CHAPITRE 09 : OSCILLATEURS AMORTIS

I Définition mathématique et forme des solutions

Dans ce chapitre, on introduit un modèle physique appelé l'oscillateur amorti

I.1) Définition :

On appelle oscillateur amorti un système physique décrit par une grandeur x dépendant du temps et vérifiant une équation différentielle de la forme :

$$\ddot{x}(t)+\frac{\omega_0}{Q}\dot{x}(t)+\omega_0^2 x(t)=f(t) \qquad (1)$$

- **f(t) est une fonction du temps. (Elle sera constante ou nulle dans ce chapitre) elle n'est pas homogène à x mais [f(t)]= [X] T^{-2}**
- ω_0 **est** une constante réelle positive qui est appelée **pulsation propre de l'oscillateur amorti** et qui s'exprime en **$rad.s^{-1}$**.
- Q est une constante réelle positive appelé **facteur de qualité** de l'oscillateur amorti (sans dimension)

I.2) Résolution de l'équation différentielle associée à un oscillateur amorti

a) solutions générales d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants

on considère le cas général d'une équation différentielle homogène :

$$a\ddot{x}+b\dot{x}+c\,x(t)=0$$ **avec a,b et c des réels non nuls (dans ce chapitre)**

Rmq Si a,b,c sont tous **strictement positifs** (ou tous **strictement négatifs**)

On peut l'écrire sous la forme canonique $\boxed{\ddot{x}(t)+\frac{\omega_0}{Q}\dot{x}(t)+\omega_0^2 x(t)=0}$

Expression de ω_0 et Q en fonction de a,b,c :

$\ddot{x}+\frac{b}{a}\dot{x}+\frac{c}{a}x(t)=0$ par identification $\omega_0^2=\frac{c}{a}$ et $\frac{\omega_0}{Q}=\frac{b}{a}\Rightarrow Q=\frac{a}{b}\omega_0=\frac{1}{b}\sqrt{ac}$

Application directe :

Écrire l'équation différentielle ci-dessus sous forme canonique et donner la valeur de Q et ω_0.

$$3\ddot{x}+2\dot{x}+x(t)=0$$

$\ddot{x}+\frac{2}{3}\dot{x}+\frac{1}{3}x(t)=0$ par identification $\omega_0^2=\frac{1}{3}\Rightarrow\omega_0=\frac{1}{\sqrt{3}}$ et $Q=\frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{2}$

Par analogie avec le cas de l'équation du premier ordre, on peut chercher des solutions de la forme x(t) = exp(rt) où r est une constante. D'après les propriétés de l'exponentielle :

$$\dot{x}(t)=r\,e^{rt}=r\,x(t) \quad \text{et} \quad \ddot{x}(t)=r^2e^{rt}=r\,\dot{x}(t)=r^2x(t)$$

en injectant dans l'équation différentielle sous forme canonique :

$$a\ddot{x}(t)+b\dot{x}(t)+c\,x(t)=0 \Rightarrow ar^2x(t)+br\,x(t)+c\,x(t)=0\Rightarrow(ar^2+br+c)\,x(t)=0$$

Comme x(t) n'est pas la fonction nulle il faut $ar^2 + br + c = 0$.
C'est une équation polynomiale du second degré d'inconnue r

- Rmq **voc** $ar^2 + br + c = 0$ est appelée **équation caractéristique associée à l'équation différentielle**
  $ar^2 + br + c$ est appelé polynôme caractéristique de l'équation différentielle
  (il ne faut pas confondre l'équation différentielle et l'équation caractéristique)

- Rmq 2: Si l'équation différentielle est sous forme canonique, l'équation caractéristique est sous la forme :

$$r^2+\frac{\omega_0}{Q}r+\omega_0^2=0$$

- La résolution de l'équation caractéristique dépend du signe de son **discriminant** :

$$\Delta=b^2-4ac$$

sous forme canonique $\Delta=\frac{\omega_0^2}{Q^2}-4\omega_0^2=\omega_0^2\left(\frac{1-4Q^2}{Q^2}\right)$

Il y a 3 cas à envisager

i) cas où $\Delta>0$ Rmq **(vocabulaire)** : On parle de **régime apériodique** ❤

(cela correspond à $Q<\frac{1}{2}$)

le polynôme caractéristique possède **deux racines réelles** :

$$r_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad r_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$$

Sous forme canonique $r_1=\frac{-\omega_0}{2Q}-\frac{\omega_0}{2}\sqrt{\frac{1-4Q^2}{Q^2}}$ et $r_2=\frac{-\omega_0}{2Q}+\frac{\omega_0}{2}\sqrt{\frac{1-4Q^2}{Q^2}}$

les solutions de l'équation de l'équation différentielle sont donc des combinaisons linéaires des deux solutions

$$x_{r1}(t)=e^{r_1 t} \quad \text{et} \quad x_{r2}(t)=e^{r_2 t}$$

soit $x(t)=\lambda_1 e^{r_1 t}+\lambda_2 e^{r_2 t}$ ❤ $\Delta>0$

- Application directe :
  Trouver la forme des solutions de l'équation différentielle $\ddot{x}(t)-3\dot{x}(t)+x(t)=0$

Équation caractéristique associée à l'équation différentielle : $r^2-3r+1=0$

Discriminant : $\Delta=b^2-4ac=9-4=5$

Racines du polynôme caractéristique : $r_1=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$ et $r_2=\frac{3+\sqrt{5}}{2}$

les solutions sont donc de la forme :

$$x(t)=\lambda_1 e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}t}+\lambda_2 e^{\frac{3+\sqrt{5}}{2}t}$$

Remarque : comme les racines sont positives quand $t \to \infty$ $x_{r1}(t)=e^{r_1 t}$ et $x_{r2}(t)=e^{r_2 t}$ **divergent**
on dit que l'équation différentielle $\ddot{x}(t)-3\dot{x}(t)+x(t)=0$ **n'est pas stable**

Vocabulaire :
Une équation différentielle est dite stable si les solutions de l'équation différentielle homogène associée tendent toutes vers 0 pour t tendant vers l'infini

On sait que la fonction exp(rt) tend vers 0 pour t tendant vers l'infini si r < 0 et tend vers l'infini si r > 0
l'équation est stable si et seulement si les deux racines r_1 et r_2 sont négatives
on peut montrer que c'est le cas si et seulement si a,b et c sont de même signe

ii) cas où Δ=0 Rmq **(vocabulaire)** : On parle de **régime critique**

(cela correspond à $Q=\frac{1}{2}$)

Le polynôme caractéristique possède une racine réelle: $r_1=-\frac{b}{2a}=\frac{-\omega_0}{2Q}\overset{Q=1/2}{=}-\omega_0$

une solution $x_{r1}(t)=e^{r_1 t}$ mais on peut aussi montrer que $x_{r1}(t)=t\,e^{r_1 t}$ est aussi solution de l'équation différentielle

les solutions sont donc des combinaison linéaires de ces deux solutions :

$$x(t)=\lambda_1 e^{r_1 t}+t\lambda_2 e^{r_1 t}=(\lambda_1+t\lambda_2)e^{r_1 t}$$

