CHAPITRE 09 : OSCILLATEURS AMORTIS

I Définition mathématique et forme des solutions

Dans ce chapitre, on introduit un modèle physique appelé l'oscillateur amorti

I.1) Définition :

On appelle oscillateur amorti un système physique décrit par une grandeur x dépendant du temps et vérifiant une équation différentielle de la forme :

(1)

- **f(t) est une fonction du temps. (Elle sera constante ou nulle dans ce chapitre) elle n'est pas homogène à x mais [f(t)]=**
- ω_0 **est** une constante réelle positive qui est appelée **pulsation propre de l'oscillateur amorti** et qui s'exprime en
- Q est une constante réelle positive appelé

I.2) Résolution de l'équation différentielle associée à un oscillateur amorti

a) Solutions générales d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants

on considère le cas général d'une équation différentielle homogène :

$$a\ddot{x}+b\dot{x}+c\,x(t)=0$$ **avec a,b et c des réels non nuls (dans ce chapitre)**

Rmq Si a,b,c sont tous **strictement positifs** (ou tous **strictement négatifs**)

On peut l'écrire sous la forme canonique

Expression de ω_0 et Q en fonction de a,b,c :

$\ddot{x}+\frac{b}{a}\dot{x}+\frac{c}{a}x(t)=0$ par identification

Application directe :

Écrire l'équation différentielle ci-dessus sous forme canonique et donner la valeur de Q et ω_0.

$$3\ddot{x}+2\dot{x}+x(t)=0$$

Par analogie avec le cas de l'équation du premier ordre, on peut chercher des solutions de la forme x(t) = exp(rt) où r est une constante. D'après les propriétés de l'exponentielle :

$$\dot{x}(t)=r\,e^{rt}=r\,x(t) \quad \text{et} \quad \ddot{x}(t)=$$

en injectant dans l'équation différentielle sous forme canonique :

$$a\ddot{x}(t)+b\dot{x}(t)+c\,x(t)=0 \Rightarrow ar^2x(t)+br\,x(t)+c\,x(t)=0 \Rightarrow (ar^2+br+c)\,x(t)=0$$

Comme x(t) >0 il faut

C'est une équation polynomiale du second degré d'inconnue r

- Rmq **voc** **$ar^2 + br + c = 0$** est appelée

$ar^2 + br + c$ est appelé polynôme caractéristique de l'équation différentielle

(il ne faut pas confondre l'équation différentielle et l'équation caractéristique)

- Rmq 2: Si l'équation différentielle est sous forme canonique, l'équation caractéristique est sous la forme :

- La résolution de l'équation caractéristique dépend du signe de son **discriminant** :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

sous forme canonique

Il y a 3 cas à envisager

i) cas où $\Delta > 0$
(cela correspond à)

Rmq **(vocabulaire)** : On parle de **régime**

le polynôme caractéristique possède **deux racines réelles** :

$$r_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad r_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Sous forme canonique

les solutions de l'équation de l'équation différentielle sont donc des combinaisons linéaires des deux solutions

$$x_{r1}(t) = e^{r_1 t} \quad \text{et} \quad x_{r2}(t) = e^{r_2 t}$$

si

- Application directe :
  Trouver la forme des solutions de l'équation différentielle $\ddot{x}(t) - 3\dot{x}(t) + x(t) = 0$

Équation caractéristique associée à l'équation différentielle :

Discriminant :

Racines du polynôme caractéristique :

Les solutions sont donc de la forme :

Remarque : comme les racines sont positives quand $t \to \infty$ $x_{r1}(t) = e^{r_1 t}$ et $x_{r2}(t) = e^{r_2 t}$ **divergent**
on dit que l'équation différentielle $\ddot{x}(t) - 3\dot{x}(t) + x(t) = 0$ **n'est pas stable**

Vocabulaire :

On sait que la fonction exp(rt) tend vers 0 pour t tendant vers l'infini si r < 0 et tend vers l'infini si r > 0

l'équation est stable si et seulement si les deux racines r_1 et r_2 sont négatives
on peut montrer que c'est le cas si et seulement

ii) cas où Δ=0 Rmq **(vocabulaire)** : On parle de **régime**

(cela correspond à)

Le polynôme caractéristique possède une racine réelle:

une solution $x_{r1}(t)=e^{r_1 t}$ mais on peut aussi montrer que $x_{r1}(t)=t\,e^{r_1 t}$ est aussi solution de l'équation différentielle

les solutions sont donc des combinaison linéaires de ces deux solutions :

