CHAP 10 : oscillations en régime sinusoïdal forcé, notion de résonance

Rapport de jury :
- La lecture graphique d'une valeur numérique ne doit pas être effectuée à la va-vite. Le temps qu'on espère gagner ne vaut pas ce que coûte ce manque de précision dans la suite.
- Rappelons que l'argument d'un nombre complexe $\underline{Z} = \underline{a} + i\underline{b}$ n'est pas toujours arctan(b/a).
(centrale PSI 2023)

Objet d'étude :
On étudie principalement des systèmes du deuxième ordre ou du premier ordre, électriques ou mécaniques, qui répondent à une équation différentielle :

$$\ddot{x}(t)+\frac{\omega_0}{Q}\dot{x}(t)+\omega_0^2 x=\omega_0^2 f(t) \qquad (1)$$

ou

$$\dot{x}(t)+\frac{1}{\tau}x=\frac{1}{\tau}f(t) \qquad (2)$$

Dans ce chapitre f(t) est une fonction sinusoïdale du temps (qui possède la dimension de x(t)) très souvent de la forme:
$f(t)= f_0 \cos(2\pi f t)= f_0 \cos(\omega t)$
c'est f(t) qui constitue le « forçage » sinusoïdal du système

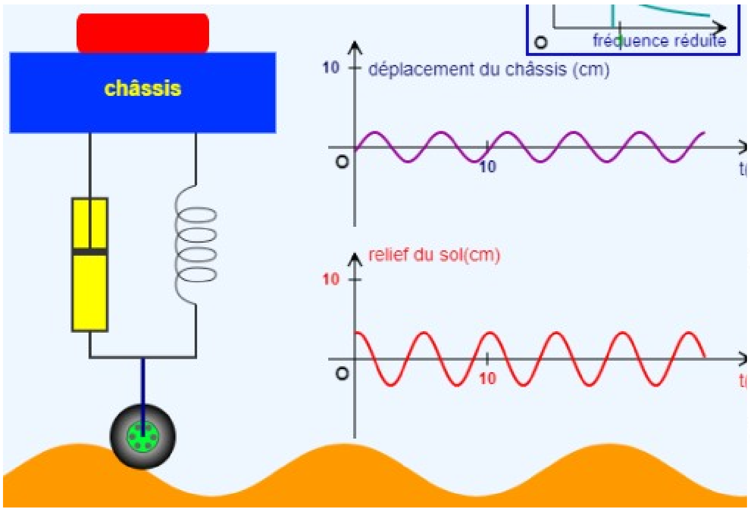
Solutions : Les solutions seront de la forme **$x(t) = x_H(t) + x_p(t)$**

Avec $x_H(t) \rightarrow 0$ quand $t>T_R$
(c'était le cas dans les chapitres précédents 1er ordre, et 2ème ordre avec **solutions stables**
(coefficients de l'équation différentielle homogène **tous de même signe**)

Donc au bout d'un certain temps on aura :

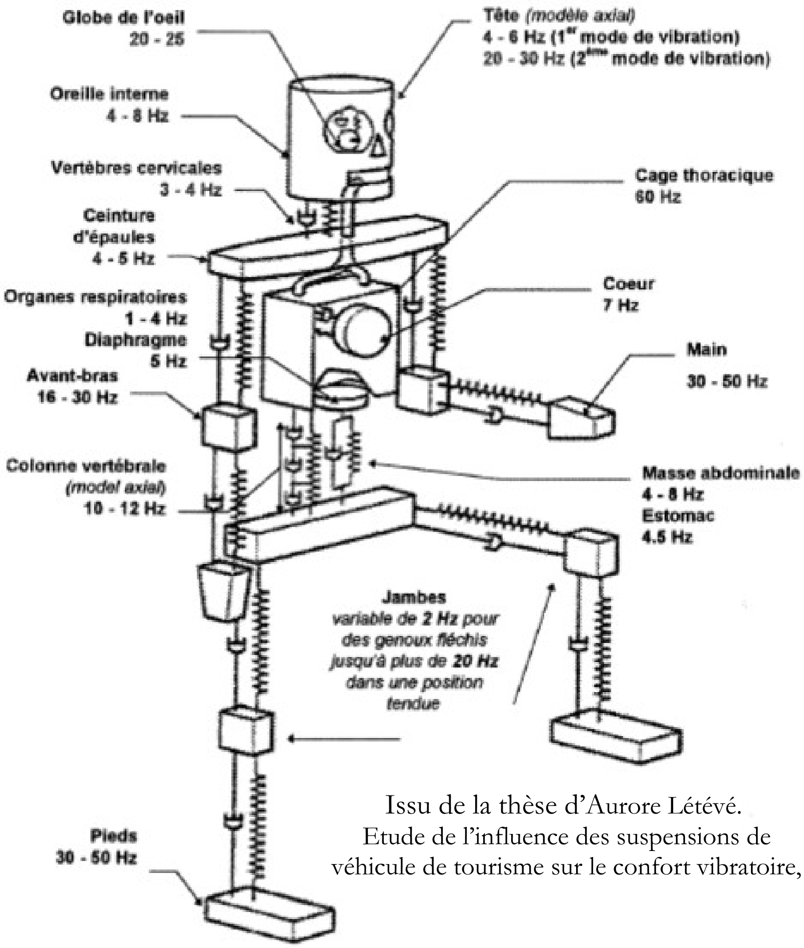
$x(t) = x_p(t)$

But du chapitre : Exprimer x(t) pour $t > T_R$ donc en régime permanent



anim
La fréquence d'excitation dépend de la vitesse linéaire de la voiture par rapport au sol. Si elle va à la bonne vitesse, la fréquence d'excitation est résonnante :
Le châssis (et les personnes dans la voiture) oscillent avec une grande amplitude

Les organes du corps peuvent aussi renter en résonancesi ils sont sollicités à des fréquences bien précises. Cela provoque des problèmes allant d'un simple mal-être jusqu'à la dégradation d'une ou plusieurs fonctions biologique D'où l'importance d'éviter la transmission des vibrations aux régions physiologiquement sensibles.

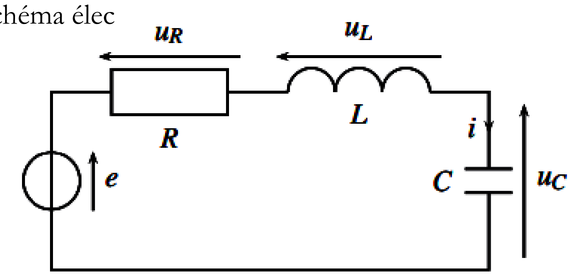


Issu de la thèse d'Aurore Létévé.
Etude de l'influence des suspensions de véhicule de tourisme sur le confort vibratoire,

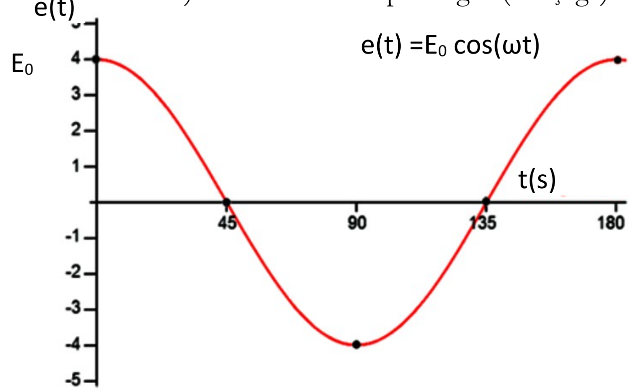
I Exemples de systèmes soumis à une excitation sinusoïdale

I.1) circuit RLC série en RSF

a) schéma élec

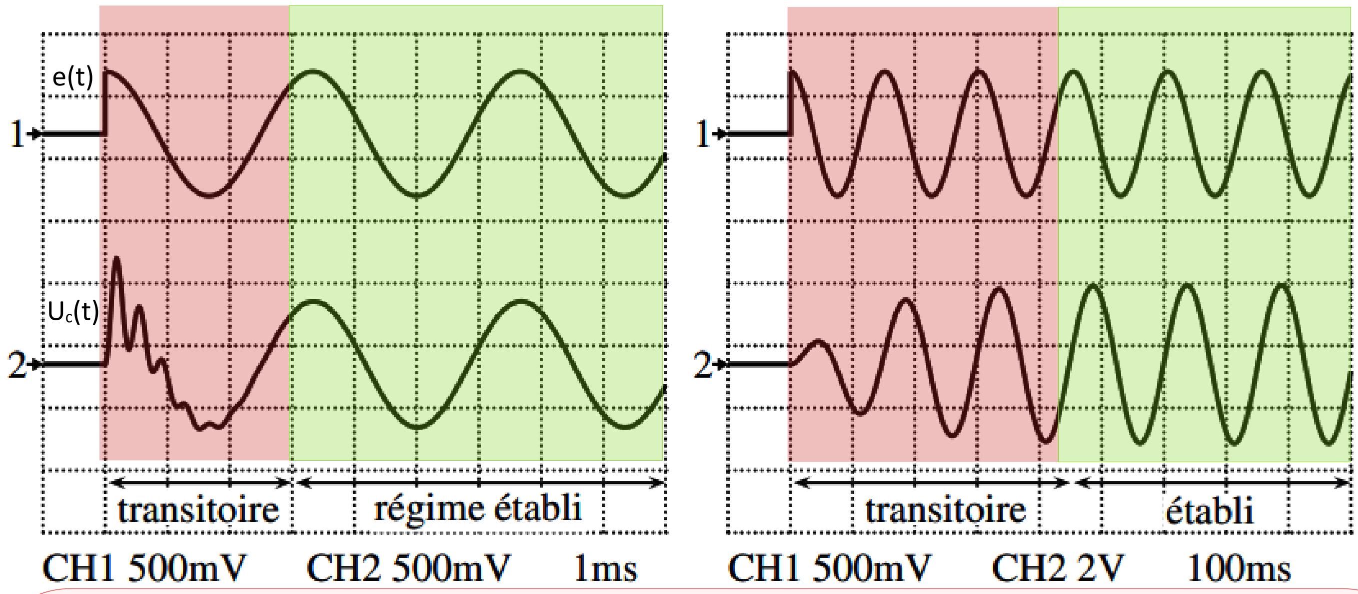


b) tension délivrée par le gbf (forçage)



c) **Observations expérimentales :**

Allures possibles des signaux e(t) et u_c(t) en mode « monocoup » (single):



