

# PROGRAMME DE COLLES N° 10

Semaine du 02/12/2024 au 06/12/2024

👉 *Fonctions numériques de la variable réelle, primitives et intégrales* 👈

## Format de la colle :

- Automatismes de calcul (env. 10 min) : quelques items simples parmi les thèmes de la liste (actualisée chaque semaine) en page 2.
- Restitution du cours (env. 15 min) : définition et/ou théorème des chapitres au programme, puis démonstrations, exemples ou exercices exigibles listés plus bas.
- Exercice(s) libre(s) (env 30 min).

## — Chapitre 7 : Fonctions numériques de la variable réelle —

Tout le chapitre.

### 1 Définition, généralités

- 1.1 Fonction numérique de la variable réelle . . .
- 1.2 Courbe d'une fonction réelle de la variable réelle . . . . .
- 1.3 Parité, imparité, la bijection réciproque d'une bijection impaire est impaire . . . . .
- 1.4 Périodicité . . . . .
- 1.5 Fonctions majorées, minorées, bornées, extrema . . . . .
- 1.6 Monotonie, cas de la réciproque d'une bijection monotone . . . . .

### 2 Dérivation

- 2.1 Taux d'accroissement et nombre dérivé . . .
- 2.2 Dérivées usuelles, opérations . . . . .
- 2.3 Lien avec la monotonie . . . . .
- 2.4 Dérivées d'ordre supérieur . . . . .

### 3 Convexité : définition par les cordes, caractérisations pour les fonctions dérivables, deux fois dérivables, par les tangentes

### 4 Notion de continuité

- 4.1 Définition, exemples . . . . .
- 4.2 Théorèmes des valeurs intermédiaires . . . . .
- 4.3 Bijections continues, bijections dérivables . . . . .

### 5 Fonctions usuelles

- 5.1 Racines  $n$ -ièmes de réels . . . . .
- 5.2 Exponentielle et fonctions associées . . . . .
- 5.3 Fonctions trigonométriques hyperboliques . . . . .
- 5.4 Logarithmes . . . . .
- 5.5 Puissances réelles . . . . .
- 5.6 Exponentielle de base  $a$  . . . . .
- 5.7 Trigonométrie réciproque . . . . .

## — Chapitre 8 : Calculs de primitives et d'intégrales —

Le début, jusqu'au théorème fondamental de l'analyse inclus.

### 1 Définition, calculs directs

- 1.1 Définition, unicité d'une primitive à une constante près . . . . .
- 1.2 Formulaire des primitives usuelles . . . . .
- 1.3 Primitives composées . . . . .

- 1.4 Linéarité, fonctions à valeurs complexes . . . . .

### 2 Calculs d'intégrales

- 2.1 Notion d'intégrale, propriétés fondamentales de l'intégrale, lien avec les primitives, théorème fondamental du calcul intégral . . . . .

## Démonstrations, exemples ou exercices exigibles comme questions de cours

- Chapitre 7. Dérivée de  $e^u$  pour  $u : X \rightarrow \mathbb{C}$  dérivable.
- Chapitre 7. Dérivabilité et dérivée de  $\ln$ ,  $\text{Arccos}$ ,  $\text{Arctan}$  et étude de leur concavité/convexité.
- Chapitre 8. Théorème fondamental du calcul intégral : démonstration dans le cas d'une fonction réelle croissante.

## Automatismes de calcul

On donne quelques exemples de capacité attendue pour chaque thème.

[Le cahier de calcul](#) fournit également une excellente source d'entraînement/inspiration.

- **Logique, raisonnement**

Exemples : montrer que  $x^2 + y^2 \geq 2xy$  pour tous  $x, y \in \mathbb{R}$ , savoir écrire en langage symbolique qu'une suite est majorée, qu'une fonction est  $2\pi$ -périodique et savoir nier ces assertions.

- **Trigonométrie.**

Exemples : formule  $\cos(2a)$ , résolution de  $\sin a = \sin b$ ,  $\cos(2x + 1) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\cos x = \sin x$ .

- **Inégalités : résoudre/prouver des inégalités simples**

Exemples : résoudre  $x|x| \leq 3x + 2$ , montrer que  $|\sin(nx)| \leq n|\sin x|$  pour tous  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , encadrer rapidement  $x \mapsto \frac{\cos x + 2}{x^2 + 4}$  sur  $[0; 1]$ .

- **Calcul élémentaire de nombres complexes** (module, argument, linéarisation, angle moitié, racines carrées,  $n$ -ièmes).

Exemples : calculer la forme exponentielle de  $\sqrt{3} - 3i$ , les racines carrées de  $3 - 4i$ , linéarisation de  $\cos^3 x$ , résolution de  $z^n = 1$  dans  $\mathbb{C}$ .

- **Calcul algébrique** (fractions, simplification d'expressions, sommes et produits usuels, coefficients binomiaux, formule du binôme, etc).

Exemples : donner la formule pour  $\sum_{k=1}^n q^k$ , calculer  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k$ , écrire  $\prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k+1}$  avec des factorielles.

- **Définition, dérivée ou primitive d'une fonction usuelle.**

Exemples : définir  $\text{Arctan}$ , simplifier  $\text{Arccos}(\cos(7))$ , théorème de dérivation de  $g \circ f$ , dérivée de  $x \mapsto f(-x)$ , donner une primitive de  $x \mapsto \frac{x}{2x+1}$ , de  $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ , de  $x \mapsto \frac{x^2+x}{x^2+1}$ , ensemble de définition, de dérivabilité et dérivée de  $x \mapsto \text{Arccos}\left(\frac{x}{x+1}\right)$ .