TD09– OSCILLATEURS AMORTIS

Exercice 1 : Questions de cours (à savoir faire sans le cours sous les yeux)

On considère un circuit RLC série soumis à un échelon de tension à t=0. A $t=0^-$, le condensateur est déchargé.

1 Etablir l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes du condensateur.
2 Ecrire cette équation sous forme canonique, en faisant apparaître la pulsation propre et le facteur de qualité, dont on donnera les expressions et les dimensions.
3 Donner l'allure et le nom des trois régimes transitoires différents possibles. On donnera pour chacun des régimes transitoires la valeur du facteur de qualité associée.
4 On s'intéresse au régime transitoire pseudo-périodique.
   4.a En recherchant les racines du polynôme caractéristique, déterminer l'expression de $u_C(t)$. On justifiera les conditions initiales choisies. On pourra introduire une pseudo-pulsation à définir.
   4.b Représenter l'allure de $u_C(t)$ et représenter la pseudo-période sur le graphe.
   4.c Exprimer la pseudo-période T en fonction de la période propre T_0 et du facteur de qualité Q. Commenter.
   4.d Déterminer la durée du régime transitoire (critère à 95%). Commenter.
5 On s'intéresse au régime transitoire apériodique.
   5.a En recherchant les racines du polynôme caractéristique, déterminer la forme de l'expression de $u_C(t)$.
   5.b Déterminer la durée du régime transitoire (critère à 95%). Commenter.
6 On s'intéresse au régime transitoire critique.
   6.a En recherchant les racines du polynôme caractéristique, déterminer la forme de l'expression de $u_C(t)$.
   6.b Déterminer la durée du régime transitoire (critère à 95%).
7 Faire un bilan de puissance.
8 Comment varie l'énergie électromagnétique d'un circuit RLC en régime libre ? Justifier. En déduire l'état final en régime libre.

Exercice 2 : paramètres caractéristiques

Un système linéaire est décrit par l'équation caractéristique suivante : $3\dfrac{d^2s}{dt^2}+2\dfrac{ds}{dt}+s(t)=e(t)$

1 Calculer sa pulsation propre, son facteur de qualité

l'équation différentielle associée à un oscillateur amorti sous forme canonique on a

$$\boldsymbol{\frac{d^2s}{dt^2}+\frac{\omega_0}{Q}\frac{ds}{dt}(t)+\omega_0^2 s(t)=b}$$

On peut modifier la forme de l'équation différentielle : $\dfrac{d^2s}{dt^2}+\dfrac{2}{3}\dfrac{ds}{dt}+\dfrac{1}{3}s(t)=\dfrac{1}{3}e(t)$

si e(t) est indépendante du temps, on reconnaît la même forme d'équation.
Par identification :

$$\omega_0^2=\frac{1}{3}\Rightarrow \boldsymbol{\omega_0=\frac{1}{\sqrt{3}}} \qquad \frac{\omega_0}{Q}=\frac{2}{3}\Rightarrow \boldsymbol{Q}=\frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{3}}\approx 1{,}7>\frac{1}{2}$$

Ce système est soumis à un échelon de tension. Quel est l'ordre de grandeur de la durée du régime transitoire ?

Comme Q>1/2 le régime est pseudo périodique.

équation caractéristique : $r^2+\dfrac{2}{3}r+\dfrac{1}{3}=0$ discriminant $\Delta=\left(\dfrac{2}{3}\right)^2-\dfrac{4}{3}=\dfrac{4-12}{9}=\dfrac{-8}{9}$

les racines du polynôme caractéristique seront de la forme $\dfrac{\omega_0}{2Q}\pm i\omega$ avec ω la pseudo-pulsation du système ici $\omega=\dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ c'est cohérent car $\omega=\omega_0\sqrt{1-\dfrac{1}{4Q^2}}$

la pseudo pulsation est donc $T=\frac{2\pi}{\omega}$

en régime pseudo-périodique, On observe environ Q pseudo-oscillations avant d'atteindre le régime permanent

ainsi $T_r \approx Q\,T$

$$T_R=\pi\sqrt{3}\frac{3}{\sqrt{2}}\approx 11{,}5\,s$$

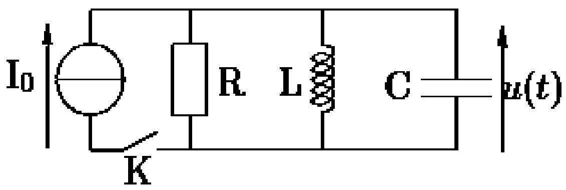
comme c'est une méthode très peu précise on garde seulement un ordre de grandeur :