Δ=0

- **Application directe :**

  trouver la forme des solutions de l'équation différentielle $\ddot{x}(t)+2\dot{x}(t)+x(t)=0$

Équation caractéristique associée à l'équation différentielle : $r^2+2r+1=0$

discriminant : $\Delta=b^2-4ac=4-4=0$

racine du polynôme caractéristique : $r_1=\frac{-2}{2}=-1$

les solutions sont donc de la forme :

$$x(t)=\lambda_1 e^{-t}+t\lambda_2 e^{-t}$$ *cette solution est stable*

iii) cas où Δ<0 Rmq **(vocabulaire)** : On parle de **régime pseudopériodique**

(cela correspond à $Q>\frac{1}{2}$)

Le polynôme caractéristique possède deux racines **complexes conjuguées**:

$$r_1=\frac{-b-i\sqrt{(-\Delta)}}{2a} \qquad r_2=\frac{-b+i\sqrt{(-\Delta)}}{2a}$$

on posant $\omega=\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$

on a alors $r_1=\frac{-b}{2a}-i\omega$ $r_2=\frac{-b}{2a}+i\omega$

sous forme canonique $r_1=\frac{-\omega_0}{2Q}-i\omega$ $r_2=\frac{-\omega_0}{2Q}+i\omega$ avec $\omega=\omega_0\sqrt{\left(\frac{4Q^2-1}{4Q^2}\right)}=\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}$

$x_{r_1}(t)=e^{r_1 t}$ $x_{r_2}(t)=e^{r_2 t}$ sont des solutions de l'équation différentielle

les solutions généra sont des combinaisons linéaires de $x_1(t)$ et $x_2(t)$:

$$x(t)=\lambda_1 e^{r_1 t}+\lambda_2 e^{r_2 t}$$

Remarque : Les grandeurs physiques sont en générale des grandeurs **réelles** (et pas complexes) On va donc chercher une forme des solutions qui permettra de mieux faire ressortir le caractère

on peut construire par combinaison linéaire de x_{r1} et x_{r2} d'autres solutions de l'eq diff :

$$x_1(t)=\frac{1}{2}\left(e^{r_1 t}+e^{r_2 t}\right)=\frac{1}{2}\left(e^{\left(\frac{-b}{2a}-i\omega\right)t}+e^{\left(\frac{-b}{2a}+i\omega\right)t}\right)=e^{\frac{-b}{2a}t}\left(\frac{e^{-i\omega t}+e^{i\omega t}}{2}\right)=e^{-\frac{b}{2a}t}\cos(\omega t)$$

$$x_2(t)=\frac{1}{2i}\left(e^{r_1 t}-e^{r_2 t}\right)=\frac{1}{2i}\left(e^{\left(\frac{-b}{2a}-i\omega\right)t}-e^{\left(\frac{-b}{2a}+i\omega\right)t}\right)=e^{\frac{-b}{2a}t}\left(\frac{e^{-i\omega t}+e^{i\omega t}}{2i}\right)=e^{-\frac{b}{2a}t}\sin(\omega t)$$

Les solutions générales peuvent donc aussi se mettre sous la forme de combinaison linéaire de $x_1(t)$ et $x_2(t)$:

$$x(t)=e^{\frac{-b}{2a}t}\left(A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t)\right) \quad \text{avec} \quad \omega=\frac{\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Forme canonique des solutions :

Δ<0

$$x(t)=e^{\frac{-\omega_0}{2Q}t}\left(A\cos\left(\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}\,t\right)+B\sin\left(\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}\,t\right)\right)$$

- **Application directe**

Trouver la forme générale des solutions de l'équation différentielle suivante
$2\ddot{x}(t)+4\dot{x}(t)+10x(t)=0$
on peut mettre l'équation sous la forme $\ddot{x}(t)+2\dot{x}(t)+5x(t)=0$
Équation caractéristique associée à l'équation différentielle : $r^2+2r+5=0$
discriminant : $\Delta=b^2-4ac=2^2-4\cdot 5=-16$
racines du polynôme caractéristique : $r_1=\frac{-2}{2}+i\frac{\sqrt{16}}{2}$ et $r_2=\frac{-2}{2}-i\frac{\sqrt{16}}{2}$
$r_1=-1+2i$ $r_2=-1-2i$
les solutions sont donc de la forme :

$$x(t)=e^{-1t}(A\cos(2t)+B\sin(2t))$$

Remarque comme exp(-t) tend vers 0 en +∞ la solution est stable

b) cas d'une équation avec second membre

Les solutions sont de la forme $x(t) = x_H(t) + x_P(t)$

- si le second membre n'est pas constant la solution particulière n'est pas simple à trouver
nous verrons cela dans les prochains chapitres

- si le second membre est constant $\ddot{x}(t)+\frac{\omega_0}{Q}\dot{x}(t)+\omega_0^2x(t)=K$

pour assurer l'homogénéité on peut écrire $\ddot{x}(t)+\frac{\omega_0}{Q}\dot{x}(t)+\omega_0^2x(t)=\omega_0^2x_p$

en régime peusdo-périodique les solutions seront de la forme :

$$x(t)=e^{\frac{-b}{2a}t}(A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t))+\frac{K}{\omega_0^2}$$

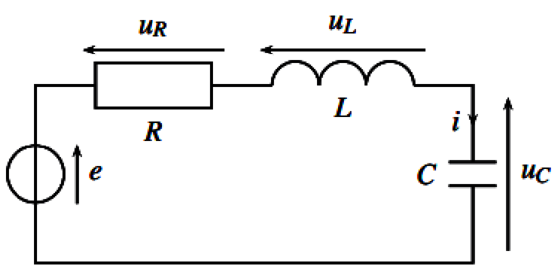
on trouve A et B en utilisant les conditions initiales

La résolution d'une équation différentielle du deuxième ordre requiert **deux conditions initiales :** la valeur du signal $\mathbf{x_0}$ et la valeur de sa dérivée à l'instant initial $\dot{x}_0$

II Le circuit RLC série : un oscillateur amorti électronique

II.1 définition du système étudié

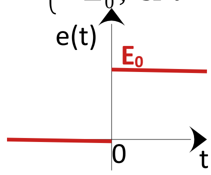
a) schéma électrique



b) signal délivré par le GBF

Échelon e(t)

$$\begin{cases} e(t)=0 \; si \; t<0, \\ E_0, \text{ si } t>0 \end{cases}$$

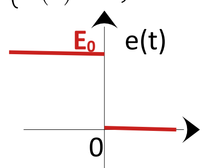


Condensateur déchargé à t=0

Les deux sont possible

Régime libre

$$\begin{cases} e(t)=E_0 \; si \; t<0, \\ e(t)=0, \text{ si } t>0 \end{cases}$$



Condensateur chargé à t=0

II.2) Équation vérifiée par $u_c(t)$ et forme des solutions

a) Équations diff

La loi des mailles impose : **e(t) = u_C (t) +u_L (t) +u_R (t).**

De plus, R, L et C sont traversés par le même courant d'intensité i(t) et sont en convention récepteur:

$$u_R = R\,i(t) \quad , \quad u_L = L\frac{di}{dt}(t) \quad \text{et} \quad i(t) = C\frac{du_c}{dt}$$

En remplaçant dans la loi des mailles pour t>0 : $E_0 = u_c(t) + LC\dfrac{d^2u_c}{dt^2} + RC\dfrac{du_c}{dt}$

Cette relation est une équation différentielle du deuxième ordre.

