TD010 – RÉGIME SINUSOÏDAL FORCÉ

Exercice 1 : Questions de cours (à savoir faire sans le cours sous les yeux)

1. Soit le signal $x(t)=x_0\cos(\omega t+\varphi)$. Écrire $x(t)$ en notation complexe $\underline{x}(t)$. On introduira pour cela l'amplitude complexe $\underline{x}_0$ (à définir).

2. Soit un circuit comportant une résistance R, un condensateur de capacité C et un GBF délivrant un signal sinusoïdal $e(t)=E_0\cos(\omega t)$.
   a Etablir l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes du condensateur $U_C(t)$.
   b On pose $U_C(t)=U_{C0}\cos(\omega t+\varphi)$. Etablir l'expression de l'amplitude complexe $\underline{U}_{C0}$.
   c En déduire l'expression de U_{C0} en fonction de E_0, R, C et ω.
   d En déduire l'expression de φ en fonction de R, C et ω.

3. Etablir l'expression de l'impédance d'une résistance.

4. Etablir l'expression de l'impédance d'une bobine. Quel est le comportement d'une bobine à basse fréquence ? Même question à haute fréquence.

5. Etablir l'expression de l'impédance d'un condensateur. Quel est le comportement d'un condensateur à basse fréquence ? Même question à haute fréquence.

6. Donner l'impédance équivalente $\underline{Z}_{EQ}$ de deux impédances en série.

7. Donner l'impédance équivalente $\underline{Z}_{EQ}$ de deux impédances en parallèle.

8. On considère un circuit RLC série alimenté par un GBF délivrant un signal sinusoïdal $e(t)=E_0\cos(\omega t)$. On pose $I = I_0\cos(\omega t+\varphi)$ (intensité dans le circuit).
   a Etablir l'expression de l'amplitude complexe $\underline{I}_0$.
   b En déduire l'expression de I_0 en fonction de R, L, C, ω et E_0, puis en fonction de E_0, R, Q, ω et ω_0.
   c En déduire l'expression de la pulsation de résonance ω_r.
   d Tracer l'allure de $I_0(\omega)$ pour plusieurs facteurs de qualité. Quelle est l'influence de Q sur l'acuité à la résonance ?
   e Etablir l'expression de la bande passante en fonction de Q et ω_0.
   f Déterminer l'expression de $\varphi(\omega)$, puis tracer son allure. Quelle est l'influence de Q sur l'allure de $\varphi(\omega)$?

9. Soit une masse m suspendue à un ressort, soumise à son poids, à la tension du ressort et à une force de frottements $\vec{F}=-\lambda\vec{v}$. L'extrémité du ressort est distant verticalement de $l(t)=z_0\cos(\omega t)$ de l'origine O du repère.
   a Etablir l'équation différentielle vérifiée par l'élongation $u(t) = z(t)-z_{EQ}$.
   b On pose $u(t) = u_0\cos(\omega t+\varphi)$. Exprimer l'amplitude complexe $\underline{u}_0$ en fonction de z_0, ω_0, Q et ω.
   c Montrer que la résonance en élongation n'existe que pour des facteurs de qualité supérieurs à une valeur que l'on déterminera.
   d Montrer que, lorsque la résonance existe, elle se produit à une certaine fréquence de résonance dont on établira l'expression.
   e Tracer l'allure de $u(\omega)$ pour plusieurs facteurs de qualité.
   f Déterminer l'expression de $\varphi(\omega)$, puis tracer son allure. Quelle est l'influence de Q sur l'allure de $\varphi(\omega)$?

10. Comparer les deux types de résonance, par exemple sous forme de tableau (exemples, pulsation de résonance, condition sur Q pour avoir résonance, expression de l'amplitude complexe, allure de l'amplitude, de la phase).