On distingue :

- un régime transitoire d'une durée T_R
  (T_R le temps de réponse associé à $u_{CH}(t)$ la solution de l'équation différentielle **homogène)**
- **régime permanent**(ou établi) durant lequel signal de sortie s(t) **finit dans tous les cas par être sinusoïdal,** comme le signal d'entrée e(t) et **de même fréquence que e(t)**
- **Rmq(voc) ce régime permanent sinusoïdal est appelé régime sinusoïdal forcée (RSF)**
  on <u>n' utilise pas</u> le terme régime stationnaire car le signal varie dans le temps

En RSF, Le signal de sortie n'a pas la même amplitude que le signal d'entrée. De plus, on remarque qu'il est déphasé par rapport au signal d'entrée. Plus précisément il est en retard sur le signal d'entrée (il atteint ses maxima plus tard que le signal d'entrée)

Ainsi pour t>T_R (en RSF) on a :

$$\boxed{u_c(t)=u_{C0}\cos(\omega t+\phi)}$$

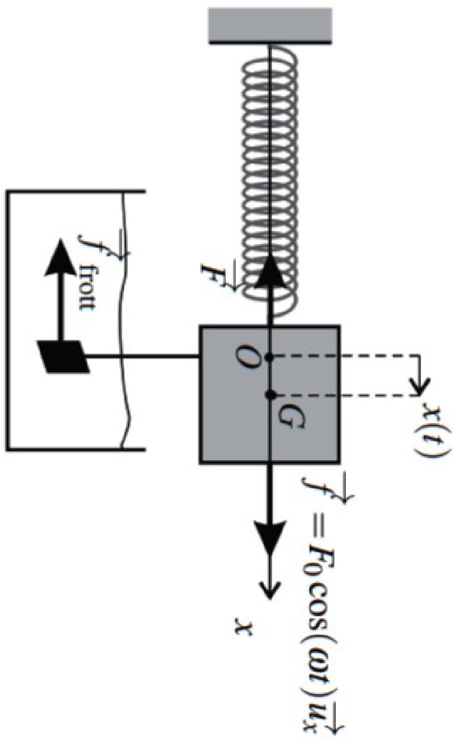
avec $u_{c0}\neq E$ et $\omega=2\pi f$

(ω n'est pas la pseudo-pulsation mais la pulsation imposée par le gbf !)

Le but du chapitre est d'exprimer u_{c0} et φ en fonction de E , ω_0 et Q

Rmq

le régime permanent est le seul à être observé sur un oscilloscope en mode « normal » ou « auto ».
Pour observer le régime transitoire il faut utiliser le mode single



I.2)Système mécanique en RSF

a) description du système étudié

système : { mobile de masse m}

Réf : du laboratoire supposé galiléen

Bilan des forces :

- $\vec{f}=F_0\cos(\omega t)\vec{u}_x$ est une force sinusoïdale exercée par un opérateur extérieur ou une machine(entrée/excitation)
- $\overrightarrow{f_{frott}}=-\lambda\dot{x}\vec{u}_x$ force de frottement fluide
- $\vec{P}=m\vec{g}$ le poids du système
- Force de rappel du ressort $\vec{F}=-kx(t)\vec{e}_x$

On suppose que le mouvement s'effectue seulement selon l'axe (Ox)

PFD appliqué au système dans le réf d'étude :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{f}+\vec{F}+\vec{f}_{frott}+\vec{P}$$

En projetant sur l'axe (Ox) :

$$m\ddot{x}=-\lambda\dot{x}-kx(t)+F_0\cos(\omega t)+mg$$

$$\ddot{x}(t)+\frac{\lambda}{m}\dot{x}(t)+\frac{k}{m}\left(x(t)-\frac{mg}{k}\right)=\frac{F_0}{m}\cos(\omega t)$$

en posant u(t) = x(t) - mg/k

$$\ddot{u}(t)+\frac{\lambda}{m}\dot{u}(t)+\frac{k}{m}u(t)=\frac{k}{m}\frac{F_0}{k}\cos(\omega t)\Rightarrow\ddot{u}(t)+\frac{\omega_0}{Q}\dot{u}(t)+\omega_0^2u(t)=\omega_0^2\frac{F_0}{k}\cos(\omega t)$$

b) Observations expérimentales

Voir vidéo

On observe un régime permanent pour lequel la fréquence d'oscillation est la même que la fréquence d'excitation

- l'amplitude des oscillations dépend de la fréquence d'excitation
- elle est maximale pour une fréquence appelée fréquence de résonance
- u(t) est déphasé par rapport au signal d'excitation

Ainsi en régime permanent (RSF) on s'attend à $u(t)=u_0\cos(\omega t+\phi)$

Le but du chapitre est d'exprimer u_0 et φ en fonction de f, ω_0 et Q et ω

autre exemple : voiture avec suspension :

http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Oscillateurs/suspension.html

I.3) Méthode de résolution algébrique : ça devient complexe !

Réinjectons dans l'équation différentielle pour un équation d'ordre deux :

$$u(t)=u_0\cos(\omega t+\phi)$$

$$-\omega^2u_0\cos(\omega t+\phi)-\omega u_0\sin(\omega t+\phi)\frac{\omega_0}{Q}+\omega_0^2u_0\cos(\omega t+\phi)=\frac{F_0}{m}\cos(\omega t)$$ Pas facile d'isoler u_0 et φ !

Il faut trouver une autre méthode

a) Signal complexe associé à un signal sinusoïdal

on considère un signal sinusoïdal $x(t) = X_0 \cos(\omega t + \phi)$.

La notation x est ici neutre ; elle désigne un signal qui peut être électrique ou mécanique

Au signal x(t) on associe le signal complexe $\underline{x}(t)$:

$$\underline{x}(t) = X_0 \exp(j(\omega t + \phi))$$

ou encore $\underline{x}(t) = \underline{x_0} \exp(j\omega t)$ **avec** $\underline{x_0} = X_0 \exp(j\phi)$

Rmq (notation)

- le signal complexe est souligné pour affirmer son appartenance à ℂ

- j est le nombre complexe tel que $j^2 = -1$.

j est noté i en mathématiques, mais on évite cette notation en physique afin de ne pas le confondre avec l'intensité d'un courant.

Rmq (voc) : $\underline{x_0}$ est appelée l'amplitude complexe du signal x(t)

elle contient deux informations :

- $|\underline{x_0}| = X_0$

le module de l'amplitude complexe est égale à l'amplitude réelle X_0 du signal x(t)

- $\arg(\underline{x_0}) = \phi$

l'argument de l'amplitude complexe est égale à la phase à l'origine du signal x(t)

x(t) est de par sa nature physique un nombre réel, on revient toujours à la notation réelle

$$x(t) = \Re(\underline{x}(t))$$

si on chercher x(t) sous la forme $x(t) = X_0 \sin(\omega t + \varphi)$
alors on aura

$$x(t) = \Im(\underline{x}(t))$$

b) dérivation du signal complexe

- **dérivée première** $\dfrac{d}{dt}(\underline{x}(t)) = \dfrac{d}{dt}(\underline{x_0}\exp(j\omega t)) = \underline{x_0}\, j\omega(\exp(j\omega t)) = j\omega\, \underline{x_0}\exp(j\omega t) = j\omega\, \underline{x}(t)$

ainsi $\boxed{\dfrac{d}{dt}(\underline{x}(t)) = j\omega\, \underline{x}(t)}$ **et pour le signal réel :**

$$\frac{d}{dt}x(t) = \frac{d}{dt}(\Re(\underline{x}(t))) = \Re\left(\frac{d}{dt}(\underline{x}(t))\right) = \Re(j\omega\, \underline{x}(t))$$

- **Dérivée seconde :** $\dfrac{d^2}{dt^2}(\underline{x}(t)) = \dfrac{d^2}{dt^2}(\underline{x_0}\exp(j\omega t)) = (j\omega)^2 \underline{x}(t) = j^2\omega^2 \underline{x}(t) = -\omega^2 \underline{x}(t)$

ainsi $\boxed{\dfrac{d^2}{dt^2}(\underline{x}(t)) = -\omega^2 \underline{x}(t)}$ **et pour le signal réel :**

$$\frac{d^2}{dt^2}(x(t)) = \Re(-\omega^2 \underline{x}(t))$$

Rmq : ces relations sont vraies seulement en notation complexe pour des signaux réels sinusoïdaux!