- **Application directe :**
  trouver la forme des solutions de l'équation différentielle $\ddot{x}(t)+2\dot{x}(t)+x(t)=0$

Équation caractéristique associée à l'équation différentielle :
discriminant :
racine du polynôme caractéristique :
les solutions sont donc de la forme :

cette solution est stable

iii) cas où Δ<0 Rmq **(vocabulaire)** : On parle de **régime**

(cela correspond à)

Le polynôme caractéristique possède deux racines **complexes conjuguées**:

$$r_1=\frac{-b-i\sqrt{(-\Delta)}}{2a} \qquad r_2=\frac{-b+i\sqrt{(-\Delta)}}{2a}$$

on posant $\omega=\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$

on a alors $r_1=\frac{-b}{2a}-i\omega \qquad r_2=\frac{-b}{2a}+i\omega$

sous forme
canonique

$$x_{r_1}(t)=e^{r_1 t} \qquad x_{r_2}(t)=e^{r_2 t}$$ sont des solutions de l'équation différentielle

les solutions généra sont des combinaisons linéaires de $x_1(t)$ et $x_2(t)$:

$$x(t)=\lambda_1 e^{r_1 t}+\lambda_2 e^{r_2 t}$$

Remarque : Les grandeurs physiques sont en générale des grandeurs **réelles** (et pas complexes) On va donc chercher une forme des solutions qui permettra de mieux faire ressortir le caractère
on peut construire par combinaison linéaire de x_{r1} et x_{r2} d'autres solutions de l'eq diff :

$$x_1(t)=\frac{1}{2}\left(e^{r_1 t}+e^{r_2 t}\right)=\frac{1}{2}\left(e^{\left(\frac{-b}{2a}-i\omega\right)t}+e^{\left(\frac{-b}{2a}+i\omega\right)t}\right)=e^{\frac{-b}{2a}t}\left(\frac{e^{-i\omega t}+e^{i\omega t}}{2}\right)=e^{-\frac{b}{2a}t}\cos(\omega t)$$

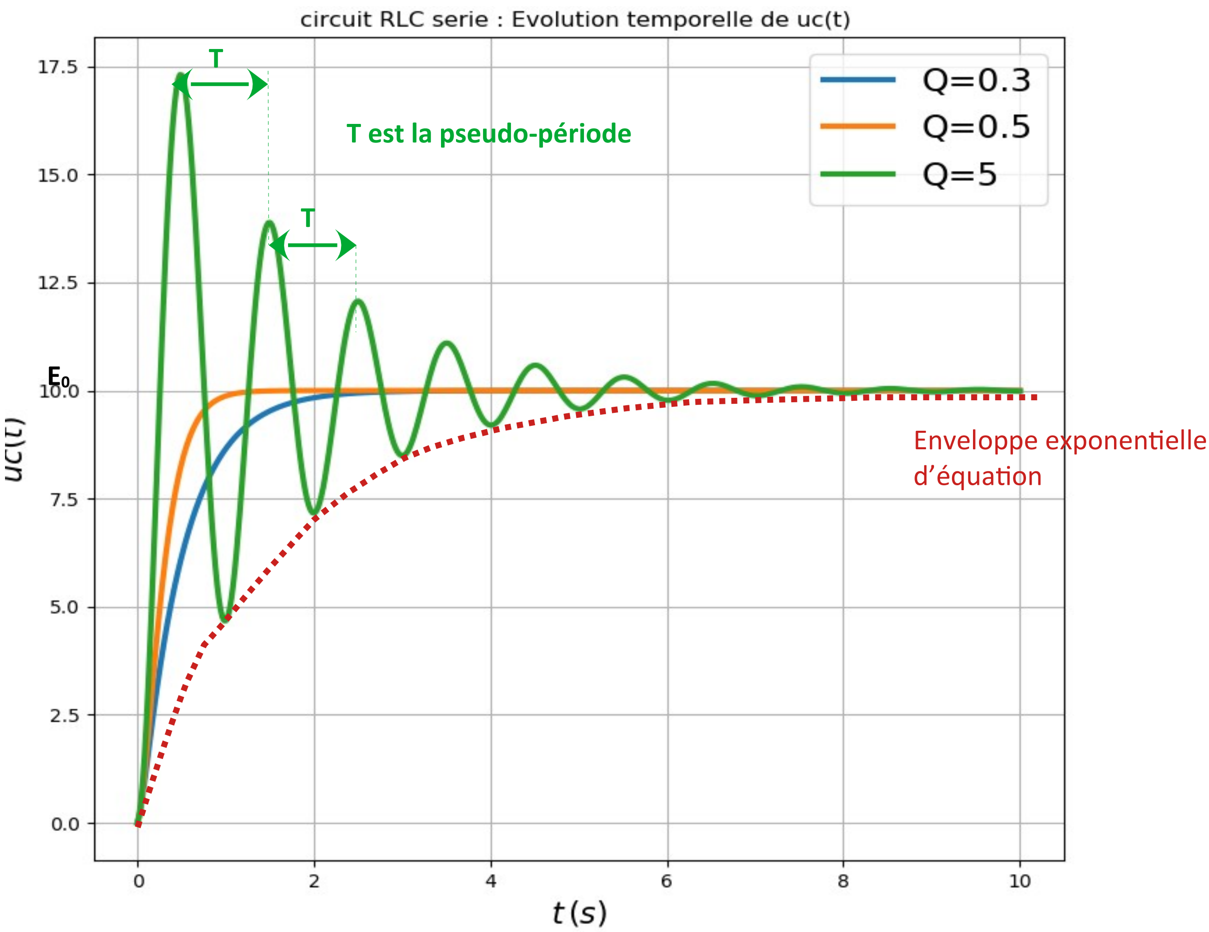
$$x_2(t)=\frac{1}{2i}\left(e^{r_1 t}-e^{r_2 t}\right)=\frac{1}{2i}\left(e^{\left(\frac{-b}{2a}-i\omega\right)t}-e^{\left(\frac{-b}{2a}+i\omega\right)t}\right)=e^{\frac{-b}{2a}t}\left(\frac{e^{-i\omega t}+e^{i\omega t}}{2i}\right)=e^{-\frac{b}{2a}t}\sin(\omega t)$$

