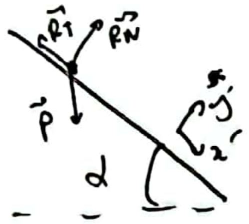
Ex 1 1) Bilan des forces



Poids $\vec{P} = mg\sin\alpha\,\vec{e_x} - mg\cos\alpha\,\vec{e_y}$

Réaction | normale $\vec{R_N} = R_N\vec{e_y}$

| tangentielle : $\vec{R_T} = -R_T\vec{e_x}$

À la limite du glissement $\|\vec{R_T}\| = +\mu\,\|R_N\|$

Système : {skieurs} Réf : TSG

PFD : $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R_N} + \vec{R_T}$

Projection sur $\vec{e_y}$: $0 = -mg\cos\alpha + R_N$

donc $R_N = mg\cos\alpha$

Projection sur $\vec{e_x}$ $m\ddot{x} = -R_T + mg\sin\alpha$

0 à la limite du glissement

$R_T = mg\sin\alpha$

$\mu_s\, mg\cos\alpha$

$\Rightarrow \tan\alpha = \mu_s$ $\boxed{\alpha = \arctan(\mu_s)}$

à la limite du glissement

2) pendant le mvt

$m\ddot{x} = -R_T + mg\sin\alpha$

$m\ddot{x} = -\mu\, mg\cos\alpha + mg\sin\alpha$

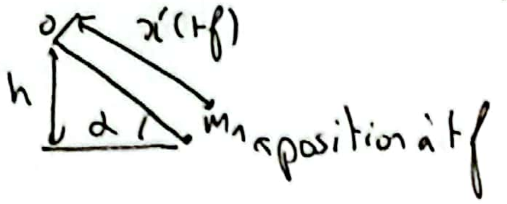
$$\boxed{\ddot{x} = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}$$

0 vitesse initiale nulle

origine en M_0

$\dot{x}(t) = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)t + \cancel{v(0)} \xrightarrow[\text{Primitive}]{} x(t) = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\frac{t^2}{2} + \cancel{x(0)}$

en M_1 . $\sin(\alpha) = \dfrac{h}{x(t_f)}$ $\qquad x(t_f) = \dfrac{h}{\sin\alpha}$



donc $\dfrac{h}{\sin\alpha} = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)\dfrac{t_f^2}{2}$

$$t_f^2 = \frac{2h}{\sin\alpha} \times \frac{1}{g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}$$

$$V_0 = \dot{x}(t_f) = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) \times \sqrt{\frac{2h}{\sin\alpha\, g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}}$$

$$V_0 = \sqrt{\frac{2hg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{\sin\alpha}} \underset{\text{avec } \alpha = \frac{\pi}{4}}{=} \sqrt{\frac{2hg\frac{\sqrt{2}}{2}(1-\mu)}{\frac{\sqrt{2}}{2}}}$$

$$\boxed{V_0 = \sqrt{2hg(1-\mu)}}$$

3) on a maintenant $\alpha = 0$

$$\ddot{x}(t) = g(\sin 0 - \mu\cos(0)) = -\mu g$$

Primitive $\hookrightarrow$ $\dot{x}(t) = -\mu g t + V_0$

Primitive $\hookrightarrow$ $x(t) = -\mu g \dfrac{t^2}{2} + V_0 t + 0$

On cherche t_D tel que $\dot{x}(t_D) = 0$ $\Rightarrow$ $\boxed{t_D = \dfrac{V_0}{\mu g}}$

$$\boxed{D = x(t_D) = \frac{V_0^2}{2\mu g}}$$

4) <u>Bilan des forces</u>

même chose qu'avant $+ \quad -\beta v'^2 \vec{e_x'}$

PFD $\quad m\vec{a} = \vec{P} + -\beta v'^2 \vec{e_x'} + \vec{R_N} + \vec{R_T}$

↳ Projectᵒ sur $\vec{e_y'}$ $\Rightarrow R_N = mg\cos\alpha$

Projectᵒ sur $\vec{e_x'}$ $\quad m\dfrac{dv'}{dt} = -R_T + mg\sin\alpha - \beta v'^2$

or $R_T = -\mu mg\cos\alpha$

$$m\frac{dv'}{dt} = -\beta v'^2 + mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha$$

$$\frac{dv'}{dt} = -\frac{\beta v'^2}{m} + \frac{mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{m}$$

$$\frac{dv'}{dt} = \frac{\beta}{m}\left(\frac{mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{\beta} - v'^2\right)$$