Sous forme canonique : $\dfrac{d^2u_c}{dt^2} + \dfrac{R}{L}\dfrac{du_c}{dt} + \dfrac{1}{LC}u_c(t) = \dfrac{E_0}{LC}$

elle est bien de la forme $\boldsymbol{\dfrac{d^2u_c}{dt^2} + \dfrac{\omega_0}{Q}\dfrac{du_c}{dt} + \omega_0^2 u_c(t) = \omega_0^2 E_0}$

Par identification $\omega_0^2 = \dfrac{1}{LC} \Rightarrow \boldsymbol{\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}}$ et $\dfrac{\omega_0}{Q} = \dfrac{R}{L} \Rightarrow \boldsymbol{Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}}$

Rmq 1 : plus R augmente plus le facteur de qualité est faible ce qui cohérent. De même pour C. plus L augmente , plus le facteur de qualité est important

Rmq2 : en TP il ne faut pas oublier la résistance interne du GBF et la résistance du bobinage de la bobine

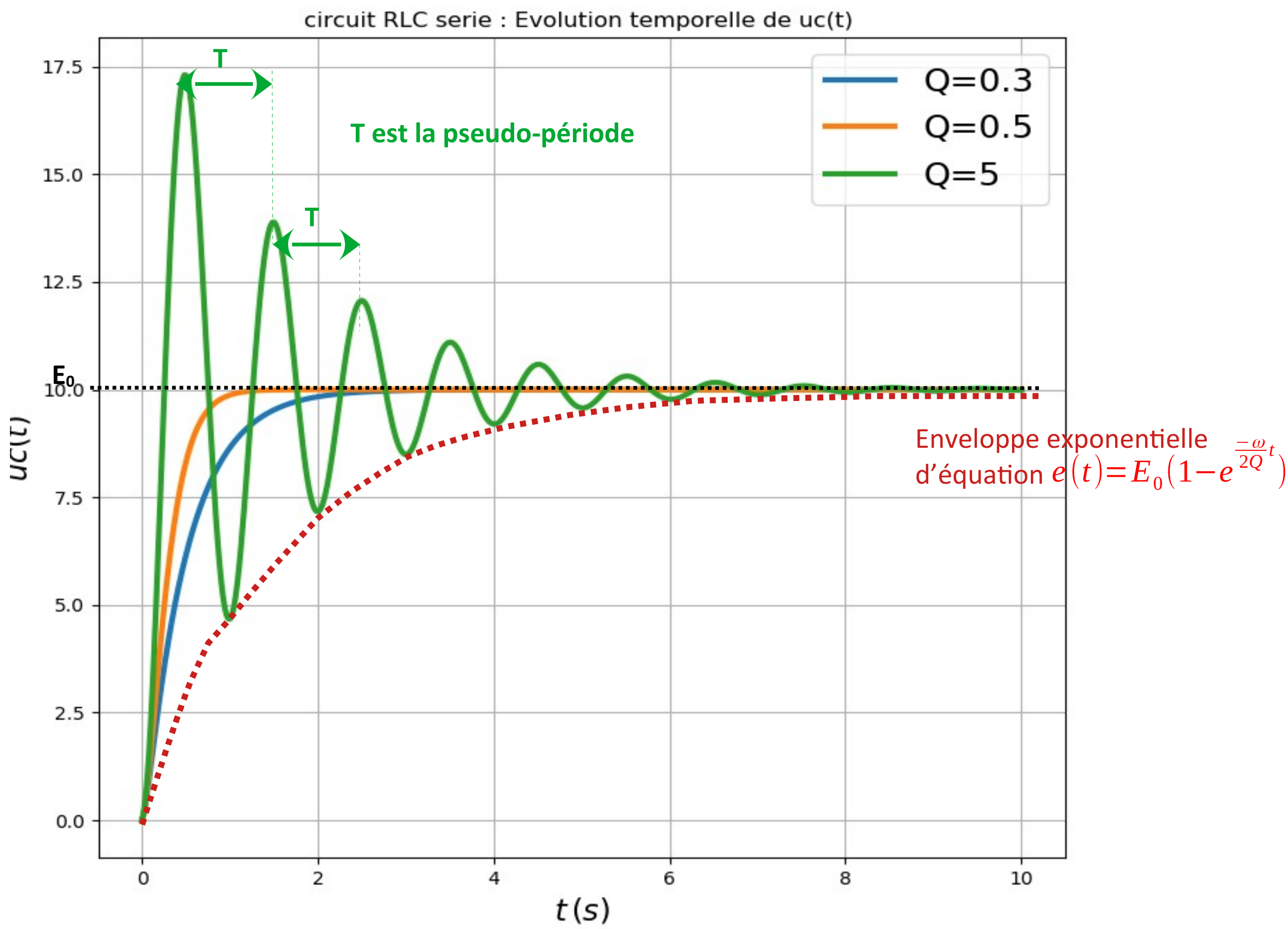
Remarque importante : on définit parfois un **facteur d'amortissement** ξ tel que $\boldsymbol{\xi = \dfrac{1}{2Q}}$

l'équation différentielle sous forme canonique lors d'une réponse indicielle peut aussi s'écrire

$$\boldsymbol{\frac{d^2u_c}{dt^2} + 2\xi\,\omega_0\frac{du_c}{dt} + \omega_0^2 u_c(t) = \omega_0^2 E_0}$$

régime critique si $\boldsymbol{\xi = 1}$ **apériodique si** $\boldsymbol{\xi > 1}$ **pseudo périodique si** $\boldsymbol{\xi < 1}$

b) Représentations temporelles des solutions selon la valeur de Q pour une réponse indicielle



Rmq 1 (voc) $\omega=\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}=\omega_0\sqrt{1-\xi^2}$ **est appelée pseudo-pulsation de l'oscillateur**

On peut déterminer graphiquement la pseudo-période $T=\dfrac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}=\dfrac{T_0}{\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}$

Rmq 2 :

- **on a toujours $T>T_0$ et quand $Q\rightarrow\infty$ la pseudo-période tend vers la période propre de l'oscillateur harmonique associée $T\approx T_0$**

animation

Rmq 3 : Plus un système est amorti (son facteur de qualité Q est petit) moins il oscille.
Un oscillateur de grand facteur de qualité oscille beaucoup avant de s'arrête