On peut aussi montrer que $\boxed{\int \underline{x}(t)\,dt = \dfrac{\underline{x}(t)}{j\omega} = -j\dfrac{\underline{x}(t)}{\omega}}$

c) Intérêt pour résoudre l'équation différentielle en RSF :

Méthode générale :

- On écrit le signal x(t) sous forme complexe et <u>l'excitation aussi</u>

- On injecte $\underline{x(t)}$ dans l'équation différentielle et on fait apparaître l'amplitude complexe $\underline{X_0}$

- On isole $\underline{X_0}$ (il faut souvent simplifier à droite et à gauche par $e^{j\omega t}$

- O n calcule le module et l'argument pour avoir l'amplitude réelle et le déphasage par rapport à l'entrée

Application : RSF $x(t) = X_0 \cos(\omega t+\varphi)$ en complexe $\underline{x(t)} = \underline{X_0} e^{j(\omega t+\varphi)}$

$$\ddot{x}(t)+\frac{\omega_0}{Q}\dot{x}(t)+\omega_0^2 x=\omega_0^2 f_0 \cos(\omega t)$$

Ne pas oublier de passer l'excitation sous forme complexe

Si il n'y a pas de phase dans le cos il faut juste remplacer $\cos(\omega t)$ par $e^{j\omega t}$

PASSAGE AU SIGNAL COMPLEXE :

$$\ddot{\underline{x}}(t)+\frac{\omega_0}{Q}\dot{\underline{x}}(t)+\omega_0^2 \underline{x}=\omega_0^2 f_0 e^{j\omega t}$$

en utilisant les relations de dérivation

pour trouver les solutions il suffit de résoudre l'équation complexe scalaire (plus de dérivées !) :

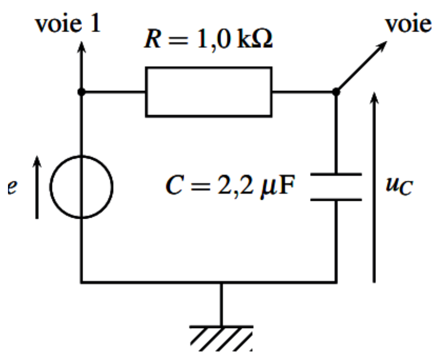
$$\left(-\omega^2+\frac{\omega_0}{Q}j\omega+\omega_0^2\right)\underline{x}(t)=\omega_0^2 f_0 \exp(j\omega t)$$

on a $$\underline{x}(t)=\omega_0^2\frac{f_0}{\left(-\omega^2+\frac{\omega_0}{Q}j\omega+\omega_0^2\right)}\exp(j\omega t)=\underline{x_0}e^{j\omega t}$$

et $x(t)=\Re(\underline{x}(t))$

$$X_0=|\underline{x_0}(t)|=\frac{\omega_0^2 f_0}{\left|\left(-\omega^2+\frac{\omega_0}{Q}j\omega+\omega_0^2\right)\right|}=\frac{\omega_0^2 f_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+\left(\omega_0\frac{\omega}{Q}\right)^2}}$$

d) Application directe au circuit RC soumis à une excitation sinusoïdale :



$$\dot{u}_c(t)+\frac{1}{RC}u_c(t)=\frac{e(t)}{RC}$$

avec $e(t)=E_0\cos(\omega t)$

et en régime permanent on s'attend à: $u_c(t)=U_{c0}\cos(\omega t+\phi)$

cherchons à déterminer u_{c0} et φ

Passage aux grandeurs complexes associées :

$$\underline{e}(t)=E_0\exp(j\omega t)$$
$$\underline{u_c}(t)=\underline{u_{c0}}\exp(j\omega t)$$

on cherche et $U_{c0}=|\underline{u_{c0}}|$ $\phi=arg(\underline{u_{c0}})$ rappel : $\underline{u_{c0}}=U_{c0}\exp(j\phi)$

on remplace par les grandeurs complexes dans l'équation différentielle :

$\dot{\underline{u_c}}+\frac{1}{RC}\underline{u_c}(t)=\underline{e}(t)$ comme $\dot{\underline{u_c}}=j\omega\underline{u_c}$ on en déduit :

$$\underline{u_c}(t)j\omega+\frac{1}{RC}\underline{u_c}(t)=\frac{\underline{e}(t)}{RC}$$
$$\underline{u_c}(t)\left(j\omega+\frac{1}{RC}\right)=\frac{\underline{e}(t)}{RC}$$
$$\underline{u_c}(t)=\frac{\underline{e}(t)}{j\omega RC+1}$$
$$\underline{u_{c0}}\exp(j\omega t)=\frac{E_0\exp(j\omega t)}{j\omega RC+1}$$

finalement :

$$\underline{u_{c0}}=\frac{E_0}{j\omega RC+1}$$

On en déduit

$$U_{c0}=|\underline{u}_{c0}|=\frac{|E_0|}{|j\omega RC+1|}=\frac{E_0}{\sqrt{1^2+(\omega RC)^2}}$$

rappel math $|a+ib|=\sqrt{(a+ib)(a-ib)}=\sqrt{a^2+b^2}$

$$\boxed{U_{c0}(\omega)=\frac{E_0}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}}}$$ avec $\tau = RC$

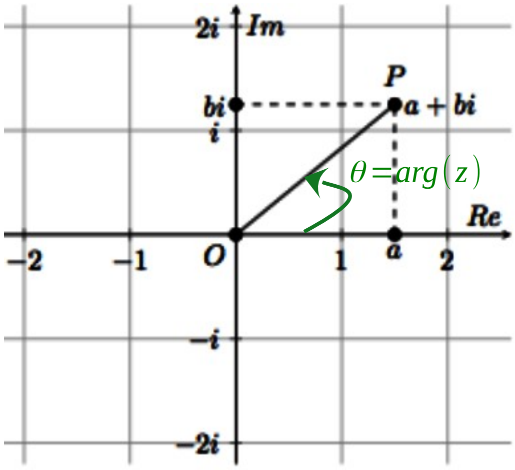
À savoir retrouver

rappel math $\frac{1}{a+ib}=\frac{(a-ib)}{(a-ib)}\frac{1}{a+ib}=\frac{a-ib}{a^2+b^2}=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i$

rappel math : soit z et z' complexes $arg(\frac{z}{z'})=arg(z)-arg(z')$

$$\phi=arg(\underline{u}_{c0})\quad \phi=arg(\frac{E_0}{j\omega RC+1})=arg(E_0)-arg(1+j\omega RC)$$

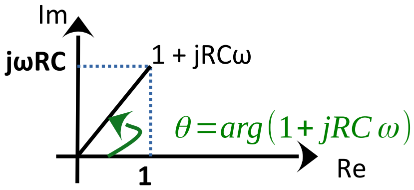
Rappel math (l'argument d'un nombre complexe z =a+ib est l'angle orienté entre l'axe réel dans le plan complexe le vecteur segment **OP**)



si a>0 $arg(z)=\arctan(\frac{b}{a})$ et si a<0 $arg(z)=\pi+\arctan(\frac{b}{a})$

Notamment $arg(1+jx)=\arctan(x)$ Pour tout x réel(**à retenir**)

dans notre cas



$$arg(1+jRC\omega)=\arctan(RC\omega)$$

et arg(E_0) = 0 (car E_0 est un nombre réel positif) (Rappel arg(-E_0) = π)

finalement $\phi=0-\arctan(RC\omega)\Rightarrow \boxed{\phi(\omega)=-\arctan(RC\omega)}$ À savoir retrouver

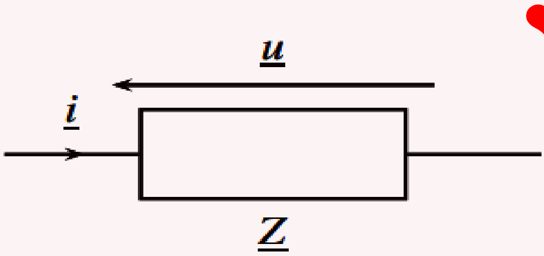
donc $$u_c(t)=\frac{E_0}{\sqrt{1+(\omega\tau)^2}}\cos(\omega t-\arctan(RC\omega))$$

II impédance complexe

II.1) définition

En régime sinusoïdal forcé, quand on utilise la notation complexe, il existe une relation de proportionnalité entre la tension complexe $\underline{u}$ aux bornes d'un dipôle passif et l'intensité complexe $\underline{i}$ du courant qui le traverse en convention récepteur :

$$\underline{u}=\underline{Z}\times\underline{i}$$



$$\underline{u}=U_0\exp(j\phi_{u0})\exp(j\omega t)=\underline{u_0}\exp(j\omega t)$$

$$\underline{i}=I_0\exp(j\phi_{i0})\exp(j\omega t)=\underline{i_0}\exp(j\omega t)$$

Cette relation définit l'impédance complexe $\underline{Z}$ du dipôle, qui est un nombre complexe dont la partie réelle et la partie imaginaire s'expriment en ohm.

