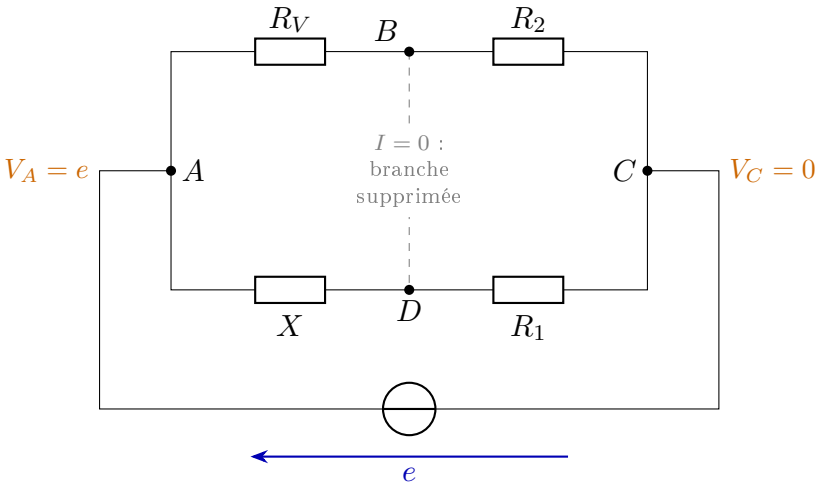
Remarque

Ces relations sont une forme du *théorème de Millman* : le potentiel d'un nœud est la moyenne des potentiels des nœuds voisins, pondérée par les conductances $1/R$ des branches.

Q8) D'après Q5, $I = 0$ impose $V_B - V_D = rI = 0$:

$$\boxed{V_B = V_D} \heartsuit$$

La branche BD ne transporte aucun courant : on peut la supprimer du schéma.



Dans la relation (1), les termes $\dfrac{V_B}{r}$ et $\dfrac{V_D}{r}$ se compensent (car $V_B = V_D$) : $V_B\left(\dfrac{1}{R_V} + \dfrac{1}{R_2}\right) = \dfrac{e}{R_V}$, soit $V_B\,\dfrac{R_2 + R_V}{R_V R_2} = \dfrac{e}{R_V}$:

$$\boxed{V_B = \frac{R_2}{R_V + R_2}\,e} \heartsuit$$

De même avec (2) : $V_D\left(\dfrac{1}{X} + \dfrac{1}{R_1}\right) = \dfrac{e}{X}$:

$$\boxed{V_D = \frac{R_1}{X + R_1}\,e} \heartsuit$$

Remarque

On reconnaît la formule du **pont diviseur de tension** : quand $I = 0$, R_V et R_2 sont en série entre A et C, et $V_B - V_C$ est la fraction $\frac{R_2}{R_V + R_2}$ de e (de même pour la branche ADC).

Q9) Le pont est équilibré, donc $V_B = V_D$:

$$\frac{R_2}{R_V + R_2}\,e = \frac{R_1}{X + R_1}\,e \iff R_2\,(X + R_1) = R_1\,(R_V + R_2) \iff R_2 X + \cancel{R_1 R_2} = R_1 R_V + \cancel{R_1 R_2}$$

$$\boxed{X = \frac{R_1\, R_V}{R_2}} \heartsuit$$

Ce résultat ne dépend ni de e, ni de r, ni de la résistance du microampèremètre : on n'a besoin que de résistances étalons et d'un détecteur de courant nul.

Q10) A.N. $X = \dfrac{100 \times 2520}{1000} = 252{,}0\,\Omega$.

X est un produit/quotient (cas 3 de l'annexe, généralisé à trois grandeurs) :

$$\frac{u(X)}{X} = \sqrt{\left(\frac{u(R_V)}{R_V}\right)^2 + \left(\frac{u(R_1)}{R_1}\right)^2 + \left(\frac{u(R_2)}{R_2}\right)^2} = \sqrt{3 \times 0{,}005^2} = \sqrt{3} \times 0{,}005 \approx 8{,}7 \times 10^{-3}$$

d'où $u(X) \approx 252 \times 8{,}7 \times 10^{-3} \approx 2\,\Omega$:

$$\boxed{X = (252 \pm 2)\ \Omega} \heartsuit$$

Comparaison. Avec ces données, l'incertitude est plus grande avec le pont ($2\,\Omega$, soit $0{,}9\,\%$) qu'avec la première méthode ($0{,}6\,\Omega$, soit $0{,}24\,\%$) : elle est limitée par la précision des résistances étalons ($0{,}5\,\%$). En revanche, le pont ne dépend ni de e ni d'un appareil de mesure étalonné (on détecte seulement un courant nul), et il permet de mesurer une grande gamme de résistances, notamment des résistances très faibles. Avec des étalons à $0{,}1\,\%$, il deviendrait plus précis.

Les deux résultats sont compatibles : l'écart normalisé vaut $\dfrac{|252{,}0 - 249{,}6|}{\sqrt{2^2 + 0{,}6^2}} \approx 1{,}1 < 2$.