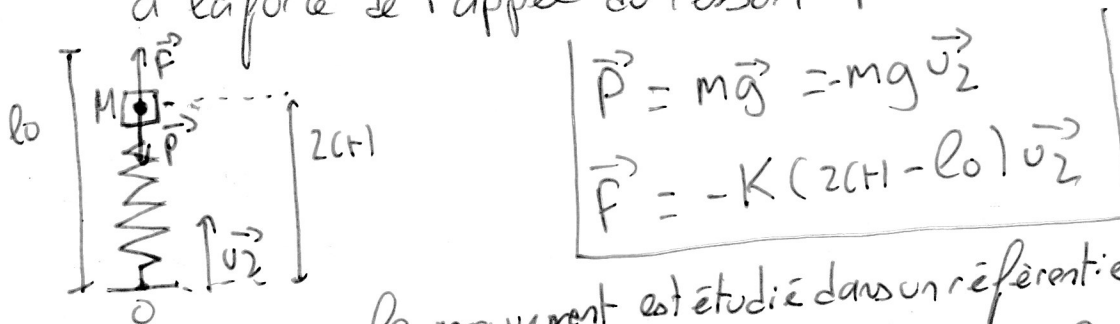


A Equation du mouvement

A.1 hors équilibre, le véhicule est soumis à son poids et à la force de rappel du ressort $\vec{F}$



$$\begin{cases} \vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_z \\ \vec{F} = -K(z(t) - l_0)\vec{u}_z \end{cases}$$

A.2 On suppose que le mouvement est étudié dans un référentiel galiléen. À l'équilibre le véhicule est immobile. D'après le principe d'inertie, les forces qui s'exercent sur le véhicule se compensent

on a donc à l'équilibre

$$\vec{P} + \vec{F} = \vec{0} \Rightarrow -mg\vec{u}_z - K(z_{eq} - l_0)\vec{u}_z = \vec{0}$$

en projetant sur l'axe Oz : $-mg - K(z_{eq} - l_0) = 0$

$$\text{Soit } \boxed{z_{eq} = l_0 - \frac{mg}{K}}$$

on a $[mg] = [\text{force}] = \text{N} \cdot \text{L} \cdot \text{T}^{-2}$ et $[K] = \text{N} \cdot \text{T}^{-2}$

donc $[\frac{mg}{K}] = \text{L} \rightarrow$ expression homogène

de plus $z_{eq} < l_0$ c'est cohérent car le ressort doit être comprimé pour que la force de rappel soit de sens opposé au poids $\vec{P}$

A.N: $z_{eq} = \frac{30 \times 10^{-2} \cdot 1,0 \times 10^3 \times 10}{1,0 \times 10^5} = 2,0 \times 10^{-1} \text{ m}$ soit 20 cm

(cohérent par des amortisseurs de voiture)

A.3 D'après la 2^{ème} loi de Newton appliquée au véhicule dans le réf galiléen d'étude:

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{P} \quad \text{avec} \quad \vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \dot{z}(t)\vec{u}_z$$

On projette sur l'axe (Oz) : $m\ddot{z}(t) = -mg - K(z(t) - l_0)$

$$\text{soit } \boxed{\ddot{z}(t) + \frac{K}{m}z(t) = \frac{K}{m}z_{eq}}$$

En posant $H(t) = z(t) - z_{eq}$ on a $z(t) = H(t) + z_{eq}$ et $\ddot{z}(t) = \ddot{H}(t)$

on a $\ddot{H}(t) + \frac{k}{m} H(t) = 0$

$H(t)$ représente l'écart entre la position du véhicule par rapport au sol et la position d'équilibre z_{eq} à l'instant t .