Le module Z = |Z| de l'impédance est égal au rapport entre l'amplitude U_0 de la tension aux bornes du dipôle et l'amplitude I0 de l'intensité qui le traverse :

$$\underline{Z}=\frac{\underline{u}}{\underline{i}}\Rightarrow|\underline{Z}|=\frac{|\underline{u}|}{|\underline{i}|}=\frac{U_0}{i_0}$$

L'argument de l'impédance est égal au déphasage du signal u(t) par rapport signal i(t) (noté $\Phi_{u/i}$)

$$arg(\underline{Z})=arg(\underline{u_0})-arg(\underline{i_0})=\phi_{u0}-\phi_{i0}=\Phi_{u/i}$$

II.2) Impédance complexe des dipôles de base

a) Résistor

Dans le cas d'un résistor de résistance R, la loi d'Ohm (en conv récepteur) u(t) = Ri(t) se traduit immédiatement en complexe par **$\underline{u} = R\underline{i}$**. L'impédance complexe du résistor est donc :

$$\boxed{\underline{Z}_{Resistor} = R}$$

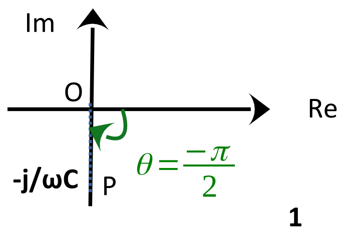
Rmq : un résistor seul n'introduit pas de déphasage entre tension et courant en régime sinusoïdale en effet $arg(\underline{Z}_{resistor}) = arg(R) = 0$ (R réel positif)

b) Condensateur

Pour un condensateur de capacité C en convention récepteur, la relation $i(t) = C\frac{du}{dt}(t)$ se traduit avec les grandeurs complexes : $\underline{i}(t) = C\frac{d\underline{u}}{dt}(t) = Cj\omega\underline{u} \Rightarrow \underline{u} = \frac{\underline{i}(t)}{jC\omega} = \frac{1}{jC\omega}\underline{i}(t)$

On en déduit $\boxed{\underline{Z}_{condensateur} = \frac{1}{jC\omega} = -j\frac{1}{C\omega}}$ (on note aussi $\underline{Z}_C$)

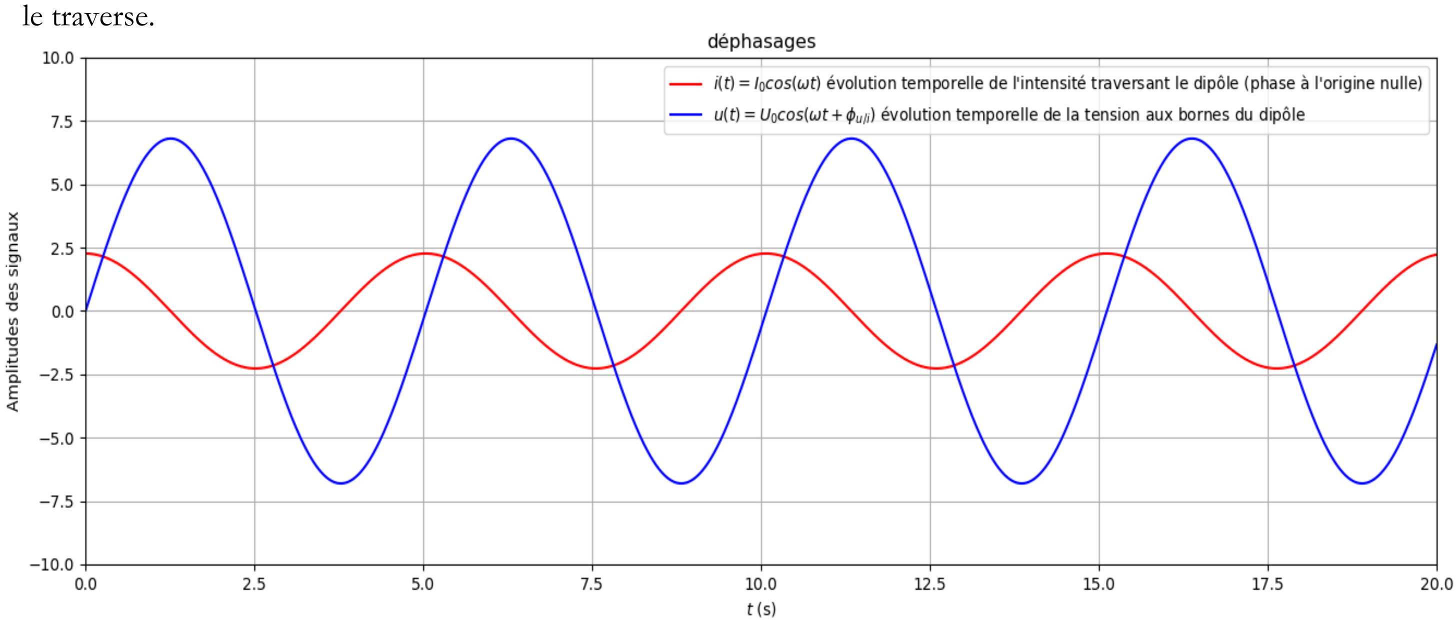
et $arg(\underline{Z}_{condensateur}) = arg(-j\frac{1}{C\omega}) = \frac{-\pi}{2}$



L'impédance complexe d'un condensateur est imaginaire pur de partie imaginaire négative. Son argument vaut $-\pi/2$

$$\phi_{u/i} = \phi_{u0} - \phi_{i0} = \frac{-\pi}{2} \Rightarrow \phi_{u0} = \phi_{i0} - \frac{\pi}{2}$$

(Voc) La **tension aux bornes du condensateur** est en **quadrature** de phase **retard par rapport à l'intensité** qui le traverse.

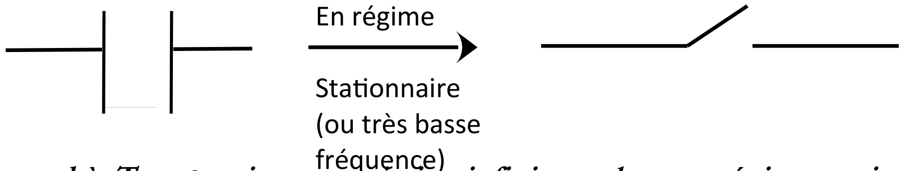


En quadrature, quand u est nulle, i est maximale ou minimale

Rmq :

- $$\lim_{\omega \to 0} |\underline{Z_C}| = \lim_{\omega \to 0} \frac{1}{C\,\omega} = \infty$$

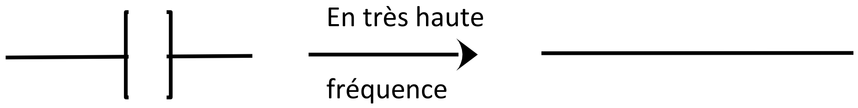
ceci traduit le fait qu'un condensateur, en régime stationnaire , se comporte comme un interrupteur ouvert.



($\omega \to 0$ correspond à $T \to \infty$ soit une variation infiniment lente = régime stationnaire (ou continu))

- $$\lim_{\omega \to \infty} \underline{Z_C} = \lim_{\omega \to \infty} \frac{-j}{C\,\omega} = 0$$

Quand la pulsation tend vers l'infini (haute fréquence), le condensateur tend à se comporter comme un interrupteur fermé (fil)



c) Bobine

Pour une bobine d'inductance L (en convention récepteur) la relation $u(t) = L\dfrac{di}{dt}(t)$ **se traduit par :**

$\underline{u(t)} = L\dfrac{d\,\underline{i}}{dt}(t) = Lj\,\omega\,\underline{i} \Rightarrow \underline{u}(t) = \boldsymbol{jL\,\omega}\,\underline{i(t)}$ **L'impédance complexe de la bobine est donc :**