T_r est de l'ordre de 10^1 s

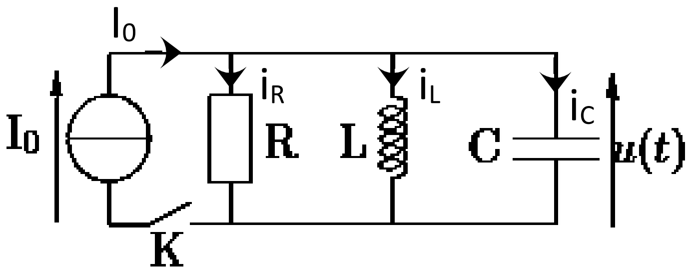
Exercice 3 : circuit RLC parallèle

Considérons un circuit RLC parallèle. A t=0, on ferme l'interrupteur K.

R = 50Ω, L = 0,10 mH, C = 10 nF, I_0 = 10 mA.



1 Établir l'équation différentielle vérifiée par la tension aux bornes du condensateur u(t).



$$I_0=i_R+i_L+i_C$$

Loi d'Ohm dans R : $u(t)=R\,i_R(t)\Rightarrow i_R(t)=\frac{u(t)}{R}$

Relation tension courant pour le condensateur $i_c(t)=C\frac{du}{dt}(t)$

Relation tension courant pour la bobine $u(t)=L\frac{di_L}{dt}(t)\Rightarrow\frac{di_L}{dt}(t)=\frac{u(t)}{L}$

Pour faire apparaître la dérivée temporelle de i_L il faut dériver la loi des nœuds

$$0=\frac{di_R}{dt}+\frac{di_L}{dt}+\frac{di_C}{dt}\Rightarrow\boxed{\frac{1}{R}\frac{du}{dt}(t)+\frac{u(t)}{L}+C\frac{d^2u}{dt^2}=0}$$

2 Donner les expressions de ω_0 et Q (appelé facteur de qualité), puis les calculer.

On peut mettre l'équation sous la forme

$$\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{1}{RC}\frac{du}{dt}(t)+\frac{u(t)}{LC}=0$$

On reconnaît l'équation différentielle homogène associée à un oscillateur amorti

Sous forme canonique on a

$$\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{\omega_0}{Q}\frac{du}{dt}(t)+\omega_0^2u(t)=0$$

Par identification :

$$\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad \frac{\omega_0}{Q}=\frac{1}{RC}\Rightarrow Q=R\sqrt{\frac{C}{L}}$$

A.N $\omega_0 = 1{,}0\ 10^6$ rad /s
et **Q= 1/2**

3 Quel est le régime de variation de u(t) ?

Comme Q=1/2 le régime est critique

4 A l'instant t = 0^-, l'intensité du courant est nulle dans la bobine et le condensateur n'est pas chargé. Déterminer l'expression de u(t), en justifiant les conditions initiales choisies.

À t=0^- $i_L(0^-)= 0$ et $u(0^-) = 0$

Par continuité de l'intensité du courant dans une bobine $i_L(0^+) = i_L(0^-)=0$

Par continuité de la tension aux bornes du condensateur $u(0^+) = u(0^-) =0 = u_0$

il faut une deuxième condition initiale

D'après la loi d'Ohm dans R $u(t)=R\,i_R(t)\Rightarrow i_R(0^+)=\frac{u(0^+)}{R}=0$

d'après la loi des nœuds à t= 0^+ : $I_0 = i_c(0^+)$

D'après la relation tension courant pour un condensateur : $i_c(0^+)=C\frac{du}{dt}(0^+)\Rightarrow\frac{du}{dt}(0^+)=\frac{I_0}{C}=\dot{u}_0$

expression générale de u_c(t)

équation caractéristique : $r^2+\frac{\omega_0}{Q}r+\omega_0^2=0$

régime critique donc $\Delta=0$

racine double du polynôme caractéristique : $r_1=\frac{-\omega_0}{2Q}=-\omega_0$

$u(t)=(\lambda_1+t\lambda_2)e^{-\omega_0 t}$

utilisation des conditions initiales :

$u_0=0\Rightarrow\lambda_1+0=0\Rightarrow\lambda_1=0$

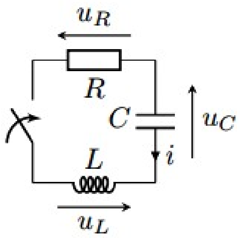
donc $u(t)=t\lambda_2e^{-\omega_0 t}$ et $\dot{u}(t)=\lambda_2e^{-\omega_0 t}-\omega_0\lambda_2t\,e^{-\omega_0 t}$

comme $\dot{u}_0=\frac{I_0}{C}$

$\lambda_2-\omega_0\lambda_2 0=\frac{I_0}{C}\Rightarrow\lambda_2=\frac{I_0}{C}$

finalement $u(t)=t\frac{I_0}{C}e^{-\omega_0 t}$

Exercice 4 : circuit RLC série en régime libre



Les notations des courants et tensions ne sont pas explicitées sur le schéma par l'énoncé, auquel cas il est sous-entendu que toutes les tensions sont orientées de façon cohérente avec u_C et que les dipôles sont orientés en convention récepteur.