Expérimentalement on remarque que
Q ≈ nombre d'oscillations avant d'atteindre le régime stationnaire

II.3) Détermination de $u_c(t)$ pour la réponse à un échelon

a) Recherche des conditions initiales

Pour t < 0 le circuit n'a pas encore été alimenté donc toutes les grandeurs électriques, tensions et intensité, sont nulles

$u_c(0^-) = 0$
$i(0^-) = 0$

comme $u_C(t)$, tension aux bornes du condensateur, est une fonction continue :

$$u_c(0^+) = \boxed{u_C(0^-) = 0}$$

Les conditions initiales sont les mêmes peu importe le régime pour une réponse à un échelon

comme i(t), intensité traversant la bobine, est une fonction continue :

$$i(0^+) = i(0^-) = 0.$$

Or, d'après la loi du condensateur : i(t) = $C\dfrac{du_C}{dt}$. On a donc : $\boxed{\dfrac{du_C}{dt}(0^+)=0}$

Les solutions seront de la forme :

$u_c(t)=u_{C,H}(t)+u_{C,p}(t)$

avec $u_{C,p}(t)$ une solution particulière, ici $\boldsymbol{u_{C,p}(t)=E_0}$

et $u_{C,H}(t)$ la solution générale de l'équa diff homogène : $\boldsymbol{\frac{d^2u_{c,H}}{dt^2}+\frac{\omega_0}{Q}\frac{du_{c,H}}{dt}+\omega_0^2u_{c,H}(t)=0}$

b) Solution en régime apériodique

$Si\ \boldsymbol{Q<\frac{1}{2}}\Rightarrow\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}<\frac{1}{2}$ les racines du polynôme caractéristique sont positives :

(cela correspond à $\boldsymbol{\xi>1}$)

équation caractéristique :

$$\boldsymbol{r^2+\frac{\omega_0}{Q}r+\omega_0^2=0}$$

racines $\boldsymbol{r_1=\frac{-\omega_0}{2Q}(1+\sqrt{1-4Q^2})}$ et $\boldsymbol{r_2=\frac{-\omega_0}{2Q}(1-\sqrt{1-4Q^2})}$ **(les deux racines sont négatives)**

La solution générale de l'équation différentielle homogène est :

$$u_{C,H}(t)=\lambda_1 e^{\frac{-\omega_0}{2Q}(1+\sqrt{1-4Q^2})t}+\lambda_2 e^{\frac{-\omega_0}{2Q}(1-\sqrt{1-4Q^2})t}$$

finalement $$\boldsymbol{u_C(t)=\lambda_1 e^{\frac{-\omega_0}{2Q}(1+\sqrt{1-4Q^2})t}+\lambda_2 e^{\frac{-\omega_0}{2Q}(1-\sqrt{1-4Q^2})t}+E_0}$$

Solution unique vérifiant les conditions initiales

(⚠ à savoir retrouver mais absolument pas à apprendre par cœur !)

à t=0⁺ : $u_c(0^+)=0\Rightarrow\lambda_1+\lambda_2=-E_0$

$\boldsymbol{\frac{du_C(t)}{dt}=\lambda_1 r_1 e^{r_1t}+\lambda_2 r_2 e^{r_2t}}$ donc à t= 0^+ $\frac{du_c}{dt}(0^+)=\lambda_1 r_1+\lambda_2 r_2=0\Rightarrow\lambda_1=\frac{-r_2}{r_1}\lambda_2$

$\lambda_1+\lambda_2=-E_0 \quad\Rightarrow\quad (\frac{-r_2}{r_1}+1)\lambda_2=-E_0 \quad\Rightarrow\quad \frac{r_1-r_2}{r_1}\lambda_2=-E_0 \quad\Rightarrow\lambda_2=\frac{r_1}{r_2-r_1}E_0$

et comme $\lambda_1=\frac{-r_2}{r_1}\lambda_2\Rightarrow\lambda_1=\frac{r_2}{r_1-r_2}E_0$

(⚠ à savoir retrouver mais absolument pas à apprendre par cœur !

or $r_2-r_1=\frac{-\omega_0}{Q}\sqrt{1-4Q^2}$

Finalement : $$\boldsymbol{u_C(t)=\frac{-(1+\sqrt{1-4Q^2})}{2\sqrt{1-4Q^2}}e^{\frac{-\omega_0}{2Q}(1+\sqrt{1-4Q^2})t}+\frac{(1-\sqrt{1-4Q^2})}{2\sqrt{1-4Q^2}}e^{\frac{-\omega_0}{2Q}(1-\sqrt{1-4Q^2})t}+E_0}$$

Rmq : Même si pour Q< 1/2 la solution « ressemble » à celle qu'on obtient pour un circuit du RC du premier ordre, la présence de la bobine impose une intensité du courant nulle à t= 0^+ donc si on « zoom » sur l'origine, **la tangente à la courbe $u_c(t)$ en 0^+ est nulle pour le circuit RLC apériodique ce qui n'est pas le cas pour un circuit RC du premier ordre**

c) Solution en régime critique

$Si\ Q=\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}=\frac{1}{2}$ (cela correspond à $\xi=1$)

racine double du polynôme caractéristique : $r_1=\frac{-\omega_0}{2Q}=-\omega_0$

et la solution générale de l'équation différentielle homogène est :

$$u_{C,H}(t)=(\lambda_1+t\lambda_2)e^{-\omega_0 t}$$

finalement $u_C(t)=(\lambda_1+t\lambda_2)e^{-\omega_0 t}+E_0$

Solution unique vérifiant les conditions initiales

(⚠ à savoir retrouver mais absolument pas à apprendre par cœur !)

- $u_C(0)=0=E_0+\lambda_1$ donc : $\lambda_1=-E_0$;
- la dérivée de $u_C(t)$ par rapport à t est :

$$\frac{du_C}{dt}(t)=\lambda_2\exp(-\omega_0 t)+(\lambda_1+\lambda_2 t)(-\omega_0)\exp(-\omega_0 t),$$

ainsi :

$$\frac{du_C}{dt}(0)=\lambda_2-\omega_0\lambda_1,$$

d'où :

$$\lambda_2=-\omega_0 E_0.$$

$$u_c(t)=-E_0(1+\omega_0 t)e^{-\omega_0 t}+E_0$$

d) Solution en régime pseudo-périodique

$Si\ Q>\frac{1}{2}\ \Rightarrow\ \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}>\frac{1}{2}$ (cela correspond à $\xi<1$)

Racines du polynôme caractéristique :

Sous forme canonique $r_1=\frac{-\omega_0}{2Q}-i\omega$ $r_2=\frac{-\omega_0}{2Q}+i\omega$ avec $\omega=\omega_0\sqrt{(\frac{4Q^2-1}{4Q^2})}=\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}$

La solution générale de l'équation différentielle homogène est :

$$u_{C,H}(t)=e^{\frac{-\omega_0}{2Q}t}\left(A\cos(\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}t)+B\sin(\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}t)\right)$$

Ainsi

$$u_C(t)=e^{\frac{-\omega_0}{2Q}t}\left(A\cos(\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}t)+B\sin(\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}t)\right)+E_0$$

en fonction du facteur d'amortissement :

$$u_C(t)=e^{-\xi\omega_0 t}\left(A\cos(\omega_0\sqrt{1-\xi^2}t)+B\sin(\omega_0\sqrt{1-\xi^2}t)\right)+E_0$$

Solution unique vérifiant les conditions initiales
(⚠ à savoir retrouver mais absolument pas à apprendre par cœur !)