Les solutions générales peuvent donc aussi se mettre sous la forme de combinaison linéaire de $x_1(t)$ et $x_2(t)$:

Forme canonique des solutions :

ANNEXE : CIRCUIT RLC SÉRIE

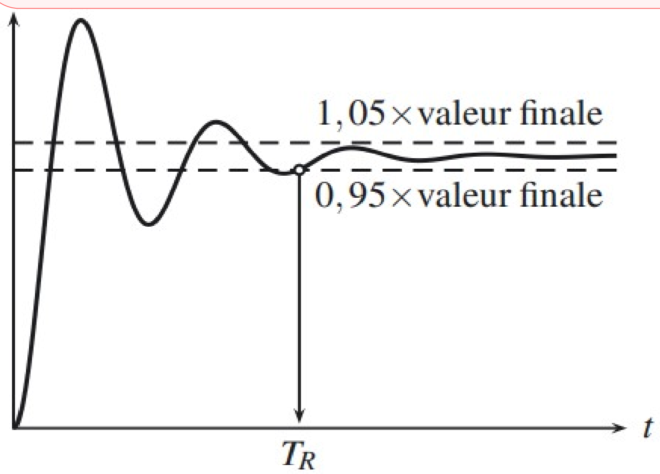
a) Représentations temporelles des solutions selon la valeur de Q pour une réponse indicielle