1 L'intensité i est continue car elle traverse une bobine. Ainsi,

$$\boxed{i(0^+) = i(0^-) = 0}$$

car le circuit est ouvert à $t < 0$. De même, la tension u_C est nécessairement continue car aux bornes du condensateur donc

$$\boxed{u_C(0^+) = u_C(0^-) = U_0}$$

Enfin, la tension aux bornes de la bobine se déduit de la loi des mailles à l'instant $t = 0^+$ et de la loi d'Ohm,

$$u_R(0^+) + u_C(0^+) + u_L(0^+) = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{u_L(0^+) = -u_C(0^+) = -U_0\,.}$$

En régime permanent, le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert donc

$$\boxed{i_\infty = 0\,.}$$

La bobine est équivalente à un fil, si bien que

$$\boxed{u_{L,\infty} = 0}$$

et d'après la loi des mailles on en déduit

$$u_{R,\infty} + u_{C,\infty} + u_{L,\infty} = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{u_{C,\infty} = 0\,.}$$

2 D'après le comportement à $t = 0$, on en déduit que **la grandeur y correspond à l'intensité i**. Un oscilloscope ne peut pas mesurer directement une intensité, il faut donc mesurer une tension qui lui est proportionnelle, c'est-à-dire la tension aux bornes de la résistance. Obtenir la courbe représentant y en fonction de t demande donc **de brancher l'oscilloscope en parallèle de la résistance**.

> *Ici, il n'y a aucun appareil branché sur le secteur type GBF, donc pas de conflit de masse à craindre.*

3 D'après la loi des mailles,

$$u_R + u_C + u_L = 0 \qquad \text{soit} \qquad Ri + u_C + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0$$

en utilisant les lois de comportement. Pour pouvoir relier u_C à i, il est nécessaire dériver,

$$R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + L\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} = 0 \qquad \text{d'où} \qquad R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}i + L\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} = 0\,.$$

Écrivons maintenant cette équation sous forme canonique pour faire apparaître les paramètres cherchés,

$$\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC} i = 0\,.$$

On identifie alors $1/LC = \omega_0^2$ et $R/L = 2m\omega_0$ d'où

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + 2m\omega_0\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2 i = 0\,.}$$

4 **Forme générale des solutions :** L'équation différentielle est homogène, il n'y a donc pas de solution particulière à déterminer (une autre formulation possible est de dire qu'elle est nulle). Pour déterminer la forme générale de la solution homogène, trouvons les racines du polynôme caractéristique,

$$r^2 + 2m\omega_0\, r + \omega_0^2 = 0\,.$$

Son discriminant vaut

$$4m^2{\omega_0}^2 - 4{\omega_0}^2 = 4\omega_0^2(m^2-1) < 0$$

car $m < 1$. Ainsi, les racines sont complexes conjuguées et valent

$$r_\pm = -\frac{2m\omega_0}{2} \pm \mathrm{i}\frac{\sqrt{4{\omega_0}^2(1-m^2)}}{2} = -m\omega_0 \pm \mathrm{i}\omega_0\sqrt{1-m^2} = -m\omega_0 \pm \mathrm{i}\Omega\,.$$

Comme le discriminant de l'équation caractéristique est négatif alors le régime est pseudo-périodique et les solutions s'écrivent toutes sous la forme

$$i(t) = [A\cos\Omega t + B\sin\Omega t]\,\mathrm{e}^{-m\omega_0 t}$$

L'intensité est pseudo-périodique, et **Ω est sa pseudo-période.** On peut l'évaluer à partir de la pseudo-période T' lisible sur la courbe. Par exemple, $T' = t_2 - t_1$ d'où

$$\boxed{\Omega = \frac{2\pi}{t_2 - t_1}\,.}$$

5 Trouver la position des maxima n'est pas simple du tout à cause de l'amortissement exponentiel, qui complique beaucoup la recherche des zéros de la dérivée. Cependant, compte tenu de la courbe donnée, on peut faire l'approximation que la position des maxima est directement donnée par ceux du sinus car l'amortissement est faible. Ainsi, le k-ième maximum est atteint lorsque

$$\Omega t_k = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \qquad \text{soit} \qquad t = \frac{3}{4}T' + (k-1)T'$$

avec k un entier. y_1 et y_2 correspondent aux deux premiers maxima, aux instants $t_1 = 3T'/4$ et $t_2 = 7T'/4$. Ainsi,

$$\frac{y_2}{y_1} = \frac{\mathrm{e}^{-7m\omega_0 T'/4}}{\mathrm{e}^{-3m\omega_0 T'/4}} = \mathrm{e}^{-m\omega_0 T'}$$

