

PROGRAMME DE COLLES N° 9

Semaine du 25/11/2024 au 29/11/2024

👉 *Fonctions numériques de la variable réelle* 👈

Format de la colle :

- Automatismes de calcul (env. 10 min) : quelques items simples parmi les thèmes de la liste (actualisée chaque semaine) en page 2.
- Restitution du cours (env. 15 min) : définition et/ou théorème des chapitres au programme, puis démonstrations, exemples ou exercices exigibles listés plus bas.
- Exercice(s) libre(s) (env 30 min).

— Chapitre 7 : Fonctions numériques de la variable réelle —

Les dérivées des fonctions trigonométriques réciproques ont été vues.

1 Définition, généralités	2.2 Dérivées usuelles, opérations
1.1 Fonction numérique de la variable réelle . .	2.3 Lien avec la monotonie
1.2 Courbe d'une fonction réelle de la variable réelle	2.4 Dérivées d'ordre supérieur
1.3 Parité, imparité, la bijection réciproque d'une bijection impaire est impaire	3 Convexité : définition par les cordes, caractérisations pour les fonctions dérivables, deux fois dérivables, par les tangentes
1.4 Périodicité	4 Notion de continuité
1.5 Fonctions majorées, minorées, bornées, extrema	4.1 Définition, exemples
1.6 Monotonie, cas de la réciproque d'une bijection monotone	4.2 Théorèmes des valeurs intermédiaires
2 Dérivation	4.3 Bijections continues, bijections dérivables
2.1 Taux d'accroissement et nombre dérivé	5.7 Trigonométrie réciproque

Démonstrations, exemples ou exercices exigibles comme questions de cours

- Exemple 2.7 et Proposition 4.(vi). Si $f : X \rightarrow Y$ avec $X, Y \subset \mathbb{R}$ est une fonction impaire et bijective alors f^{-1} est impaire.
Si f est bijective et strictement monotone, alors f^{-1} aussi de même sens de variations que f .
- Proposition 11 : dérivée de e^u pour $u : X \rightarrow \mathbb{C}$ dérivable.
- Dérivabilité et dérivée de \ln , Arccos , Arcsin et étude de leur concavité/convexité.

Automatismes de calcul

On donne quelques exemples de capacité attendue pour chaque thème.

[Le cahier de calcul](#) fournit également une excellente source d'entraînement/inspiration.

- **Logique, raisonnement**

Exemples : montrer que $x^2 + y^2 \geq 2xy$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, savoir écrire en langage symbolique qu'une suite est majorée, qu'une fonction est 2π -périodique et savoir nier ces assertions.

- **Trigonométrie.**

Exemples : formule $\cos(2a)$, résolution de $\sin a = \sin b$, $\cos(2x + 1) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos x = \sin x$.

- **Inégalités : résoudre/prouver des inégalités simples**

Exemples : résoudre $x|x| \leq 3x + 2$, montrer que $|\sin(nx)| \leq n|\sin x|$ pour tous $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$, encadrer rapidement $x \mapsto \frac{\cos x + 2}{x^2 + 4}$ sur $[0; 1]$.

- **Calcul élémentaire de nombres complexes** (module, argument, linéarisation, angle moitié, racines carrées, n -ièmes).

Exemples : calculer la forme exponentielle de $\sqrt{3} - 3i$, les racines carrées de $3 - 4i$, linéarisation de $\cos^3 x$, résolution de $z^n = 1$ dans \mathbb{C} .

- **Calcul algébrique** (fractions, simplification d'expressions, sommes et produits usuels, coefficients binomiaux, formule du binôme, etc).

Exemples : donner la formule pour $\sum_{k=1}^n q^k$, calculer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k$, écrire $\prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k+1}$ avec des factorielles.

- **Définition, dérivée d'une fonction usuelle.**

Exemples : définir Arctan , simplifier $\text{Arccos}(\cos(7))$, théorème de dérivation de $g \circ f$, dérivée de $x \mapsto f(-x)$, ensemble de définition, de dérivabilité et dérivée de $x \mapsto \text{Arccos}\left(\frac{x}{x+1}\right)$.