

# PROGRAMME DE COLLES N° 11

Semaine du 09/12/2024 au 13/12/2024

👉 *Primitives et intégrales* 👈

## Format de la colle :

- Automatismes de calcul (env. 10 min) : quelques items simples parmi les thèmes de la liste (actualisée chaque semaine) en page 2.
- Restitution du cours (env. 15 min) : définition et/ou théorème des chapitres au programme, puis démonstrations, exemples ou exercices exigibles listés plus bas.
- Exercice(s) libre(s) (env 30 min).

## — Chapitre 8 : Calculs de primitives et d'intégrales —

Tout le chapitre. Les règles de Bioche ont été mentionnées mais sont HP.

- |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <p><b>1 Définition, calculs directs</b></p> <p>1.1 Définition, unicité d'une primitive à une constante près . . . . .</p> <p>1.2 Formulaire des primitives usuelles . . . . .</p> <p>1.3 Primitives composées . . . . .</p> <p>1.4 Linéarité, fonctions à valeurs complexes . . . . .</p> <p><b>2 Calculs d'intégrales</b></p> <p>2.1 Notion d'intégrale, propriétés fondamentales de l'intégrale, lien avec les primitives, théorème fondamental du calcul intégral . . . . .</p> | <p>2.2 Intégration par parties . . . . .</p> <p>2.3 Changement de variable . . . . .</p> <p><b>3 Quatre exemples de calculs à savoir mener</b></p> <p>3.1 Excitation périodique avec enveloppe exponentielle . . . . .</p> <p>3.2 Deux inverses de polynôme . . . . .</p> <p>3.3 Polynômes ou fractions rationnelles en cos et sin . . . . .</p> <p>3.4 Polynôme <math>\times</math> exponentielle . . . . .</p> |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

### Démonstrations, exemples ou exercices exigibles comme questions de cours

- Théorème fondamental du calcul intégral : démonstration dans le cas d'une fonction réelle croissante.
- Théorème du changement de variable avec l'exemple de  $\int_0^1 \frac{e^{2t}}{e^t + 1} dt$ .
- Proposition 6 : intégrale d'une fonction paire ou impaire sur  $[-a; a]$ , intégrales  $\int_a^{a+T} f(t) dt$  et  $\int_{a+T}^{b+T} f(t) dt$  pour une fonction  $T$ -périodique.

## Automatismes de calcul

On donne quelques exemples de capacité attendue pour chaque thème.

[Le cahier de calcul](#) fournit également une excellente source d'entraînement/inspiration.

- **Logique, raisonnement**

Exemples : montrer que  $x^2 + y^2 \geq 2xy$  pour tous  $x, y \in \mathbb{R}$ , savoir écrire en langage symbolique qu'une suite est majorée, qu'une fonction est  $2\pi$ -périodique et savoir nier ces assertions.

- **Trigonométrie.**

Exemples : formule  $\cos(2a)$ , résolution de  $\sin a = \sin b$ ,  $\cos(2x + 1) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\cos x = \sin x$ .

- **Inégalités : résoudre/prouver des inégalités simples**

Exemples : résoudre  $x|x| \leq 3x + 2$ , montrer que  $|\sin(nx)| \leq n|\sin x|$  pour tous  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , encadrer rapidement  $x \mapsto \frac{\cos x + 2}{x^2 + 4}$  sur  $[0; 1]$ .

- **Calcul élémentaire de nombres complexes** (module, argument, linéarisation, angle moitié, racines carrées,  $n$ -ièmes).

Exemples : calculer la forme exponentielle de  $\sqrt{3} - 3i$ , les racines carrées de  $3 - 4i$ , linéarisation de  $\cos^3 x$ , résolution de  $z^n = 1$  dans  $\mathbb{C}$ .

- **Calcul algébrique** (fractions, simplification d'expressions, sommes et produits usuels, coefficients binomiaux, formule du binôme, etc).

Exemples : donner la formule pour  $\sum_{k=1}^n q^k$ , calculer  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k$ , écrire  $\prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k+1}$  avec des factorielles.

- **Définition, dérivée ou primitive d'une fonction usuelle.**

Exemples : définir  $\text{Arctan}$ , simplifier  $\text{Arccos}(\cos(7))$ , théorème de dérivation de  $g \circ f$ , dérivée de  $x \mapsto f(-x)$ , donner une primitive de  $x \mapsto \frac{x}{2x+1}$ , de  $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ , de  $x \mapsto \frac{x^2+x}{x^2+1}$ , ensemble de définition, de dérivabilité et dérivée de  $x \mapsto \text{Arccos}\left(\frac{x}{x+1}\right)$ .

- **Techniques élémentaires de calcul intégral, IPP ou changement de variable simple.**

Exemples :  $\int^x \cos t e^{2t} dt$ ,  $\int_0^1 t e^t dt$ ,  $\int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt$  en posant  $t = \sin x$ .