

PROBLÈME II – Suspension automobile (extrait CCP 2013) ($\approx 1h30$)

Sur un véhicule, les suspensions ont de multiples fonctions. Elles servent notamment :

- à améliorer le confort des occupants ;
- à améliorer la tenue de route en maintenant le contact entre les roues et le sol malgré ses irrégularités (amélioration de la sécurité) ;
- à diminuer l'effet, sur l'ensemble des organes mécaniques, des vibrations et impacts dus aux irrégularités de la route (diminution de l'usure et du risque de rupture).

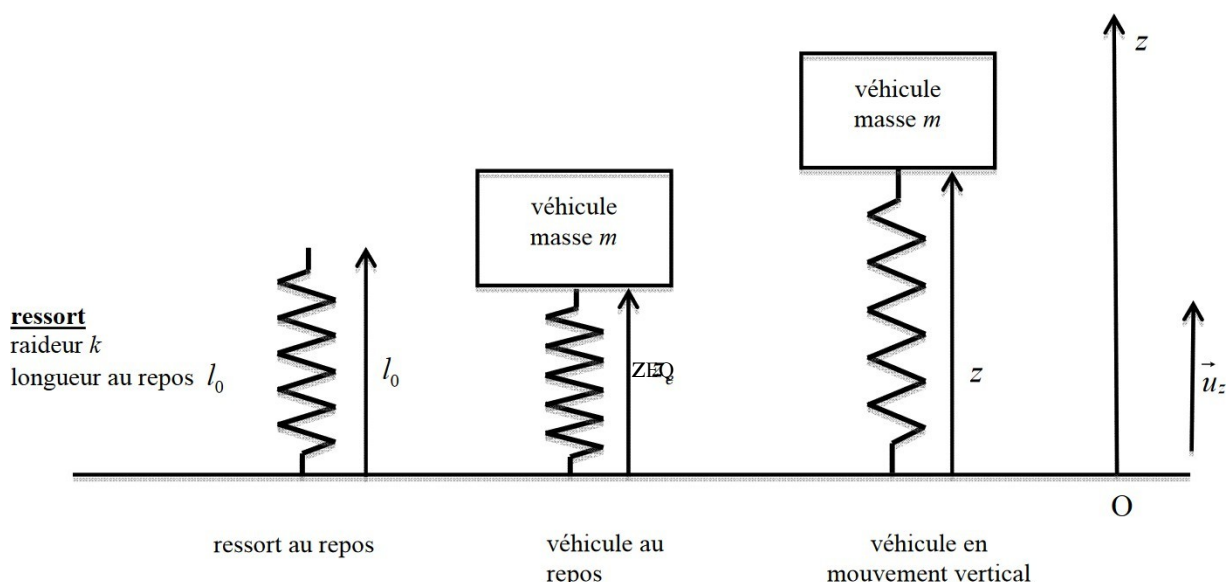
Il existe différents types de suspensions et, dans ce problème, nous nous intéresserons à un type très répandu : les suspensions à ressorts. De manière simplifiée, ces suspensions se composent d'un ressort qui assure la liaison entre les roues (masses non suspendues) et la caisse (masse suspendue) et d'un système d'amortissement. Le but de ce problème est d'étudier une caractéristique des suspensions à ressort : les mouvements verticaux du véhicule en absence d'amortissement. Pour l'ensemble du problème, le référentiel d'étude est le référentiel terrestre considéré comme galiléen. Le véhicule est soumis au champ de pesanteur terrestre g (de norme $9,8\text{m.s}^{-2}$).

Tout au long du problème, nous ferons les hypothèses suivantes :

- l'extrémité supérieure du ressort est en contact avec le véhicule et l'extrémité inférieure du ressort est reliée à une roue qui se trouve en contact avec le sol ;
- la roue reste en contact avec le sol à tout instant ;
- les dimensions de la roue sont telles qu'on la suppose ponctuelle ;
- les forces de frottements sont négligeables devant toutes les autres forces.

Partie A – Équation du mouvement

Le véhicule à vide est assimilé à un point matériel M de masse $m = 1,0 \cdot 10^3$ kg. La suspension est constituée d'un ressort de masse négligeable devant celle du véhicule, de raideur $k = 1,0 \cdot 10^5$ N.m⁻¹ et de longueur à vide $l_0 = 30$ cm. On s'intéresse uniquement au mouvement vertical du véhicule, dont la position est repérée par sa coordonnée $z(t)$, l'axe Oz étant vertical, orienté vers le haut et muni d'un vecteur unitaire \vec{u}_z . $z(t)$ représente la coordonnée de l'extrémité supérieure du ressort. À l'équilibre, en l'absence de tout mouvement vertical, la position du véhicule est repérée par sa coordonnée z_{EQ} .



A.1 Faire le bilan des deux forces auxquelles le véhicule est soumis lorsqu'il est hors équilibre. On donnera explicitement l'expression de chaque force.