A.4 on reconnaît une équation différentielle de type oscillateur harmonique de la forme $\ddot{H}(t) + \omega_0^2 H(t) = 0$ (*) avec par identification $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

la période propre est alors $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$

A.N: $\omega_0 = \sqrt{\frac{10^5}{10}} = 10 \text{ rad.s}^{-1}$ $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{2,0 \times 10^3}{1,0 \times 10^5}} = 0,635$

B. Étude du mouvement

B.1 on sait que les solutions de l'équation différentielle (*) sont de la forme

$$H(t) = H_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{\dot{H}_0}{\omega_0} \sin(\omega_0 t)$$

ici $H_0 = H(t=0) = z_0 - z_{eq}$ et $\dot{H}_0 = \dot{H}(t=0) = \dot{z}_0 = 0$ ← car d'après l'énoncé le véhicule est lâché sans vitesse initiale

Ainsi $H(t) = (z_0 - z_{eq}) \cos(\omega_0 t)$

or $z(t) = H(t) + z_{eq}$ donc finalement $z(t) = (z_0 - z_{eq}) \cos(\omega_0 t) + z_{eq}$

Par id: $B = z_0 - z_{eq}$ $B = z_{eq}$

à $t=0$

$z_0 < z_{eq}$ d'après l'énoncé. Ainsi $A = z_0 - z_{eq} < 0$

B.2 Comme $(z_0 - z_{eq}) < 0$ $z(t)$ est maximal lorsque $\cos(\omega_0 t) = -1$

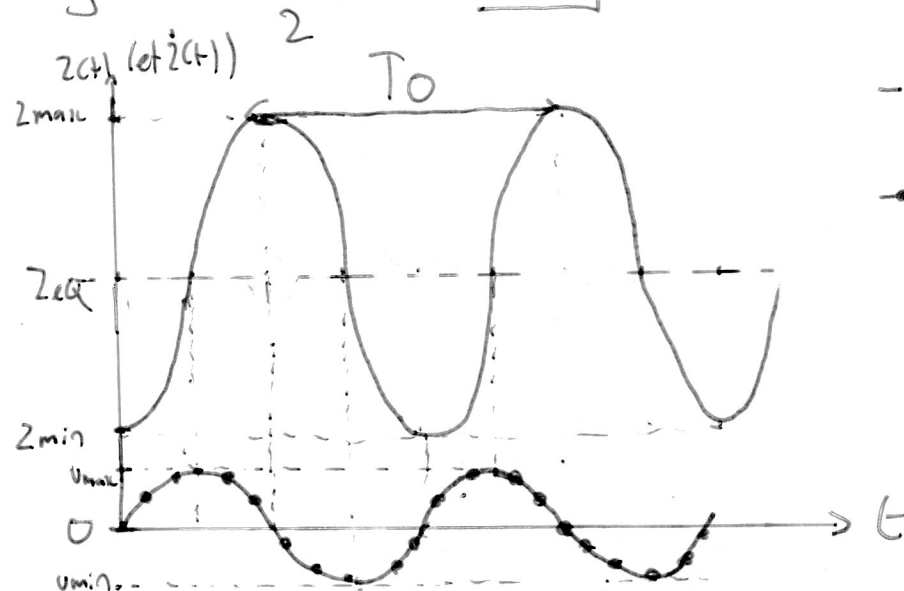
soit quand $t = \frac{(2n+1)\pi}{\omega_0}$ $n \in \mathbb{N}$

on a alors $z(t) = z_{max} = -(z_0 - z_{eq}) + z_{eq} = 2z_{eq} - z_0$

$z(t)$ est minimale lorsque $\cos(\omega_0 t) = 1$

et $z_{min} = z_0 - z_{eq} + z_{eq} = \underline{z_0}$

$$z_{\text{moy}} = \frac{z_{\text{max}} + z_{\text{min}}}{2} = z_{\text{eq}}$$



légende :

$-z(t)$

$\bullet \bullet \bullet \dot{z}(t)$

B.3 $\ddot{z}(t) = \dot{z}(t) = (z_0 - z_{\text{eq}}) \times (-\omega_0) \sin(\omega_0 t) \Rightarrow \dot{z}(t) = -\omega_0(z_0 - z_{\text{eq}}) \sin(\omega_0 t)$
L'avitement est nulle lorsque $z(t)$ est extrême $\Rightarrow$ c'est cohérent
 de plus à $t_1 = \frac{\pi}{2\omega_0}$ on a $\dot{z}(t_1) = -\omega_0(z_0 - z_{\text{eq}}) > 0 \Rightarrow$ l'avitement augmente par $0 < t < t_1$