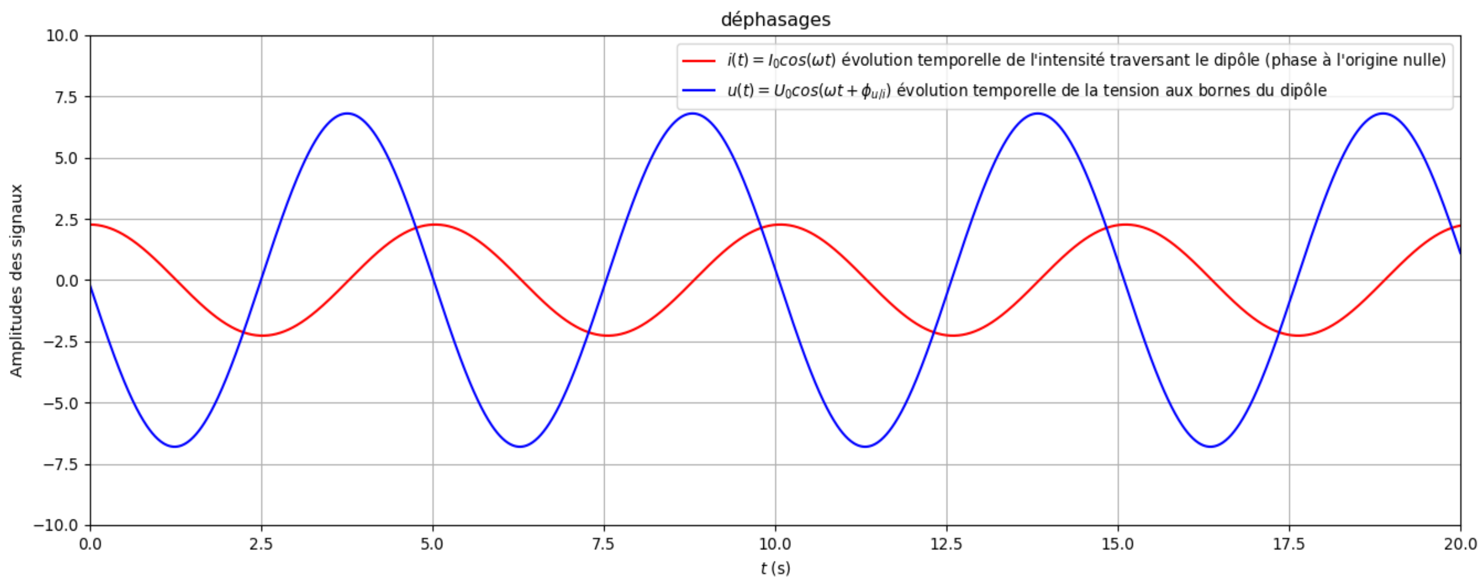
on en déduit $\boldsymbol{Z_{bobine} = jL\,\omega}$ **(on note aussi $\underline{Z_L}$)**

et $\boldsymbol{arg(\underline{Z_{bobine}}) = arg(j\,L\,\omega) = \dfrac{\pi}{2}}$

L'impédance complexe d'une bobine est imaginaire pur. Son argument vaut π/ 2 :

$$\phi_{u/i} = \phi_{u0} - \phi_{i0} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \phi_{u0} = \phi_{i0} + \frac{\pi}{2}$$

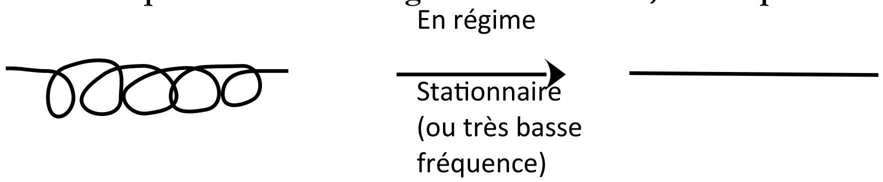
(Voc) La **tension aux bornes du condensateur** est en **quadrature** de phase **avance par rapport à l'intensité** qui le traverse.



Comportement haute et basse fréquence de la bobine :

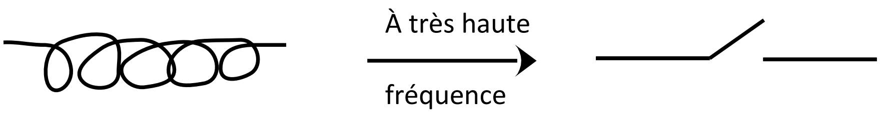
- $\lim\limits_{\omega \to 0} |\underline{Z}_L| = \lim\limits_{\omega \to 0} jL\omega = 0$

ceci traduit le fait qu'une bobine en régime stationnaire , se comporte comme un fil.



- $\lim\limits_{\omega \to \infty} |\underline{Z}_L| = \lim\limits_{\omega \to \infty} j\,L\omega = \infty$

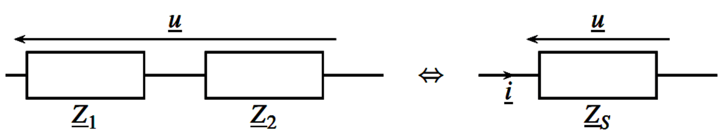
Quand la pulsation tend vers l'infini (très haute fréquence), la bobine tend à se comporter comme un interrupteur ouvert



II.3) Associations en série ou en parallèle

Les règles pour associées les impédances complexes sont les mêmes que celles qui relient les résistances

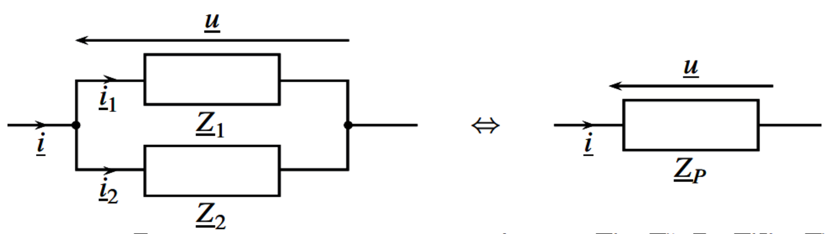
a) association en série d'impédances comp



$\underline{u} = \underline{u}_1 + \underline{u}_2 = \underline{Z}_1\underline{i} + \underline{Z}_2\underline{i} = (\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2)\underline{i} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{u} = \underline{Z}_S\,\underline{i} \quad \text{avec} \quad \underline{Z}_S = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2.$

$$\underline{Z}_s = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$$

b) association en // d'impédances complexes



$\underline{i}_1 = \dfrac{\underline{u}}{\underline{Z}_1}$ et $\underline{i}_2 = \dfrac{\underline{u}}{\underline{Z}_2}$. La loi des nœuds s'écrit alors :

$$\underline{i} = \underline{i}_1 + \underline{i}_2 = \left(\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2}\right)\underline{u} \quad \Leftrightarrow \quad \underline{i} = \frac{1}{\underline{Z}_P}\,\underline{u} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{\underline{Z}_P} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2}.$$

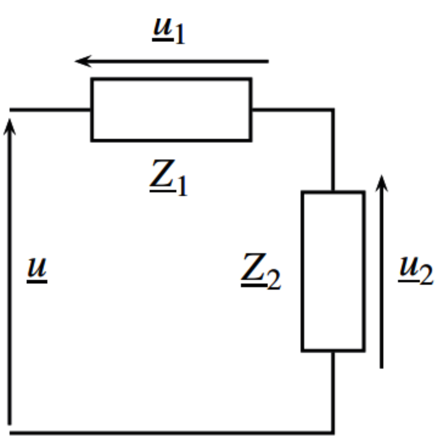
$$\underline{Z}_p = \frac{\underline{Z}_1 \times \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$$

On retrouve les relations pour les dipôles C et L aussi

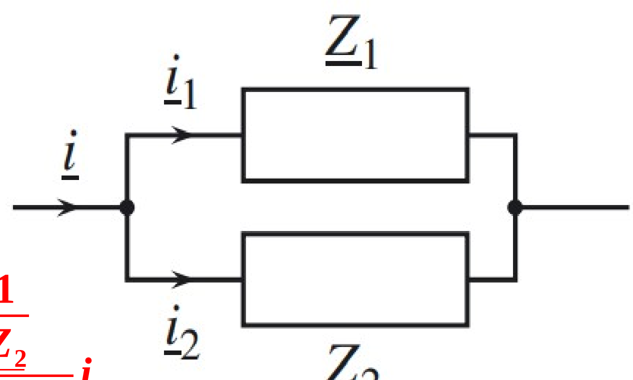
Exemple condensateurs en série $\underline{Z}_{eq} = \underline{Z}_{c1} + \underline{Z}_{c2} = \dfrac{1}{j\omega C_1} + \dfrac{1}{j\omega C_1} = \dfrac{1}{j\omega}\left(\dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2}\right) = \dfrac{1}{j\omega}\dfrac{1}{C_{eq}} \Rightarrow \dfrac{1}{C_{eq}} = \dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2}$

Application directe :

Les formules du diviseur de tension et de courant sont encore valables avec les impédances complexes :



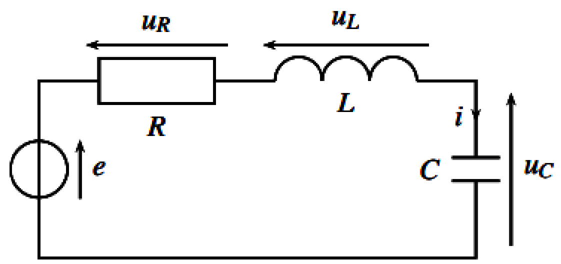
$$\underline{u}_2 = \frac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}\underline{u}$$



$$\underline{i}_2 = \frac{\dfrac{1}{\underline{Z}_2}}{\dfrac{1}{\underline{Z}_1} + \dfrac{1}{\underline{Z}_2}}\underline{i}$$