A.2 En appliquant le principe d'inertie (première loi de Newton), écrire la relation entre ces différentes forces lorsque le véhicule est à l'équilibre. En déduire l'expression de la cote z_{EQ} à l'équilibre en fonction de m , g , k et ℓ_0 . Commenter l'expression trouvée. Calculer z_{EQ} .

A.3 En appliquant la deuxième loi de Newton au véhicule lorsqu'il est hors équilibre, déterminer l'équation différentielle vérifiée par $z(t)$. En déduire l'équation différentielle vérifiée par $H(t) = z(t) - z_{EQ}$. Que représente H ? Vérifier que cette seconde équation relie les différentes grandeurs k , m , $H(t)$ et ses dérivées temporelles.

A.4 Donner la solution générale $H(t)$ de l'équation différentielle. Déterminer les expressions littérales de la pulsation propre ω_0 et de la période propre T_0 de la suspension en fonction de k et m . Calculer leurs valeurs numériques.

Partie B – Étude du mouvement

B.1 On suppose qu'un opérateur appuie sur le véhicule et l'amène dans une position repérée par la cote z_0 avec $z_0 < z_{EQ}$. A un instant $t = 0$ choisi comme origine du temps, le véhicule est lâché sans vitesse initiale. Déterminer la solution $H(t)$ en prenant en compte les conditions initiales précédentes. En déduire que $z(t)$ peut s'écrire sous la forme $z(t) = A + B \cos(\omega_0 t)$, où A et B s'expriment en fonction de z_{EQ} et/ou z_0 . Quel est le signe de B ?

B.2 Tracer l'allure de $z(t)$ et faire apparaître sur le graphique les cotes minimale z_{min} , maximale z_{max} et moyenne z_{moy} , ainsi que la période propre T_0 . Donner les expressions des cotes minimale z_{min} , maximale z_{max} et moyenne z_{moy} en fonction de z_{EQ} et z_0 .

B.3 Quelle est l'expression de la vitesse $\dot{z}(t)$? Tracer cette vitesse sur le même graphe que $z(t)$. Commenter.

B.4 Quelle est l'expression de l'accélération maximale ?

B.5 Quatre passagers montent dans le véhicule au repos.

B.5.1 Quels paramètres vont changer ? De quelle manière ?

B.5.2 Si on lâche le véhicule de la même hauteur qu'au B.1, tracer à la même échelle qu'au B.2. l'allure de $z(t)$ et comparer (on pourra reproduire la courbe tracée en B.2. et superposer la nouvelle allure de $z(t)$ pour plus de lisibilité).

Partie C – Aspect énergétique

On rappelle que l'énergie potentielle de pesanteur d'un mobile de masse M à l'altitude $z(t)$ par rapport au sol est, lorsque le vecteur unitaire est orienté vers le haut, $E_{pp}(t) = mgz(t)$.

On rappelle aussi que, lorsqu'un mobile est soumis à plusieurs forces conservatives, son énergie potentielle est la somme de toutes les énergies potentielles associées.

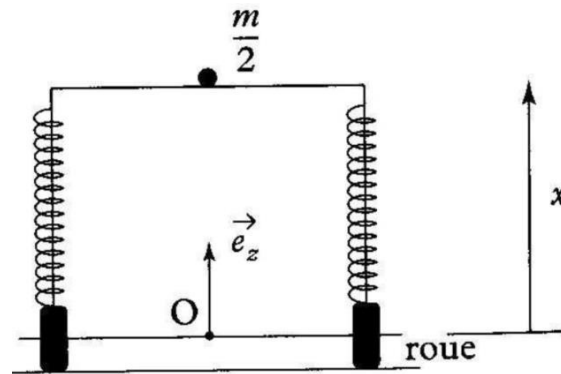
C.1 Donner l'expression de l'énergie potentielle totale du système, en fonction de k , m , g , z_{EQ} , z_0 , ω_0 et la variable temporelle t .

C.2 Donner l'expression de l'énergie cinétique du système, en fonction de m , z_{EQ} , z_0 , ω_0 et la variable temporelle t .

C.3 En déduire l'expression de l'énergie mécanique du système. Commenter l'homogénéité et la cohérence du résultat obtenu.

Partie D – Essieu avant

En fait, la masse du véhicule ne repose pas directement sur les roues mais sur deux essieux. On va s'intéresser ici à l'essieu avant du véhicule, que l'on modélise à l'aide de deux ressorts verticaux identiques de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 , attachés aux centres des deux roues. Une masse $\frac{m}{2}$ égale à la moitié de la masse du véhicule est posée dessus.



On assimilera cette masse et la tige horizontale qui relie les deux ressorts à un point matériel M . On négligera ici encore le rayon des roues (devant la longueur des ressorts).

Montrer que ce dispositif est équivalent à un unique ressort vertical dont on déterminera les caractéristiques k_{EQ} et ℓ_{0EQ} .

FIN DU SUJET