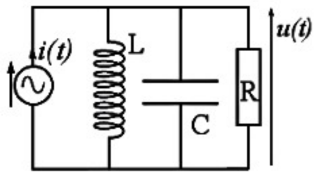
Exercice 2 : Résonance en tension d'un circuit RLC série ★

On s'intéresse à la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur dans un circuit RLC série alimenté par un GBF délivrant un signal sinusoïdal $e(t)=E_0\cos(\omega t)$.

1 Etablir l'équation différentielle vérifiée par $u_C(t)$. On introduira ω_0 et Q que l'on définira.
2 On pose $u_C(t)= u_{C0}\cos(\omega t+\varphi)$. A l'aide d'un pont diviseur de tension, exprimer l'amplitude complexe $\underline{u}_{C0}$ en fonction de E_0, R, L, C et ω. Retrouver ce résultat en partant de la question 1.
3 En déduire l'expression de $\underline{u}_{C0}$ en fonction de E_0, ω, ω_0 et Q.
4 En déduire l'expression de u_{C0} en fonction de E_0, ω, ω_0 et Q.
5 Comment doit-on choisir le facteur de qualité pour qu'il y ait résonance en tension aux bornes du condensateur ?
6 Dans le cas où la résonance existe, quelle est l'expression de la pulsation de résonance ?
7 Tracer u_{C0} pour différents facteurs de qualité.
8 En utilisant la question 3., déterminer l'expression de φ en fonction de ω, ω_0 et Q.
9 Etudier les limites de φ pour $\omega \to 0$, $\omega \to \omega_0$ et $\omega \to +\infty$. En déduire l'allure de $\varphi(\omega)$.

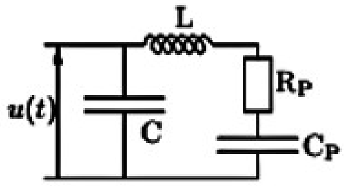
Exercice 3 : Résonance dans un circuit RLC parallèle ★

Le circuit représenté est alimenté par une source de courant sinusoïdal d'intensité $i(t)=I_0\cos(\omega t)$. On pose $u(t) = u_m\cos(\omega t+\varphi)$.



1 Exprimer l'amplitude complexe $\underline{U}$ de la tension u(t) en fonction de R, L, C, ω et I_0.
2 Montrer que u_m passe par un maximum pour une valeur de pulsation ω_0 à déterminer.
3 Tracer l'allure de $u_m(\omega)$.
4 Etablir l'expression de $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$, où ω_1 et ω_2 sont les pulsations telles que $u_m = \dfrac{u_{mMAX}}{\sqrt{2}}$
5 Exprimer en fonction de R, L et C le facteur de qualité du circuit, défini par $\dfrac{1}{Q}=\dfrac{\Delta\omega}{\omega_0}$.

Exercice 4 : Adaptation d'impédance ★ ★



Un dipôle électrocinétique linéaire passif est, en régime sinusoïdal forcé, caractérisé par son impédance complexe $\underline{Z} = R + jX$. Le système étudié (réacteur à plasma) est modélisé par un circuit série R_PC_P. On veut diminuer au maximum la partie imaginaire (appelée partie réactive) de cette impédance $\underline{Z}_P$. Pour cela, on réalise le circuit ci-contre.

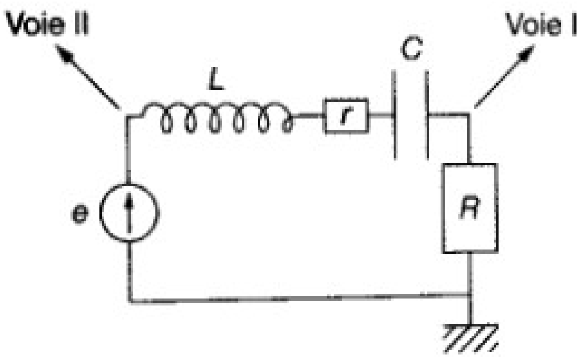
1 Exprimer l'admittance complexe Y, définie comme $\underline{Y} = 1/\underline{Z}$, du dipôle de la figure ci-dessus.
2 En déduire l'expression de C qui annule la partie réactive de $\underline{Z}$.
3 La condition précédente étant réalisée, déterminer l'expression de l'impédance $\underline{Z}$ totale du dipôle, notée alors R_1.