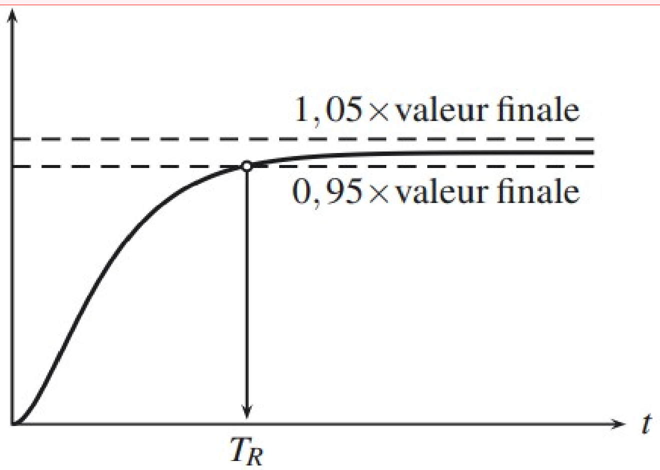


II.4) temps de réponse à 5 %

a) Définition

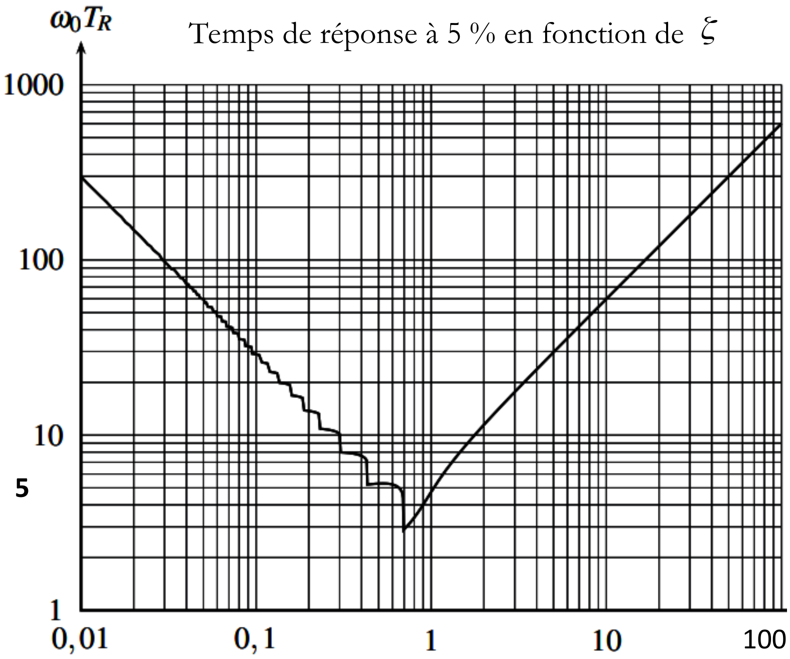
Ce temps de réponse à 5%, noté T_R, est la durée au bout de laquelle le système atteint sa valeur finale à moins de 5%, lors d'un essai indiciel (réponse à un échelon de hauteur E_0). Le signal reste alors compris entre 0,95 et 1,05 fois la valeur finale



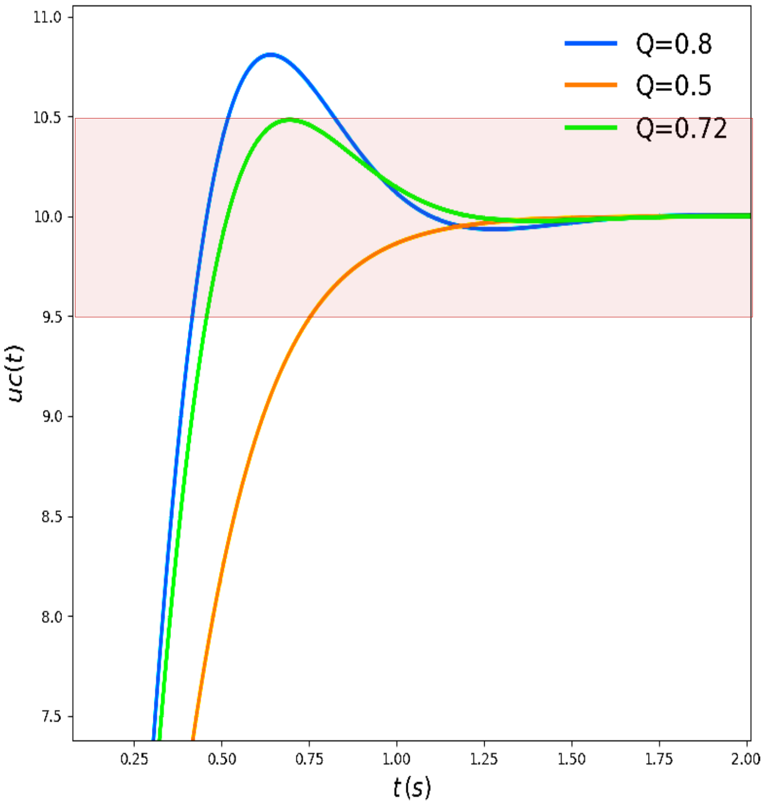


Temps de réponse en régime critique.