B.4 $\ddot{z}(t) = -\omega_0^2(z_0 - z_{\text{eq}}) \cos(\omega_0 t)$ comme $-\omega_0^2(z_0 - z_{\text{eq}}) > 0$
 l'accélération est maximale lorsque $t = \frac{2n\pi}{\omega_0}$ avec $n \in \mathbb{N}$

on a $\boxed{\ddot{z}_{\text{max}} = -\omega_0^2(z_0 - z_{\text{eq}})}$

B.5

B.5.1 • la masse du système va augmenter le système à considérer est maintenant {véhicule + passagers} de masse $m + m_{\text{pass}}$

• Ainsi la pulsation propre sera $\omega_0' = \sqrt{\frac{K}{m + m_{\text{pass}}}}$ elle va diminuer

• la période propre sera elle aussi modifiée : $\boxed{T_0' = 2\pi \sqrt{\frac{(m + m_{\text{pass}})}{K}}}$
 elle va augmenter

(car $m + m_{\text{pass}} > m$)

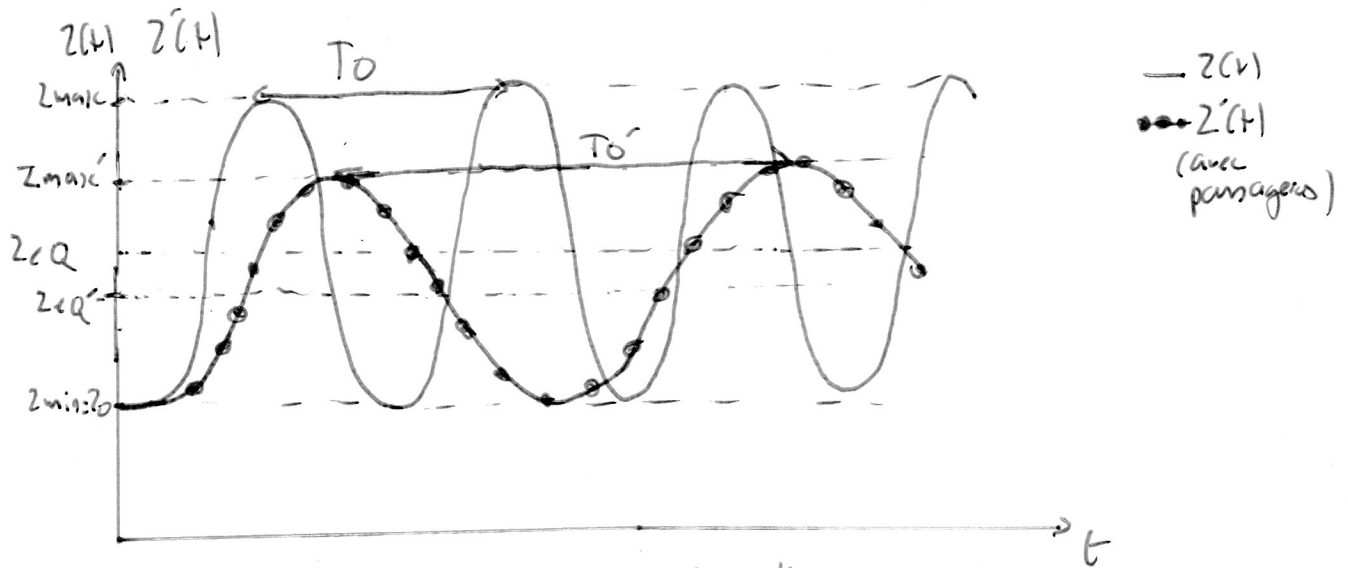
• la position d'équilibre va changer on aura $z_{\text{eq}}' = l_0 - \frac{(m + m_{\text{pass}})g}{K}$

on aura $z_{\text{eq}}' < z_{\text{eq}}$

(le véhicule sera plus proche du sol)

c'est cohérent

z_{max} va aussi être différent mais pas $z_{\text{min}} = z_0$



Le véhicule avec passagers effectue moins d'oscillations en un temps donné et l'amplitude des oscillations est moins importante $\Rightarrow$ c'est cohérent