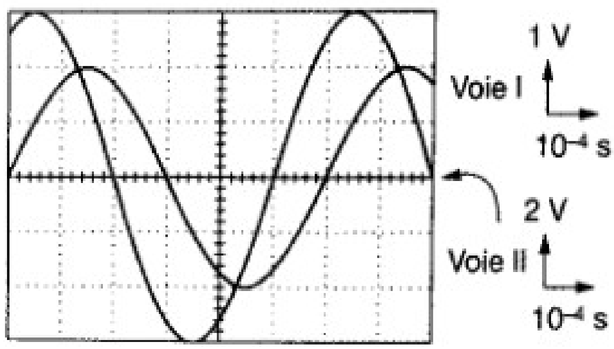
Exercice 5: Détermination des caractéristiques d'un circuit (résolution problème) ★ ★ :

Dans le circuit de la figure ci-dessous figure une résistance inconnue, une bobine de résistance r inconnue et d'inductance L=21mH, ainsi qu'un condensateur de capacité C inconnue. Le générateur fournit une tension sinusoïdale e(t) et on observe sur l'oscilloscope les courbes ci-dessous.

Une résonance a lieu pour la tension u (voie I) à la fréquence f_0 = 1550Hz.

Question : Déterminer les valeurs de tous les composants.





Exercice 6: La couleur du ciel 💣 💣 ★ ★ ★

Pour décrire l'interaction entre une onde lumineuse, caractérisée par le vecteur champ électrique $\vec{E}(t)=E_0\cos(\omega t)\vec{e_x}$, et les électrons de la couche externe d'un atome, on utilise l'hypothèse de l'électron élastiquement lié due à J.J. Thomson : l'électron est rappelé vers le centre O de l'atome par une force de rappel élastique isotrope $\vec{F}=-k\overrightarrow{OM}$, et il est freiné par une force de frottement visqueux linéaire (coefficient h). On précise que la force subie par une charge q placée dans un champ électrique $\vec{E}$ est $\vec{F_e}=q\vec{E}$. Le poids est négligeable.

3 Établir les équations du mouvement d'un électron quand il est excité par $\vec{E}(t)$. On notera –e et m la charge et la masse de l'électron et on posera : $2\alpha=\frac{h}{m}$ et $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$.

4 Démontrer qu'en régime permanent, l'électron oscille parallèlement à $\vec{e_x}$.

5 Déterminer, en régime permanent, l'amplitude de x(t) et celle de l'accélération $a_x(t)$.

6 Cet atome est éclairé par de la lumière blanche, composée de champs ayant toutes les pulsations ω comprise entre ω_1 (rouge) et ω_2 (violet) avec $\omega_2 \approx 2\omega_1$. Sachant que ω_2 et α sont tous les deux très inférieurs à ω_0, montrer que dans ces conditions l'amplitude de $a_x(t)$ est proportionnelle à ω^2.

7 Sachant qu'un électron accéléré rayonne une puissance lumineuse proportionnelle au carré de son accélération, expliquer alors la couleur du ciel…

Exercice 7 : Oscillateur à quartz (extrait concours Mines) 💣 💣 💣 ★ ★

N.B. Aucune connaissance sur les quartz et la piézo-électricité n'est requise pour traiter ce problème dans lequel les candidats sont guidés par de nombreuses questions indépendantes et progressives.

