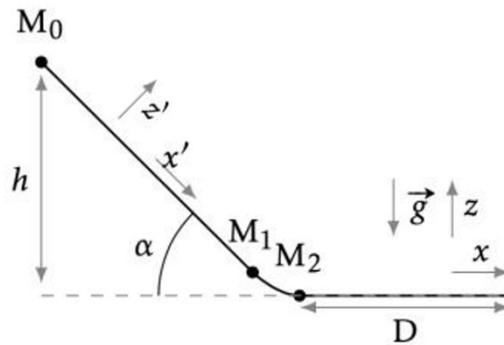


## Exercices supplémentaires de mécanique

## Exercice 1

Un skieur, partant de l'arrêt du point  $M_0$  (vitesse nulle), descend une pente rectiligne, de hauteur  $h$  et d'inclinaison  $\alpha$  (voir schéma). Il poursuit sa trajectoire sur un plan horizontal. Le raccordement entre ces deux portions rectilignes s'effectue selon une courbe  $M_1M_2$  dont on ne précisera pas la nature et suffisamment courte pour qu'on puisse confondre les altitudes de  $M_1$  et  $M_2$  :  $z(M_1) = z(M_2) = 0$ . On étudie dans cette partie l'effet de diverses sources de frottements sur la distance parcourue  $D$  avant l'arrêt.

On note  $x'$  l'abscisse le long de la pente lors de la phase de descente. Attention,  $x'$  est une longueur et non la dérivée temporelle de  $x$ . Les dérivées temporelles sont indiquées par un point (c'est-à-dire :  $\dot{x} = \dot{\frac{dx}{dt}}$  et  $\dot{x}' = \frac{dx'}{dt}$ ).



On considère qu'il existe une force de frottements solides caractérisée par le coefficient  $\mu$ .

1. En utilisant les données de l'énoncé, déterminer la valeur minimale de l'angle  $\alpha$  pour laquelle le glissement peut commencer en  $M_0$ . On considère dans toute la suite que  $\alpha$  est supérieur à cette valeur.

2. Déterminer la vitesse, notée  $v_0$ , quand le skieur parvient en  $M_1$  en fonction de  $g, h, \mu$  et  $\alpha$ . Commenter rigoureusement et de manière détaillée l'expression trouvée. Ce commentaire s'accompagnera d'une application numérique pour  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ .

3. On ne considère pas l'effet des frottements entre  $M_1$  et  $M_2$ . Autrement dit, on considère qu'en  $M_2$ , la vitesse du skieur est  $v_0 \vec{e}_x$ . Déterminer l'expression de la distance  $D$  parcourue à partir du point  $M_2$  sur le plan horizontal avant l'arrêt du skieur. Commenter rigoureusement et de manière détaillée l'expression trouvée. Ce commentaire s'accompagnera d'une application numérique pour  $\alpha = \frac{\pi}{4}$ .

On considère maintenant qu'il existe, en plus de la force de frottements solides considérée partie B (et qui est toujours à considérer ici), une force de frottements fluides liée à l'air. Cette force  $\vec{f}$  est de norme  $\beta v^2$ , avec  $v$  la norme de la vitesse du point matériel et  $\beta$  une constante positive. Sa direction est celle du vecteur vitesse, et son sens est opposé à celui du vecteur vitesse. Appelons  $v'$  la norme de la vitesse du skieur entre les points  $M_0$  et  $M_1$ . On pose donc  $v' = \dot{x}'$ .