$u_c(0^+)=e^0(A)+E_0 \Rightarrow 0=A+E_0 \Rightarrow \mathbf{A=-E_0}$

de plus

$$\frac{du_c}{dt}=\frac{-\omega_0}{2Q}e^{\frac{-\omega_0}{2Q}t}\left(-E_0\cos\left(\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}t\right)+B\sin\left(\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}t\right)\right)+e^{\frac{-\omega_0}{2Q}t}\left(+E_0\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}\sin\left(\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}t\right)+B\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}\cos\left(\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}t\right)\right)$$

$$\frac{du_c}{dt}(0^+)=B\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}+\frac{\omega_0}{2Q}E_0\Rightarrow 0=B\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}+\frac{\omega_0}{2Q}E_0 \Rightarrow \mathbf{B=\frac{-E_0}{\sqrt{4Q^2-1}}}$$

finalement

$$u_C(t)=-E_0e^{\frac{-\omega_0}{2Q}t}\left(\cos\left(\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}t\right)+\frac{1}{\sqrt{4Q^2-1}}\sin\left(\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}t\right)\right)+E_0$$

En fonction du facteur d'amortissement

$$u_C(t)=-E_0e^{-\xi\omega_0 t}\left(\cos\left(\omega_0\sqrt{1-\xi^2}t\right)+\frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}}\sin\left(\omega_0\sqrt{1-\xi^2}t\right)\right)+E_0$$

Remarques

- **quand Q → ∞ on trouve retrouve** $u_c(t)=-E_0\cos(\omega_0 t)+E_0$

c'est cohérent car l'équation différentielle est alors celle d'un oscillateur harmonique, on s'attend à une solution sinusoïdale

- **l'amplitude des oscillations est « enveloppée » par des exponentielles de constante de temps 2Q/ ω_0. ($e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}$)**

Rmq : comme $i(t)=C\frac{du_c}{dt}$ **on a aussi**

II.4) Détermination de $u_c(t)$ pour la réponse en régime libre

e(t) =0 donc $\frac{d^2u_c}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{du_c}{dt}+\frac{1}{LC}u_c(t)=0$ **c'est l'équation homogène !**

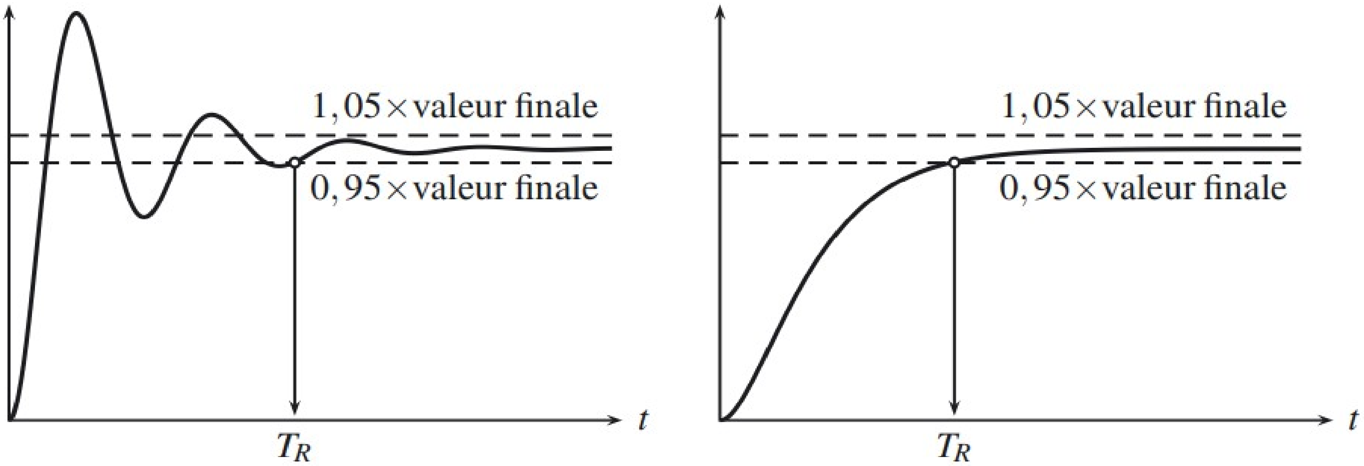
Par contre à t=0⁻ le régime permanent est atteint donc bobine est équivalent à un

$u_c(0^-)= E_0$

II.5) temps de réponse à 5 %

a) Définition

Ce temps de réponse à 5%, noté T_R, est la durée au bout de laquelle le système atteint sa valeur finale à moins de 5%, lors d'un essai indiciel (réponse à un échelon de hauteur E_0). Le signal reste alors compris entre 0,95 et 1,05 fois la valeur finale



C'est une définition arbitraire

b) Expressions approchées de T_R dans les différents régimes

Rappel Pour un système qui décroît de faon exponentielle avec un temps caractéristique τ, le temps de réponse à 5 % est donnée par $T_R = 3\tau$

En régime apériodique :

$u_C(t) = \lambda_1 e^{\frac{-\omega_0}{2Q}(1+\sqrt{1-4Q^2})t} + \lambda_2 e^{\frac{-\omega_0}{2Q}(1-\sqrt{1-4Q^2})t} + E_0$ soit $u_C(t) = \lambda_1 e^{\frac{-t}{\tau_1}} + \lambda_2 e^{\frac{-t}{\tau_2}} + E_0$

si **0<Q<<1 /2 en utilisant** $\sqrt{1-x} =_{x\to 0} 1-\frac{x}{2}+o(x)$ $e_1 = \frac{-\omega_0}{2Q}(1+\sqrt{1-4Q^2}) \approx \frac{-\omega_0}{2Q}(2-2Q^2)$

on a $(1+\sqrt{1-4Q^2}) \approx 2-2Q^2$ **et** $(1-\sqrt{1-4Q^2}) \approx 2Q^2$

ainsi $r_1 = \frac{-\omega_0}{2Q}(1+\sqrt{1-4Q^2}) \approx \frac{-\omega_0}{2Q}(2-2Q^2)$ et $r_2 = \frac{-\omega_0}{2Q}(1-\sqrt{1-4Q^2}) \approx \frac{-\omega_0}{2Q}(2Q^2)$ soit $r_2 \approx -\omega_0 Q$

on a donc $|r_1| \gg |r_2|$ donc $\lambda_1 e^{r_1 t}$ va décroître beaucoup plus vite que $\lambda_2 e^{r_2 t}$