Le quartz est une forme particulière de cristal de silice. Il présente des propriétés physiques très intéressantes : la piézo-électricité. Quand on comprime un morceau de quartz dans une direction particulière, une tension apparaît aux bornes du cristal (c'est l'effet piézo-électrique). Réciproquement, quand on applique une tension aux bornes d'un quartz, ce dernier se déforme proportionnellement à la tension appliquée (c'est l'effet piézo-électrique inverse) Ainsi, le quartz est très intéressant pour l'électronique car on parvient à réaliser des circuits oscillants, à base de résonateur à quartz, très stables dans le temps. Actuellement, le quartz est remplacé par certaines céramiques piézo-électriques.

Partie A - Modélisation d'un résonateur à quartz

A-1) Modèles mécanique et électrique du résonateur à quartz

Un cristal de quartz est taillé sous forme de pastille cylindrique mince. La base circulaire présente un diamètre d=1cm et l'épaisseur de la pastille est e=0,2mm. Des électrodes métalliques (en or généralement) sont déposées sur chacune des faces circulaires du quartz (on suppose que ces faces sont totalement métallisées) (figure 1). On parle d'électrodes de connexion. On a ainsi réalisé un condensateur plan.

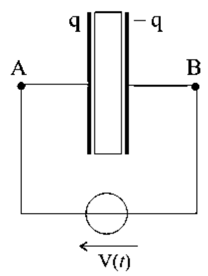


Figure 1 : schéma d'un quartz alimenté par une tension V(*t*)

D'un point de vue <u>mécanique</u>, lorsque l'on soumet le disque piézo-électrique à une tension sinusoïdale V(t) = Vcos(ωt), il va être, dans le cadre d'une approximation linéaire, le siège d'une vibration mécanique sinusoïdale sous l'effet d'une force extérieure proportionnelle à cette tension.

<u>Modélisation proposée</u>: un élément de masse m du corps piézo-électrique, placé à une distance x de son point de repos, est soumis aux forces suivantes, toutes orientées selon un axe (Ox) que l'on ne précise pas ici :

• une force de rappel type élastique $\vec{T}=-kx\,\vec{e_x}$qui a pour origine la rigidité du matériau,

• des frottements supposés proportionnels à la vitesse et de la forme $\vec{F_f}=-h\vec{v}$

• une force due à l'effet piézo-électrique $\vec{F_p}=\beta V(t)\vec{e_x}$

• le poids est négligé devant les autres forces.

A-1-a) En appliquant le principe fondamental de la dynamique au petit élément de masse m dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen, établir l'équation différentielle vérifiée par x(t) en supposant que le mouvement se fasse selon l'axe (Ox).

D'un point de vue <u>électrique</u>, la charge totale q apparaissant sur les électrodes planes a deux origines :

• Les deux faces planes du disque forment un condensateur de capacité Cp, d'où une charge $q_1(t)$,

• l'effet piézo-électrique provoque l'apparition d'une charge $q_2(t)$ proportionnelle à x : $q_2(t) = \gamma x(t)$.

A-1-b) On montre que la capacité d'un condensateur plan vaut $C_p=\frac{\varepsilon_0\varepsilon_r S}{e}$ où S est la surface d'une électrode, e l'épaisseur du condensateur, ε_0 la permittivité du vide (ε_0 =8,85.10^{-12}F.m^{-1}), et ε_r une constante valant pour le quartz ε_r =2,3.

- Estimer alors la capacité C_p appelée capacité de connexion.

- Quelle est la relation (simple) entre la charge q_1, la capacité C_p et la tension V(t) ?

A-2) Etude de l'impédance équivalente du quartz

Dans cette partie, on considère que la résistance R du quartz est nulle. Le schéma électrique simplifié est alors donné sur la figure 3. Pour les applications numériques, on prendra L=500mH, C_S=0,08pF et C_P=8pF.

On se placera toujours en régime sinusoïdal forcé (les grandeurs dépendront de la pulsation ω).