Temps de réponse à 5 % en fonction de ζ



Circuit RLC série : évolution de $u_c(t)$

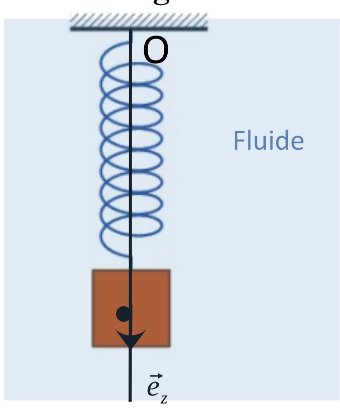


III Le système masse-ressort avec frottements fluides : un oscillateur amorti mécanique

III.1 définition du système étudié

On considère dans ce paragraphe un mobile de masse m qui se déplace dans un fluide le long d'un axe vertical

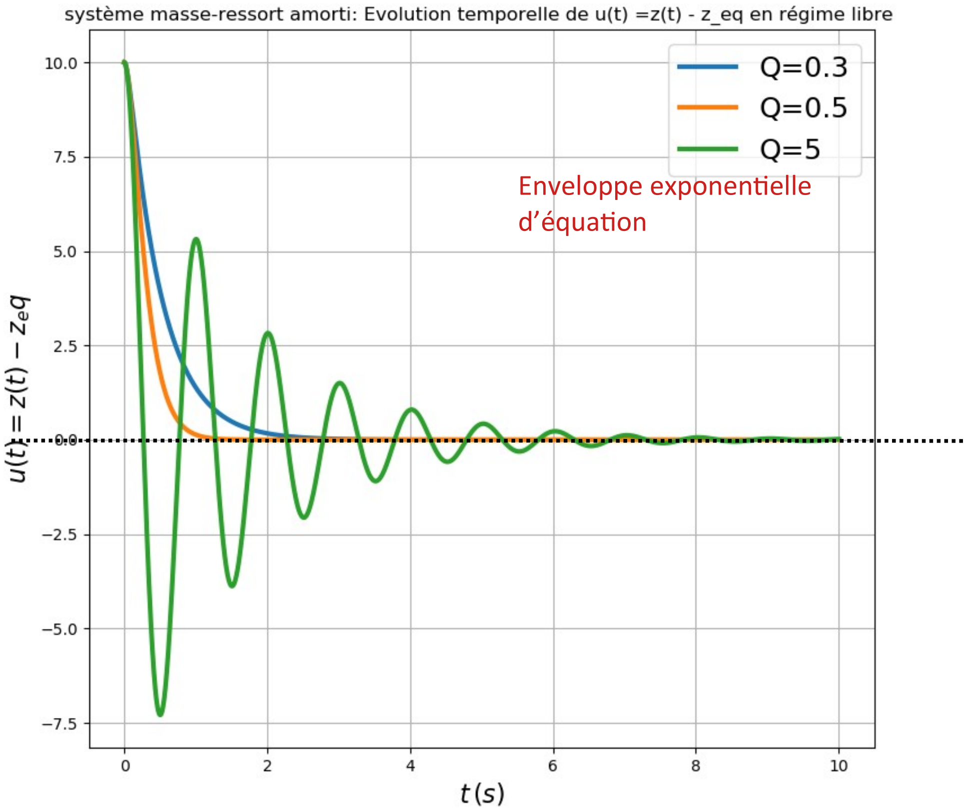
on lâche sans vitesse initiale le mobile en l'écartant de sa position d'équilibre



b) hypothèses simplificatrices et modélisation:

- On modélise le mobile par **un point matériel M tel que OM(t) =z(t)**
- **On suppose que le mouvement s'effectue seulement selon l'axe passant par $\vec{e}_z$ G et dirigé par (mouvement à une dimension : 1D)**
- **On néglige la masse du ressort devant celle du mobile m_r <<m**
- On suppose que le ressort possède un **comportement linéaire** lorsqu'il subit une contrainte il exerce une force $\vec{F}=-k(z(t)-l_0)\vec{e}_z$ sur le mobile
- On suppose que le fluide dans lequel se déplace le mobile exerce une force sur ce dernier proportionnelle à la vitesse du mobile

b) Évolution temporelle en régime libre pour différents Q



Remarque, plus le fluide est visqueux plus λ est important et plus le facteur de qualité est faible
On appelle aussi les frottements fluides des frottements visqueux

Analyse énergétique

III.5) Analogies électro-mécaniques

	circuit *RLC* série	oscillateur mécanique
signal signal dérivé	$q(t) = Cu_C(t)$ $i(t)$	
paramètres	C L R	
pulsation propre ω_0 facteur d'amortissement ξ facteur de qualité Q	$\frac{1}{\sqrt{LC}}$ $\frac{1}{2}R\sqrt{\frac{C}{L}}$ $\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$	
énergie électrique/potentielle énergie magnétique/cinétique	$\frac{1}{2}Cu_C^2 = \frac{q^2}{2C}$ $\frac{1}{2}Li^2$	