On considère que le temps caractéristique du système est associée à l'exponentielle qui décroît le plus lentement

On peut définir alors un **temps caractéristique** $\tau = max\left(\frac{1}{|r_2|}, \frac{1}{|r_1|}\right)$ **ici** $\tau = \frac{-1}{r_2} \approx \frac{1}{\omega_0 Q}$

$$T_R \approx 3\tau \Rightarrow T_R \approx \frac{3}{\omega_0 Q}$$

Ainsi :

Rmq : **Plus Q est faible (tout en étant inférieur à 1/2) plus le temps de réponse sera important**

<u>En régime pseudo-périodique</u>

Q ≈ nombre d'oscillations avant d'atteindre le régime stationnaire

Ainsi $T_R \approx Q\,T$ avec T la pseudo période

On a alors $$\boxed{T_R \approx Q\frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}}$$

Remarque : Quand Q>> 1/2 on a $T_R \approx Q\dfrac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1}}$ soit $\boxed{T_R \approx \dfrac{2\pi}{\omega_0}Q \approx T_0 Q}$

Le temps de réponse augmente avec Q si Q>> 1/2 en effet, le signal dépasse plusieurs 1,05 E_0 et redescend sous 0,95 E_0 plusieurs fois après avoir atteint une première fois 0,95E_0

Méthode 2 (valable si Q >>1)

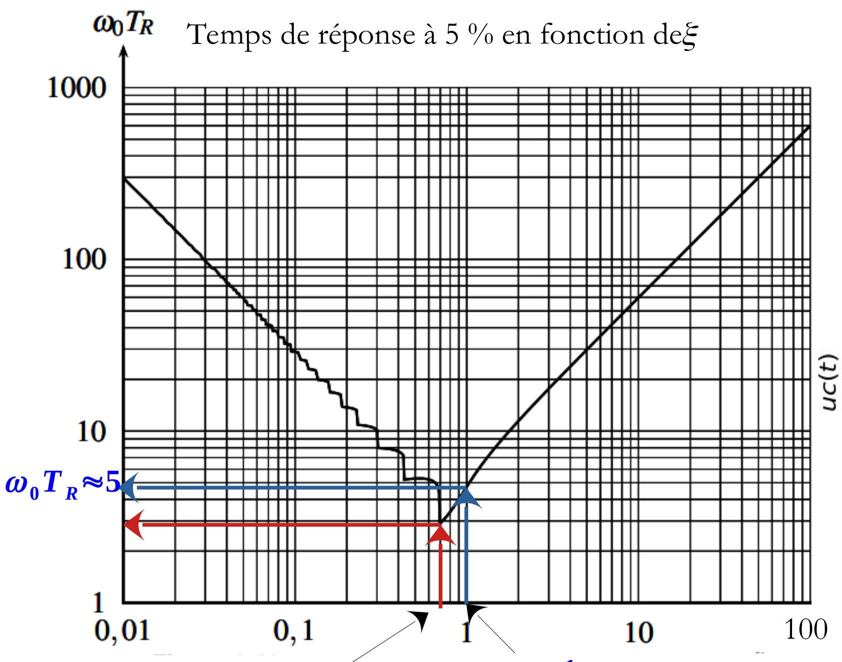
Circuit RLC série : évolution de $u_c(t)$

L'amplitude des oscillations est « enveloppée » par des exponentielles de temps caractéristique de variation $\tau = 2\dfrac{Q}{\omega_0}$ ($e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}$)

Par analogie avec un circuit du premier ordre (on ne considère que les enveloppes)

$$T_R \approx 3\tau \Rightarrow T_R \approx \frac{3\cdot 2Q}{\omega_0} \approx \frac{6Q}{\omega_0}$$

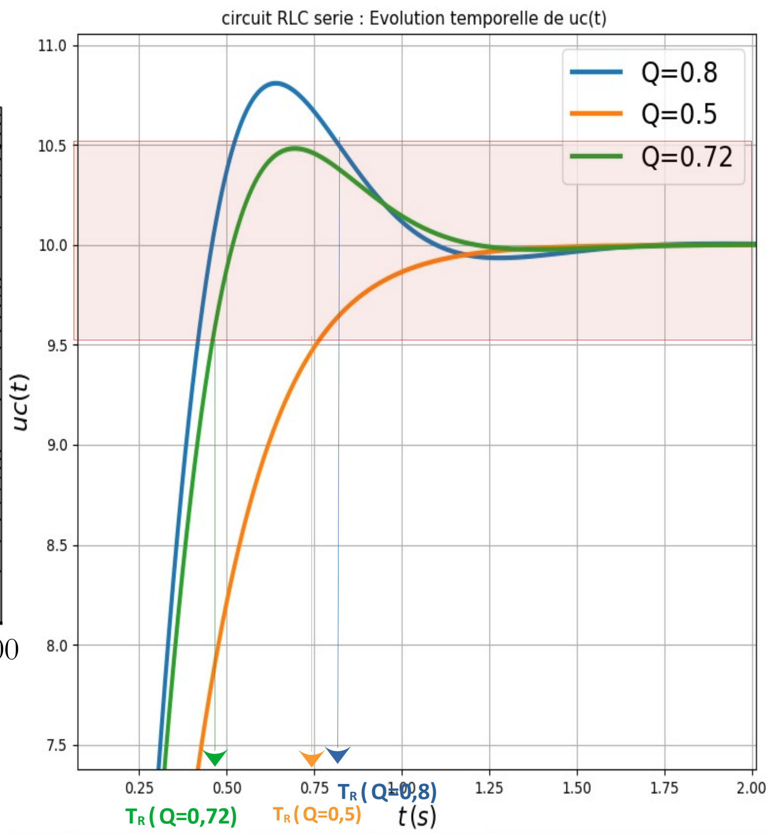
<u>Régime critique.(graphiquement)</u>



$$Q = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \xi = 1$$

Valeur de ξ qui minimise le temps de réponse

$$Pour\ Q = \frac{1}{2} \Rightarrow \omega_0 T_R \approx 5 \Rightarrow T_R \approx \frac{5}{\omega_0}$$



Le temps de réponse minimal est atteint pour ξ = 0,69 soit Q = 0,72

$$Pour\ \xi = 0{,}69 \Rightarrow \omega_0 T_R \approx 3 \Rightarrow T_R \approx \frac{3}{\omega_0}$$

donc pas en régime critique !