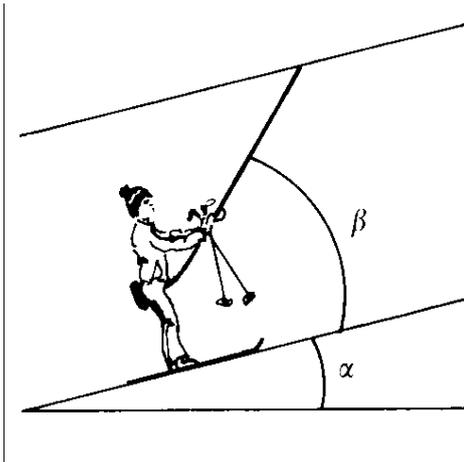
4. Montrer que l'équation différentielle vérifiée par  $v'$  est de la forme :

$$\frac{dv'}{dt} = \frac{\beta}{m} (u^2 - v'^2)$$

On donnera l'expression (en fonction de  $g, m, \beta, \mu$  et  $\alpha$ ), la dimension et la signification physique de  $u$ .

5. Résoudre cette équation différentielle.

## Exercice 2 Télési



Un skieur de masse  $m = 70 \text{ kg}$ , remonte une piste sur un télési à vitesse constante. La piste fait un angle  $\alpha = 30^\circ$  avec le plan horizontal et la perche du télési fait un angle  $\beta = 45^\circ$  avec la piste. Les frottements des skis sur la neige sont modélisés par une force d'intensité constante  $F = 100 \text{ N}$ .

Déterminer l'intensité de la force de traction  $T$  exercée par la perche sur le skieur. Cette force est supposée constante lorsqu'il monte à vitesse constante.

## Exercice 3 : Largage par avion

Un avion humanitaire vole à une altitude  $h = 6000 \text{ m}$  à la vitesse  $v_0 = 750 \text{ km.h}^{-1}$ . Il laisse tomber un colis de masse  $m$  de nourriture et de médicaments en passant à la verticale d'un point A.

- Déterminer le temps nécessaire pour que le colis atteigne le sol.
- Quelle est la distance parcourue par l'avion pendant ce temps ?
- A quelle distance du point A se trouve le colis lorsqu'il arrive au sol ?
- Que se passe-t-il si l'avion a initialement une trajectoire inclinée vers le bas d'un angle  $\beta = 10^\circ$  par rapport à la verticale ?
- L'avion est initialement dans les mêmes conditions qu'à la question précédente. De quelle hauteur aurait-on dû lâcher le colis pour qu'il tombe à une distance de moins de 100 m du point A ?

Réponses : 1) 35 s 2) 7,29 km 3) 7,29 km 4) 19,9 s 5) à moins de 605 m

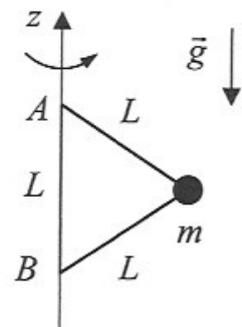
## Exercice 4 Pendule tournant

Une bille, de masse  $m$ , est attachée à deux fils inextensibles, de longueur  $L$ , fixés en A et B tels que  $AB = L$ .

La bille convenablement lancée, puis abandonnée, a un mouvement circulaire uniforme dans le plan horizontal (les fils étant tendus).

1. Exprimer la tension de chaque fil en fonction de  $m$ ,  $L$ ,  $g$  et  $\omega$  vitesse angulaire du mouvement circulaire de la bille.

2. Quelle est la vitesse angulaire minimale pour que les fils restent tendus ?



## Exercice 5 : Looping d'une balle



On étudie une balle de golf assimilée à un point matériel sans frottement évoluant sur une piste horizontale pour en forme de demi-cylindre. Elle est lancée avec une vitesse  $v_0$ .

1 - Déterminer la vitesse en un point du demi-cylindre en fonction de  $v_0$ . Donner une inégalité pour que la balle ne fasse pas demi-tour.

2 - Déterminer la force de réaction du cylindre sur la balle. Donner une inégalité pour que la balle soit toujours en contact avec le demi-cylindre.

3 - Avec quelle vitesse la balle quitte-t-elle le demi-cylindre ?

4 - À quelle distance retombe-t-elle sur la piste horizontale ?