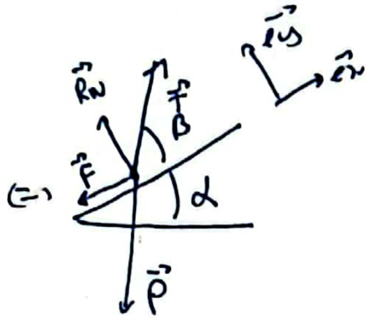
Par identification $\boxed{u^2 = \dfrac{mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{\beta}}$

en régime stationnaire $\dfrac{dv'}{dt} = 0$ donc $u^2 - v'^2_{lim} = 0$

$\boxed{v_{lim} = u}$ u est la vitesse limite atteinte en régime stationnaire

Scanné avec CamScanner

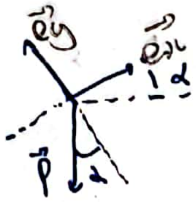
Ex 2



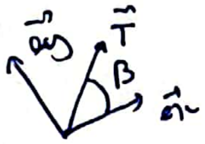
expression ds la base $\vec{e_x}, \vec{e_y}$

$\vec{R_N} = R_N \vec{e_x}$

$\vec{f} = -f\vec{e_x}$



$\vec{P} = -mg\cos\alpha\,\vec{e_y} - mg\sin\alpha\,\vec{e_x}$



$\vec{T} = T\cos\beta\,\vec{e_x} + T\sin\beta\,\vec{e_y}$

Si le mouvement est rectiligne à vitesse constante, les forces se compensent : $\vec{R_N} + \vec{f} + \vec{P} + \vec{T} = \vec{0}$

en projection sur $\vec{e_x}$: $-f + T\cos\beta - mg\sin\alpha = 0$

$$\boxed{T = \frac{f + mg\sin\alpha}{\cos\beta}}$$

A.N $T = 1038\,N$

Scanné avec CamScanner

On choisit l'origine du repère au centre du demi-cylindre, et θ compté à partir de l'horizontale, la balle entre donc dans le looping en $\theta = -\pi/2$.

1 Conservation de l'énergie mécanique :

$$E_m \underset{\text{init}}{\underset{\uparrow}{=}} \frac{1}{2}mv_0^2 - mgR \underset{\text{cylindre}}{\underset{\uparrow}{=}} \frac{1}{2}mv^2 + mgR\sin\theta \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{v^2 = v_0^2 - 2gR(1+\sin\theta)\,.}$$

2 Il ne faut pas que la vitesse s'annule, donc

$$v_0 > 2\sqrt{gR}\,.$$

3 Accélération dans un mouvement circulaire :

$$\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\,\vec{e}_r + R\ddot{\theta}\,\vec{e}_\theta\,.$$

Projection du poids :

$$\vec{P} = mg(-\sin\theta\,\vec{e}_r - \cos\theta\,\vec{e}_\theta)$$

Projection du PFD sur $\vec{e}_r$:

$$-mR\dot{\theta}^2 = -mg\sin\theta - N\,.$$

Or avec la conservation de l'énergie (cf. 1ère question) :

$$R\dot{\theta}^2 = \frac{v_0^2}{R} - 2g(1+\sin\theta)$$

ce qui donne

$$-\frac{mv_0^2}{R} + 2mg(1+\sin\theta) = -mg\sin\theta - N$$

et enfin

$$N = \frac{mv_0^2}{R} - mg(2+3\sin\theta)$$

4 $N > 0$ partout donc $v_0^2 > 5gR$

5 Conservation de l'énergie :

$$E_m \underset{\text{init}}{\underset{\uparrow}{=}} \frac{1}{2}mv_0^2 - mgR \underset{\text{sortie}}{\underset{\uparrow}{=}} \frac{1}{2}mv^2 + mgR \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{v_s^2 = v_0^2 - 4gR\,.}$$

6 Chute libre :

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{z} = -g \end{cases} \qquad \text{d'où} \qquad \begin{cases} \dot{x} = -v_s \\ \dot{z} = -gt \end{cases} \qquad \text{d'où} \qquad \begin{cases} x = -v_s t \\ z = -\dfrac{1}{2}gt^2 + R \end{cases}$$

On en déduit l'équation de la trajectoire :

$$z(x) = R - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_0^2 - 4gR}\,.$$

On cherche alors x tel que

$$z(x) = -R \qquad \text{soit} \qquad \frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_0^2 - 4gR} = 2R \qquad \text{d'où} \qquad x = -\sqrt{\frac{4R(v_0^2 - 4gR)}{g}}$$