II.6) Analyse énergétique

Bilan de puissance dans les conventions choisies : $e(t)i(t)=u_L(t)i(t)+u_C(t)i(t)+u_R(t)i(t)$

Cette égalité met en jeu différentes puissance

- $P_{GBF}(t) = e(t)i(t)$ est la puissance instantanée fournie par le GBF au circuit ;
- $P_L(t) = u_L(t)i(t)$ est la puissance instantanée reçue par la bobine de la part du circuit ; or $P_L(t)=\frac{dE_L}{dt}$

avec $\boldsymbol{E_L(t)=\frac{1}{2}Li_L^2(t)}$

- $P_C(t) = u_C(t)i(t)$ est la puissance instantanée reçue par le condensateur de la part du circuit or $P_c(t)=\frac{dE_c}{dt}$

avec $\boldsymbol{E_c(t)=\frac{1}{2}Cu_c^{\,2}(t)}$

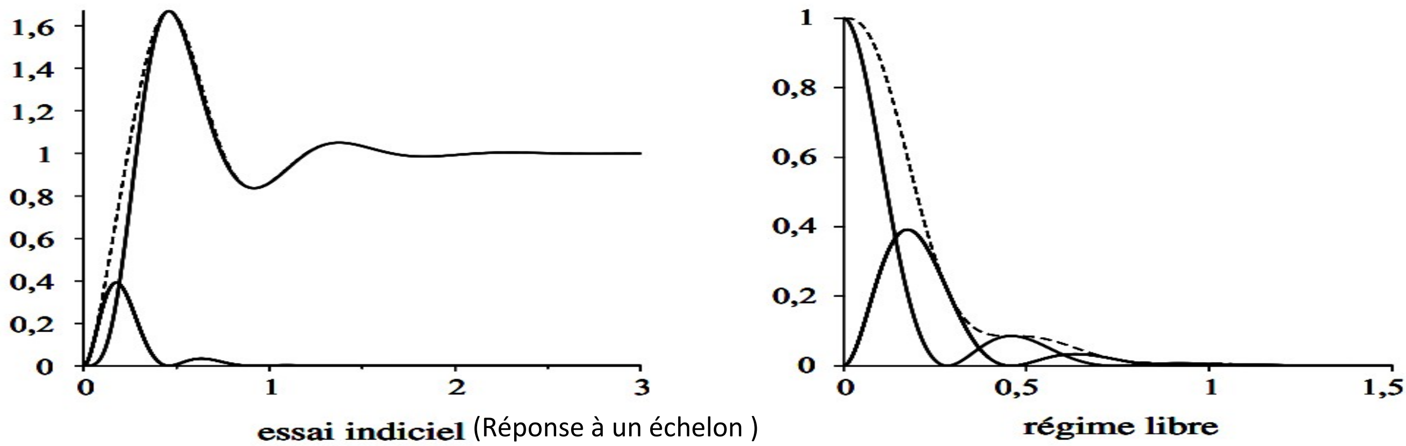
- $\boldsymbol{P_R(t) = u_R(t)i(t) = Ri^2(t) = P_{Joule}(t)}$ est la puissance instantanée reçue par la résistance qui est dissipée par effet Joule.

Dans le cas de l'essai indiciel, où $e(t) = E_0$, la relation entre ces puissances est :

$$P_{GBF}(t)=\frac{d}{dt}\big(E_L(t)+E_C(t)\big)+P_{Joule}(t)$$

l'énergie fournie par le générateur est en partie stockée dans le condensateur et la bobine et pour le reste dissipée par effet Joule.

La figure ci-dessous permet de préciser cela, dans le cas d'un régime pseudo-périodique : au cours de l'expérience, l'énergie totale stockée dans le circuit (c'est-à-dire dans le condensateur et dans la bobine $E_c(t)+E_L(t)$) représentée en pointillé passe de 0 à $\boldsymbol{E_f = 1/2\,CE_0^2}$ *; elle est* ***d'abord stockée sous forme magnétique****, puis* ***essentiellement sous forme électrique*** *et à la* ***fin uniquement sous forme électrique (dans le condensateur*** $\boldsymbol{Ec(t_f) =1/2\ C\ E_0^2}$ **)**



Dans le cas du **régime libre,** où $e(t) = 0$, et condensateur initialement chargé la puissance fournie par le GBF est nulle et l'équation s'écrit : $\frac{d}{dt}\big(E_L(t)+E_C(t)\big)=-P_{Joule}(t)$

L'énergie **électro**magnétique totale stockée ($\boldsymbol{E_{tot}(t) = E_L(t) + E_c(t)}$) **n'est <u>pas</u> conservée , elle diminue car elle est dissipée dans le résistor par effet Joule**

Rmq : comme l'énergie électromagnétique stockée diminue, on en déduit que quand $t\to\infty$ $E_m(\infty) = 0$

Comme $E_c(t)$ et $E_L(t)$ sont des grandeurs positives ou nulles :

$E_c(t\to\infty) = 0$ et $E_L(t\to\infty) = 0$

Par définition de $E_c(t)$ et $E_L(t)$:

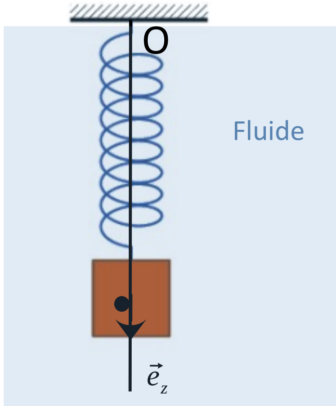
$u_c(t\to\infty) = 0$ et $u_c(t\to\infty)=\frac{i(\infty)}{C}=0$ **(en régime libre!)**

III Le système masse-ressort avec frottements fluides : un oscillateur amorti mécanique

III.1) définition du système étudié

On considère dans ce paragraphe un mobile de masse m qui se déplace dans un fluide le long d'un axe vertical

on lâche sans vitesse initiale le mobile en l'écartant de sa position d'équilibre



b) hypothèses simplificatrices et modélisation:

- On modélise le mobile par **un point matériel M tel que OM(t) =z(t)**
- **On suppose que le mouvement s'effectue seulement selon l'axe passant par $\vec{e}_z$ G et dirigé par (mouvement à une dimension : 1D)**
- **On néglige la masse du ressort devant celle du mobile m_r <<m**
- On suppose que le ressort possède un **comportement linéaire** lorsqu'il subit une contrainte il exerce une force $\vec{F}=-k(z(t)-l_0)\vec{e}_z$ sur le mobile
- On suppose que le fluide dans lequel se déplace le mobile exerce une force sur ce dernier proportionnelle à la vitesse du mobile $\vec{f}=-\lambda\dot{z}(t)\vec{e}_z$

III.2) Obtention de l'équation différentielle

système étudié : mobile de masse m

Principe fondamental de la dynamique appliqué au système dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{F}+m\vec{g}+\vec{f}$$

avec $\vec{v}=\dot{z}(t)\vec{e}_z$ le vecteur vitesse du centre de masse du mobile