Application directe

Donner l'expression de la tension complexe aux bornes de chaque dipôles dans un circuit RLC série en RSF en fonction de la tension complexe e(t)



$$\underline{u}_C = \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_R+\underline{Z}_C+\underline{Z}_L}\underline{e} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R+\frac{1}{jC\omega}+jL\omega}\underline{e} = \frac{1}{-LC\omega^2+1+jRC\omega}\underline{e}$$

$$\underline{u}_R = \frac{\underline{Z}_R}{\underline{Z}_R+\underline{Z}_C+\underline{Z}_L}\underline{e} = \frac{R}{R+\frac{1}{jC\omega}+jL\omega}\underline{e} = \frac{1}{1+\frac{1}{jRC\omega}+\frac{jL}{R}\omega}\underline{e}$$

III Le phénomène de résonance

Définition :

Il y a un phénomène de résonance quand l'amplitude $X_0(f)$ de la réponse sinusoïdale d'un système soumis à une excitation sinusoïdale, d'amplitude fixe E_0 mais de fréquence variable, passe par un maximum pour une valeur f_R de la fréquence de l'excitation ;

Voc : f_R est appelée fréquence de résonance du système

mathématiquement $\frac{dX}{df}(f=f_R)=0$ et $\frac{d^2X}{df^2}(f<f_R)<0$

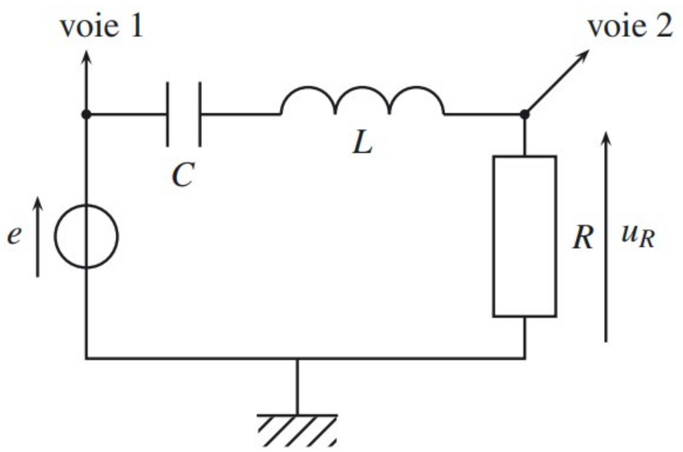
III.1) Résonance en intensité dans un circuit RLC en RSF

a) Calcul de la réponse sinusoïdale complexe

On suppose que la tension imposée par le générateur s'écrit e(t) = E_0 cos(ωt) avec ω = 2π f . Quelle est l'expression de $\underline{u}_R(t)$?

$$\underline{e}(t)=E_0 e^{j\omega t} \qquad \underline{u}_R(t)=\underline{u}_{R0}e^{j\omega t}=U_{R0}e^{j\phi}e^{j\omega t}$$

On applique la formule du diviseur de tension complexe



$$\underline{u}_R = \frac{\underline{Z}_R}{\underline{Z}_R+\underline{Z}_L+\underline{Z}_c}\underline{e} \Rightarrow \underline{u}_R = \frac{R}{R+jL\omega+\frac{1}{jC\omega}}\underline{e}$$

$$\underline{u}_R = \frac{1}{1+j\left(\frac{L}{R}\omega-\frac{1}{RC\omega}\right)}\underline{e}$$

Rmq en posant $\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}}$ **et** $Q=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$

on a $\frac{Q}{\omega_0}=\frac{L}{R}$ **et** $Q\omega_0=\frac{1}{RC}$

$$\underline{u}_R=\frac{1}{1+jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)}\underline{e}$$

ici la sortie est $u_R(t)$ car u_R est proportionnel à i(t) : **avec $\underline{u_R(t)}$ = R $\underline{i(t)}$** *(conv récépteur)*

$$\underline{i}(t)=\frac{\frac{\underline{e}}{R}}{1+jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

pour les amplitudes complexes on a : $\underline{u_{R0}}=R\,\underline{i_0}\Rightarrow\underline{i_0}=\frac{u_{R0}}{R}$

b) Expression de l'amplitude réelle de l'intensité du courant et de la phase à l'origine de l'intensité:

En RSF on aura $i(t)=I_0\cos(\omega t+\phi)$ et en notation complexe $\underline{i(t)}=\underline{i_0}e^{j\omega t}=I_0e^{j\phi}e^{j\omega t}$

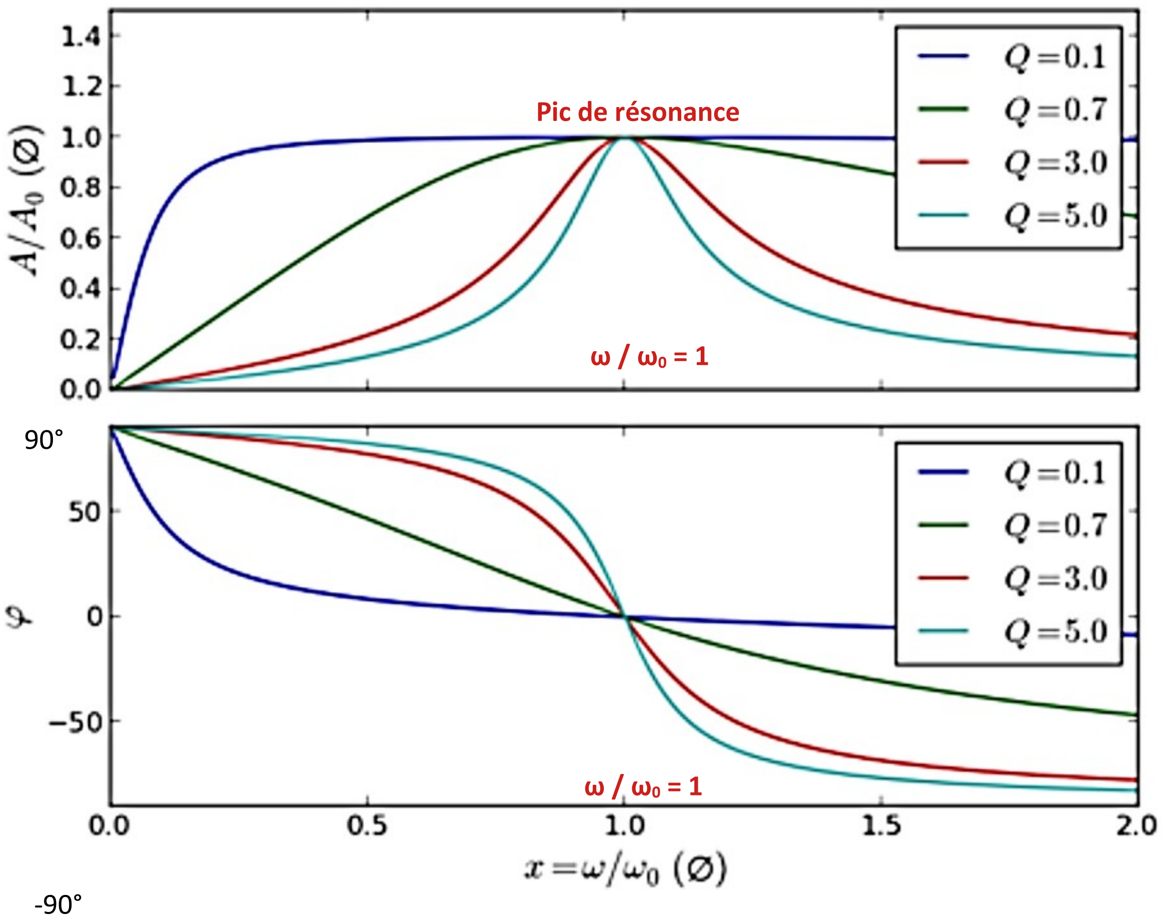
$$I_0(\omega)=|\underline{i_0}|=\frac{|\underline{u_{R0}}|}{R}=\frac{\frac{E_0}{R}}{\sqrt{1+\left(\frac{L}{R}\omega-\frac{1}{RC\omega}\right)^2}}=\boxed{\frac{\frac{E_0}{R}}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}}$$

et

$$\phi=arg(\underline{u_{R0}})=arg(\underline{i_0})=arg\left(\frac{E_0}{R}\right)-arg\left(1+jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)\right)$$

$$\boxed{\phi(\omega)=-\arctan\left(Q\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)\right)}$$

$$\frac{A}{A_0}=\frac{I_0(\omega)}{\frac{E_0}{R}}$$



Le pic de résonance est d'autant plus étroit que Q est grand. On dit aussi que la résonance est plus aiguë quand Q est grand (on parle d'acuité de la résonance)

Justification de l'allure de φ(ω)

en basse fréquence $\omega \ll \omega_0$

$$Q\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)\approx -Q\frac{\omega_0}{\omega}$$

$$\lim_{\omega\to 0}\phi(\omega)=\lim_{\omega\to 0}\left(-\arctan\left(-Q\frac{\omega_0}{\omega}\right)\right)=-\left(\frac{-\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to\infty}(\arctan(-x))=\frac{-\pi}{2}$$

en haute fréquence $\omega \gg \omega_0$

$$Q\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)\approx Q\frac{\omega}{\omega_0}$$

$$\lim_{\omega\to+\infty}\phi(\omega)=\lim_{\omega\to\infty}\left(-\arctan\left(Q\frac{\omega}{\omega_0}\right)\right)=\frac{-\pi}{2}$$