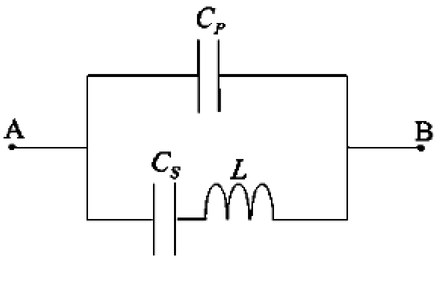


Figure 3 : modèle électrique d'un quartz

A-2-a) Calculer alors l'impédance complexe du quartz, vue entre les bornes A et B. On l'écrira sous forme :

$$\underline{Z}_{AB}=-\left(\frac{j}{\alpha\omega}\right)\frac{1-\dfrac{\omega^2}{\omega_r^{\,2}}}{1-\dfrac{\omega^2}{\omega_a^{\,2}}}$$

où j est le nombre imaginaire pur tel que $j^2=-1$. On donnera, en fonction de L, C_S et C_P les expressions de α, ω_a^2, ω_r^2. Montrer aussi que $\omega_a^2 > \omega_r^2$.

On pourra admettre les résultats de cette question pour poursuivre la résolution du problème.

A-2-b) Donner les valeurs numériques des fréquences f_a et f_r correspondant respectivement aux pulsations ω_a et ω_r. On prendra 3 chiffres significatifs.

A-2-c) Etudier le comportement inductif ou capacitif du quartz en fonction de la fréquence. On rappelle qu'un dipôle a un comportement inductif (respectivement capacitif) si la partie imaginaire de son impédance est positive (respectivement négative).

A-2-d) Tracer l'allure de Z_{AB} = $||\underline{Z}_{AB}||$, module de l'impédance complexe du quartz, en fonction de la fréquence.

A-3) Etude expérimentale de la résonance d'un quartz

On veut tracer expérimentalement la courbe donnant l'impédance du quartz en fonction de la fréquence d'excitation. On dispose d'un générateur basses fréquences pouvant délivrer une tension sinusoïdale d'amplitude réglable. Le GBF possède une résistance interne Rg. On dispose d'une résistance R_V variable, d'un quartz et d'un oscilloscope. **Dans cette question, on néglige toujours la résistance du quartz devant les autres résistances sauf dans la question A-3-c.** On réalise alors le montage de la figure 4 suivante.

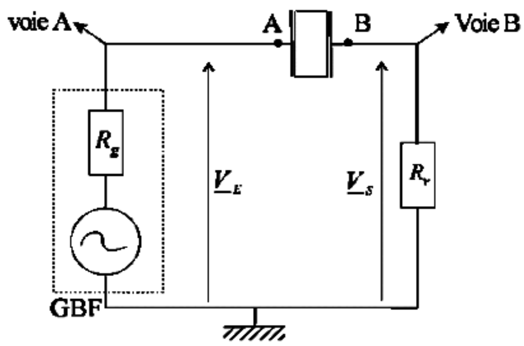


Figure 4 : montage expérimental pour l'étude de la résonance du quartz

A-3-a) Calculer le rapport de la tension de sortie $\underline{V}_S$ à celle d'entrée $\underline{V}_E$: $\underline{H} = \underline{V}_S / \underline{V}_E$ en fonction de R_V et de $\underline{Z}_{AB}$.

A-3-b) On choisit, pour chaque fréquence, la résistance R_V de telle façon que $||\,\underline{H}\,|| = 1/2$. Que vaut alors le module de l'impédance du quartz en fonction de R_V ?

A-3-c) Autour du pic de résonance d'intensité situé vers 796kHz, on mesure une bande passante de 50Hz. Quelle est la valeur numérique du facteur de qualité Q du quartz ? Commenter cette valeur. En supposant que le facteur de qualité soit donné par la relation $Q=\dfrac{L\,\omega_0}{R}$ (ω_0 étant la pulsation de résonance), estimer la valeur de la résistance R du quartz.