En projetant sur l'axe (O, $\vec{e}_z$) $m\ddot{z}(t)=-k(z(t)-l_0)+mg-\lambda\dot{z}(t)$

$$\ddot{z}(t)=\frac{-k}{m}(z(t)-l_0)+g-\frac{\lambda}{m}\dot{z}(t) \qquad \ddot{z}(t)+\frac{k}{m}z(t)+\frac{\lambda}{m}\dot{z}(t)=g+\frac{k}{m}l_0$$

finalement : $\boxed{\ddot{z}(t)+\frac{\lambda}{m}\dot{z}(t)+\frac{k}{m}z(t)=\frac{k}{m}z_{eq} \quad \text{avec} \quad z_{eq}=l_0+\frac{mg}{k}}$ *À retrouver* ♥

Remarque : z_{eq} est la position d'équilibre du mobile lorsqu'il est immobile

III.3) Résolution de l'équation différentielle (ici en régime libre)

On peut mettre l'équation sous forme canonique $\ddot{z}(t)+\frac{\omega_0}{Q}\dot{z}(t)+\omega_0^2z(t)=\omega_0^2z_{eq}$

par identification : $\boxed{\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}}$ ♥ et $\frac{\omega_0}{Q}=\frac{\lambda}{m}\Rightarrow Q=\omega_0\frac{m}{\lambda}\Rightarrow \boxed{Q=\frac{1}{\lambda}\sqrt{mk}}$ ♥

z(t)= z_H(t) + z_{eq} on trouve une éq diff homogène pour u(t)

$$\ddot{z}_H(t)+\frac{\omega_0}{Q}\dot{z}_H(t)+\omega_0^2z_H(t)=0$$

On retrouve les 3 cas déjà étudiés selon la valeur de Q

a) Solution pour Q>1/2

Par analogie avec le circuit RLC (à savoir retrouver !) :

$$z_H(t)=e^{\frac{-\omega_0}{2Q}t}\left(A\cos\left(\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}t\right)+B\sin\left(\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}t\right)\right)$$

et $z(t)=e^{\frac{-\omega_0}{2Q}t}\left(A\cos\left(\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}t\right)+B\sin\left(\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}t\right)\right)+z_{eq}$

Solution vérifiant les conditions initiales

$$z(0)=e^0(A)+z_{eq} \Rightarrow z_0-z_{eq}=A \Rightarrow A=(z_0-z_{eq})$$

de plus

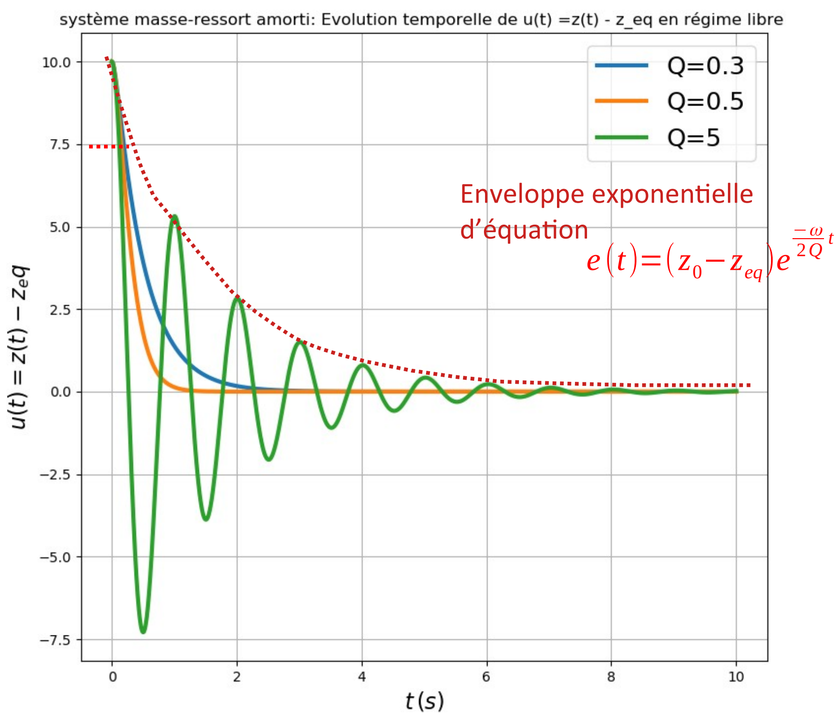
$$\frac{dz}{dt}=\frac{-\omega_0}{2Q}e^{\frac{-\omega_0}{2Q}t}\left(A\cos\left(\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}t\right)+B\sin\left(\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}t\right)\right)+e^{\frac{-\omega_0}{2Q}t}\left(-A\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}\sin\left(\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}t\right)+B\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}\cos\left(\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}t\right)\right)$$

$$\frac{dz}{dt}(0^+)=B\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}-\frac{\omega_0}{2Q}A \Rightarrow 0=B\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}-\frac{\omega_0}{2Q}A \Rightarrow B=\frac{(z_0-z_{eq})}{\sqrt{4Q^2-1}}$$

finalement

$$\boxed{z(t)=(z_0-z_{eq})e^{\frac{-\omega_0}{2Q}t}\left(\cos\left(\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}t\right)+\frac{1}{\sqrt{4Q^2-1}}\sin\left(\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}t\right)\right)+z_{eq}}$$

b) Évolution temporelle en régime libre pour différents Q



Remarque : plus le fluide est visqueux plus λ est important et plus le facteur de qualité est faible

On appelle aussi les frottements fluides des frottements visqueux

Analyse énergétique : voir ex 6 du TD09 $\frac{d}{dt}\left(E_{potelastique}(t)+E_{Cin}(t)\right)=-P_{frottemnts}(t)$

$$\frac{d}{dt}\underbrace{\left(\frac{1}{2}mv^2+\frac{1}{2}k(z-l_0)^2+E_{pp}(t)\right)}_{\text{Énergie mécanique}}=-\lambda v^2$$

L'énergie **mécanique** totale **n'est <u>pas</u> conservée** , **elle diminue car elle est dissipée par les frottements**

III.4) Analogies électro-mécaniques

	circuit *RLC* série	oscillateur mécanique
signal signal dérivé	$q(t)=Cu_C(t)$ $i(t)$	$x(t)$ $v(t)$
paramètres	C L R	$\frac{1}{k}$ m λ
pulsation propre ω_0 facteur d'amortissement ξ facteur de qualité Q	$\frac{1}{\sqrt{LC}}$ $\frac{1}{2}R\sqrt{\frac{C}{L}}$ $\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$	$\sqrt{\frac{k}{m}}$ $\frac{1}{2}\frac{\lambda}{\sqrt{km}}$ $\frac{\sqrt{km}}{\lambda}$
énergie électrique/potentielle énergie magnétique/cinétique	$\frac{1}{2}Cu_C^2=\frac{q^2}{2C}$ $\frac{1}{2}Li^2$	$\frac{1}{2}kx^2$ $\frac{1}{2}mv^2$