à la pulsation propre du système : $\phi(\omega_0)=-\arctan(0)=0$

c) pulsation de résonance en intensité:

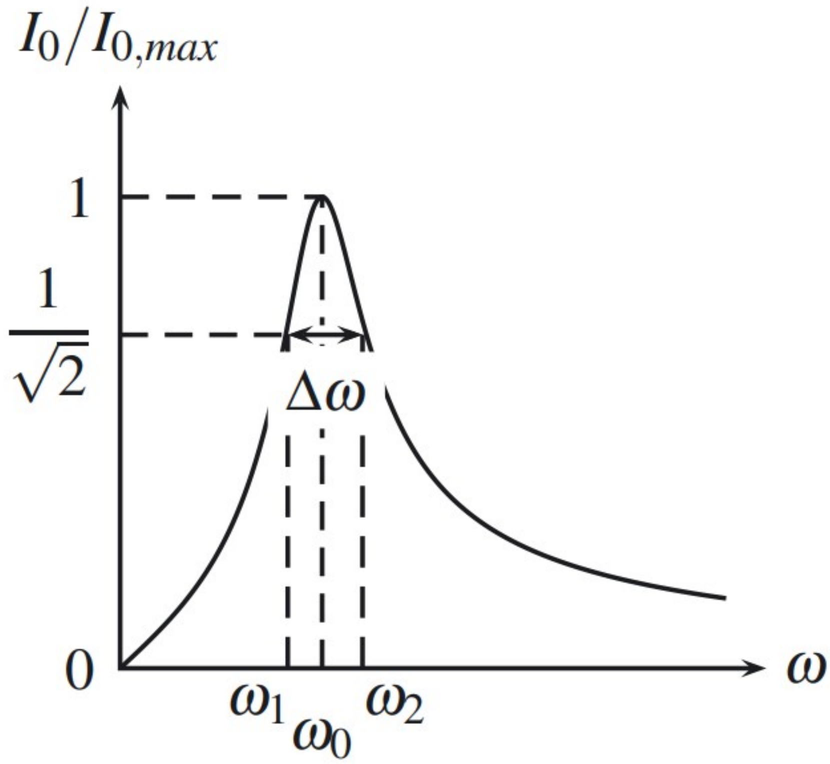
$I_0(\omega)$ atteint un maximum si l'argument de la racine carré $A(\omega)=1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2$ atteint **un minimum**.

comme $Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2$ est une grandeur positive ou nulle $A(\omega)$ sera minimale pour une pulsation ω_R du gbf telle que $Q^2\left(\frac{\omega_R}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega_R}\right)^2=0$ soit pour $\boldsymbol{\omega_R=\omega_0}$

La pulsation de résonance en intensité est égale à la pulsation propre du circuit RLC (mais pas à ça pseudo-pulsation)

Rmq à la résonance ($\omega = \omega_R$) l'amplitude de l'intensité est maximale est vaut : $\boldsymbol{I_{0max}=I_0(\omega_R)=\frac{E_0}{R}}$

d) Lien entre acuité de la résonance et facteur de qualité



Notion de bande passante : c'est l'intervalle de pulsation de largeur $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$. **Pour lequel**

$$I_0(\omega) \geq \frac{I_{0max}}{\sqrt{2}} \quad si\ \omega \in [\omega_1, \omega_2]$$

Plus Δω est faible, plus la résonance est aigue

Déterminons Δω en fonction de Q et ω_0

pour ω à la limite de la bande passant on a :

$$I_0(\omega) = \frac{I_{0max}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{\frac{E_0}{R}}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} = \frac{\frac{E_0}{R}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \sqrt{1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2} = \sqrt{2}$$

Ainsi $1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 = 2$ **et** $Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 = 1$

soit $\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right) = \frac{1}{Q}$ $\qquad\qquad$ $\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right) = \frac{-1}{Q}$ soit

x ω : $\frac{\omega^2}{\omega_0} - \omega_0 - \frac{\omega}{Q} = 0$ $\qquad\qquad$ $\frac{\omega^2}{\omega_0} - \omega_0 + \frac{\omega}{Q} = 0$

$$\omega^2 \mp \omega\frac{\omega_0}{Q} - \omega_0^2 = 0$$

Deux équations polynomiales de même discriminant , $\Delta = \omega_0^2\left(\frac{1}{Q^2}+4\right)$

soit 4 racines , on ne garde que les racines positives (car la pulsation est une grandeur positive)

$\omega_2 = \frac{+\omega_0}{2Q} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$ $\qquad\qquad$ $\omega_1 = \frac{-\omega_0}{2Q} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$

finalement

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{2Q} - \left(\frac{-\omega_0}{2Q}\right)$$

$$\boxed{\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}}$$

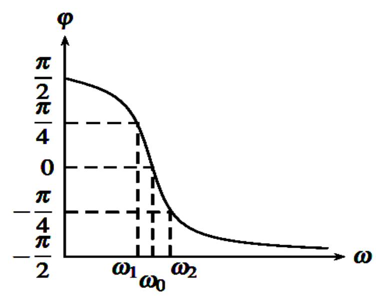
La largeur de la bande passante est inversement proportionnelle au facteur de qualité

<u>Méthode pour déterminer Q et ω_0 à partir du graphe de $I_0(\omega)$:</u>

- On cherche l'abscisse ω pour laquelle **l'amplitude de i est maximale** : on en déduit ω_0
- On relève les deux pulsations ω_1 et ω_2, de part et d'autre de ω_0, pour lesquelles **l'amplitude de l'intensité est égale à sa valeur à la résonance divisée par** $\sqrt{2}$.
- **Finalement on calcule** $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$

<u>Méthode pour déterminer Q et ω_0 à partir du graphe de φ(ω)</u>

-On cherche l'abscisse ω pour laquelle **le déphasage entre i(t) et e(t) passe par 0** : on en déduit
- On relève les pulsations ω_1 et ω_2 pour lesquelles **le déphasage vaut −π/4 et + π /4** respectivement.
- **Finalement on calcule** $Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$



III.2) oscillateur mécanique : résonance en élongation

a) Détermination de l'amplitude complexe

Rappel de l'équation différentiel obtenue au $\ddot{u}(t)+\frac{\omega_0}{Q}\dot{u}(t)+\omega_0^2 u(t)=\omega_0^2\frac{F_0}{k}\cos(\omega t)$

avec u(t) = z(t) – z_{eq} le déplacement vertical du centre de masse du système par rapport à la position d'équilibre

Passage à la notation complexe :

$$-\omega^2\underline{u}(t)+\frac{\omega_0}{Q}j\omega\,\underline{u}(t)+\omega_0^2\underline{u}(t)=\omega_0^2\frac{F_0}{k}e^{j\omega t}$$

$$\underline{u}(t)\left(-\omega^2+\frac{\omega_0}{Q}j\omega+\omega_0^2\right)=\omega_0^2\frac{F_0}{k}e^{j\omega t}\Rightarrow\underline{u}(t)=\frac{\omega_0^2\frac{F_0}{k}e^{j\omega t}}{\omega_0^2-\omega^2+j\omega\frac{\omega_0}{Q}}$$

$$\underline{u}(t)=\underline{u_0}e^{j\omega t}\Rightarrow\underline{u_0}=\frac{\omega_0^2\frac{F_0}{k}}{\omega_0^2-\omega^2+j\omega\frac{\omega_0}{Q}}=\frac{\omega_0^2 z_0}{\omega_0^2-\omega^2+j\omega\frac{\omega_0}{Q}}$$

soit $\underline{u_0}=\frac{z_0}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2+j\frac{\omega}{Q\omega_0}}$

$z_0=\frac{F_0}{K}$ $\quad Q=\frac{1}{\lambda}\sqrt{mk}$ $\quad \omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$

b) Expression de l'amplitude réelle et de la phase à l'origine pour u(t)

en RSF on aura $u(t)=U_0\cos(\omega t+\phi)$

$$\boxed{U_0(\omega)=|\underline{u_0}|=\frac{z_0}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2+\left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}}}$$