C Aspect énergétique

C.1 $E_{\text{pot}}(t) = E_{\text{pp}}(t) + E_{\text{élastique}}(t)$ avec $E_{\text{élastique}}(t) = \frac{1}{2} K (z(t) - l_0)^2$

ainsi $E_{\text{pot}}(t) = mg z(t) + \frac{1}{2} K (z(t) - l_0)^2$

$$E_{\text{pot}}(t) = mg((z_0 - z_{eQ}) \cos(\omega_0 t) + z_{eQ}) + \frac{1}{2} K ((z_0 - z_{eQ}) \cos(\omega_0 t) + z_{eQ} - l_0)^2$$

C.2 $E_c(t) = \frac{1}{2} m \dot{z}^2(t) = \frac{1}{2} m (-\omega_0 (z_0 - z_{eQ}) \sin(\omega_0 t))^2$

C.3 $E_m(t) = E_c(t) + E_{\text{pot}}(t) = \frac{1}{2} m \omega_0^2 (z_0 - z_{eQ})^2 \sin^2(\omega_0 t) + \frac{1}{2} K (z_0 - z_{eQ})^2 \cos^2(\omega_0 t) + K (z_{eQ} - l_0)(z_0 - z_{eQ}) \cos(\omega_0 t) + \frac{1}{2} K (z_{eQ} - l_0)^2 + mg((z_0 - z_{eQ}) \cos(\omega_0 t) + z_{eQ})$

Comme $m \omega_0^2 = K$ et $z_{eQ} - l_0 = -\frac{mg}{K}$

$$E_m(t) = \frac{1}{2} K (z_0 - z_{eQ})^2 (\cos^2(\omega_0 t) + \sin^2(\omega_0 t)) + K \left(-\frac{mg}{K}\right) (z_0 - z_{eQ}) \cos(\omega_0 t) + \frac{K}{2} \left(\frac{mg}{K}\right)^2 + mg(z_0 - z_{eQ}) \cos(\omega_0 t) + mg z_{eQ}$$

$$E_m(t) = \frac{1}{2} K (z_0 - z_{eQ})^2 + mg \left(z_{eQ} + \frac{mg}{2K} \right)$$

$$[mg z_{eQ}] = M L^2 T^{-2} = [E_m]$$

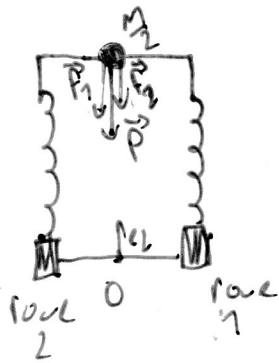
$$\left[\frac{1}{2} K (z_0 - z_{eQ})^2 \right] = M T^{-2} \times L^2 = [E_m]$$

$$\left[\frac{mg \cdot mg}{2K} \right] = \frac{(M \cdot L \cdot T^{-2})^2}{M \cdot T^{-2}} = M \cdot L^2 T^{-2} = [E_m]$$

$\Rightarrow$ homogène

de plus E_m est indépendante du tps
conservation de $E_m \rightarrow$ cohérent
corollaires négligés!

D) Essieu avant



Bilan des forces sur $\{ \text{mât} \}$ avant du véhicule

$$\text{Poids: } \vec{P} = \frac{m}{2} \vec{g} = -\frac{m}{2} g \vec{u}_2$$

Force de rappel de la suspension 1 / système $\vec{F}_1 = -K(2CH - l_0) \vec{u}_2$

Force de rappel de la suspension 2 / système $\vec{F}_2 = -K(2CH - l_0) \vec{u}_2$
(même raideur par les deux)

PFD appliqué au système dans le réf d'étude supposé galiléen:

$$\frac{m}{2} \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{P} + \vec{F}_{eq}$$

avec $\boxed{\vec{F}_{eq} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2}$ on cherche $\vec{F}_{eq}$ sous la forme:

$$\vec{F}_{eq} = -K_{eq}(2CH - l_{0eq}) \vec{u}_2$$

$$\text{or } \vec{F}_{eq} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = -2K(2CH - l_0) \vec{u}_2$$

par identification: $\boxed{K_{eq} = 2K}$ $\boxed{l_{0eq} = l_0}$