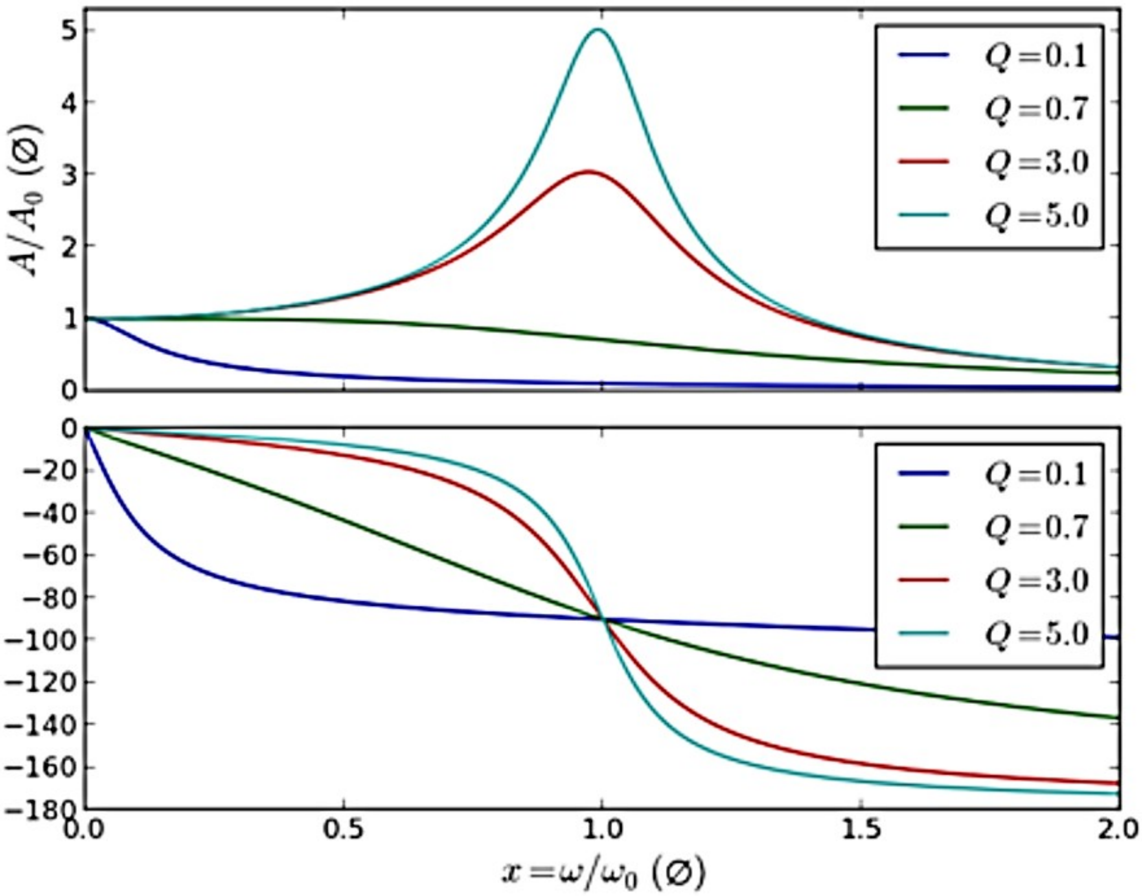
$$\phi=arg(\underline{u_0})=arg(z_0)-arg\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2+j\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)$$

$$\boxed{\phi(\omega)=-arg\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2+j\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)}$$

L'expression de φ dépendra du signe de $1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2$

Résonance de type Élongation (résonateur mécanique) / Tension aux bornes de C (résonateur électrique)

$\frac{A}{A_0}=\frac{U_0(\omega)}{z_0}$



Rmq **si Q est suffisamment faible, il n'y a pas de résonance (pas de maximum local pour ω>0)**
si Q suffisamment grand, l'acuité de la résonance augmente quand Q augmente

Justification de l'allure de φ(ω)

en basse fréquence ω<<ω₀ $\phi=-arg(1-(\frac{\omega}{\omega_0})^2+j\frac{\omega}{Q\omega_0})\approx -arg(1-(0)^2+j0)\approx -arg(1)=0$

en haute fréquence ω>>ω₀ $\phi=-arg(1-(\frac{\omega}{\omega_0})^2+j\frac{\omega}{Q\omega_0})\approx -arg(-(\frac{\omega}{\omega_0})^2+j\frac{\omega}{Q\omega_0})=-(\pi+\arctan(\frac{\frac{\omega}{Q\omega_0}}{(\frac{\omega}{\omega_0})^2}))$

$\phi\approx-(\pi+\arctan(\frac{\omega_0}{Q\omega}))$ **et comme ω⟶ + ∞** $\arctan(\frac{\omega_0}{Q\omega})\rightarrow\arctan(0)=0$ **finalement :** $\lim_{\omega\to\infty}\phi=-\pi$

à la pulsation propre du système : $\phi(\omega_0)=-arg(0+\frac{j}{Q})=\frac{-\pi}{2}$

c) Phénomène de résonance, influence du facteur de qualité

Pour avoir résonance il faut que U_0 (ω) admette un maximum (pour une pulsation non nulle)

$U_0=|\underline{u}_0|=\frac{z_0}{\sqrt{\left(1-(\frac{\omega}{\omega_0})^2\right)^2+\left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}}$ **admette un max si** $D(\omega)=\left(1-(\frac{\omega}{\omega_0})^2\right)^2+\left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2$ **admet un min**

on pose $x=\frac{\omega}{\omega_0}$ on cherche maintenant le min de $D(x)=(1-x^2)^2+\frac{x^2}{Q^2}$

$$\frac{d}{dx}D(x)=2\times(-2x)(1-x^2)+2\frac{x}{Q^2}=2x(2x^2-2+\frac{1}{Q^2})$$

pour une valeur $x=x_r$ telle que D(x) est minimal on a : $\frac{d}{dx}D(x=x_R)=0\Rightarrow=2x_r(2x_R^2-2+\frac{1}{Q^2})=0$

soit $x_r = 0$ ce qui correspond à ω =0 (cela ne nous intéresse pas car on étudie ici le régime sinusoïdal donc ω>0)

soit $\frac{1}{Q^2}+2x_R^2-2=0\Rightarrow x_R^2=1-\frac{1}{2Q^2}\Rightarrow x_R=\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}}$

x_R (non nul et réel) existe seulement si $1-\frac{1}{2Q^2}>0\Rightarrow\frac{1}{2Q^2}<1\Rightarrow Q>\frac{1}{\sqrt{2}}$

Pour le système étudié la résonance ne peut avoir lieu que si $Q>\frac{1}{\sqrt{2}}$

Dans ce cas, la pulsation de résonance est telle que $x_R=\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}}\Rightarrow\boxed{\omega_R=\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}}}$

ici $\omega_R\neq\omega_0$ $\omega_R<\omega_0$
plus Q augmente plus ω$_R$ **augmente et si Q>>1 on a** $\omega_R\approx\omega_0$

$\omega_R\approx\omega_0$

d) amplitude des oscillations à la résonance

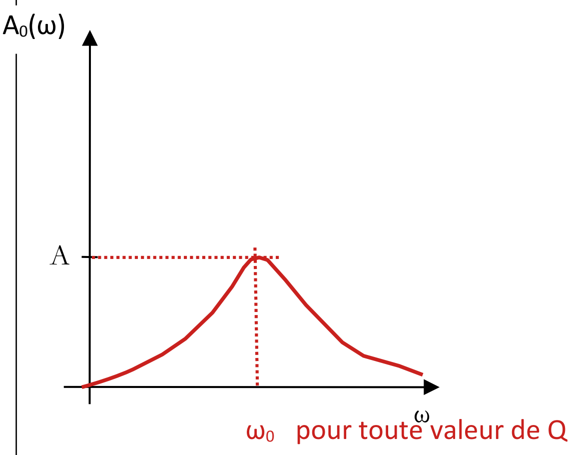
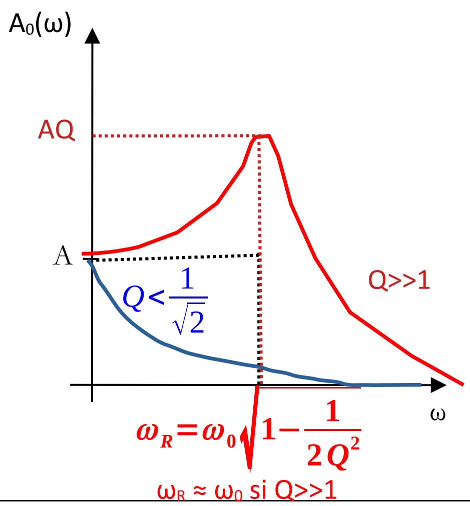
$$U_0(\omega_R)=\frac{z_0}{\sqrt{\left(1-(\frac{\omega_R}{\omega_0})^2\right)^2+\left(\frac{\omega_R}{Q\omega_0}\right)^2}}\approx\frac{z_0}{\sqrt{(1-1^2)^2+(\frac{1}{Q})^2}}$$

à la résonance , si Q>>1

$$\boxed{U_0(\omega_R)=\frac{z_0}{\frac{1}{Q}}\approx Q z_0}$$

Plus le facteur de qualité est grand plus l'amplitude des oscillations est grande

BILAN Comparaison des deux types de résonances

Signal en régime permanent : A(t) = Acos(ωt+φ)		
	Résonance « type intensité »	**Résonance « type élongation »**
Exemples	▪ Exemple électrique : i(t) ▪ Exemple mécanique : v(t)	▪ Exemple électrique : $u_c(t)$ ▪ Exemple mécanique : $u(t) = z(t) - z_{eQ}$
Condition sur Q pour avoir résonance	POSSIBLE POUR N'IMPORTE QUELLE VALEUR DE Q	$Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$
Pulsation de résonance ω_R	$\omega_0 = \omega_R$	$\omega_R = \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}}$
Amplitude complexe $\underline{A_0}$ du signal cherché	$\underline{A_0} = \frac{A}{1+jQ(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega})}$	$\underline{A_0} = \frac{A}{1-(\frac{\omega}{\omega_0})^2 + j\frac{1}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}}$
Allure de $A_0(\omega)$ $A_0(\omega) = \lvert\underline{A_0}\rvert$		
Allure de φ(ω)