Pour aboutir à une relation encore plus simple (je ne sais pas ce qu'attendait l'examinateur, qui l'aurait précisé au candidat au cour de l'oral) , on peut supposer $m \ll 1$, auquel cas $\Omega \sim \omega_0$ et donc $T' \simeq 2\pi/\omega_0$. Dans ce cas,

$$\boxed{\frac{y_2}{y_1} \simeq \mathrm{e}^{-2\pi m}\,.}$$

Exercice 5* : Décrément logarithmique et frottements fluides

Une masse m d'altitude z est attachée à un ressort vertical de raideur $k=10N.m^{-1}$ et de longueur à vide $l_0=10cm$ **fixé au point O**. En plus de son poids et de la force élastique du ressort, la force est soumise à une force de frottement fluide $\vec{F} = -h\vec{v}$. Un capteur fournit l'évolution de l'abscisse u(t) de la masse par rapport à sa position d'équilibre au cours du temps.

1 Etablir l'équation différentielle vérifiée par z(t). Quelle est la position d'équilibre z_{EQ} ?
En déduire l'équation satisfaite par $u(t) = z(t) - z_{EQ}$.

système étudié : mobile de masse m

Principe fondamental de la dynamique appliqué au système dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt}=\vec{F}+m\vec{g}+\vec{f}$$

avec $\vec{v}=\dot{z}(t)\vec{e}_z$ le vecteur vitesse du centre de masse du mobile

En projetant sur l'axe (O, $\vec{e}_z$) $m\ddot{z}(t)=-k(z(t)-l_0)+mg-h\dot{z}(t)$

$$\ddot{z}(t)=\frac{-k}{m}(z(t)-l_0)+g-\frac{h}{m}\dot{z}(t) \qquad \ddot{z}(t)+\frac{k}{m}z(t)+\frac{h}{m}\dot{z}(t)=g+\frac{k}{m}l_0$$

finalement : $\boldsymbol{\ddot{z}(t)+\frac{h}{m}\dot{z}(t)+\frac{k}{m}z(t)=\frac{k}{m}z_{eq}}$ avec $z_{eq}=l_0+\frac{mg}{k}$

Remarque : z_{eq} est la position d'équilibre du mobile lorsqu'il est immobile. En effet, à l'équilibre le système est immobile donc $\ddot{z}=0$ et $\dot{z}=0$ donc $z=z_{eq}$

en posant u(t) = z(t) – z_{Eq} on a $\boldsymbol{\ddot{u}(t)+\frac{h}{m}\dot{u}(t)+\frac{k}{m}u(t)=0}$

2 Exprimer la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q en fonction des données du problème.
On reconnaît une équation différentielle associée à un oscillateur harmonique

$$\ddot{u}(t)+\frac{\omega_0}{Q}\dot{u}(t)+\omega_0^2u(t)=0$$

par identification : $\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}$ et $\frac{\omega_0}{Q}=\frac{h}{m}\Rightarrow Q=\omega_0\frac{m}{h}=\frac{1}{h}\sqrt{mk}$

3 Résoudre l'équation différentielle en s'aidant du graphique. On ne cherchera pas à déterminer les constantes liées aux conditions initiales.

D'après le graphique on remarque des pseudo-oscillations on en déduit que le régime est pseudo-périodique

l'équation caractéristique est $r^2+\frac{\omega_0}{Q}r+\omega_0^2=0$

Le polynôme caractéristique possède deux racines **complexes conjuguées**:

$$r_1=\frac{-\omega_0}{2Q}-i\omega \qquad r_2=\frac{-\omega_0}{2Q}+i\omega \quad \text{avec} \quad \omega=\omega_0\sqrt{\left(\frac{4Q^2-1}{4Q^2}\right)}=\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}$$

$$u(t)=e^{\frac{-\omega_0}{2Q}t}\left(A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t)\right)$$

avec ω la pseudo-pulsation

4 Exprimer la pseudo période T en fonction de la période propre T_0 et de Q.

$$\boxed{T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}=\frac{T_0}{\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}}$$

5

$$u(t+T)=e^{\frac{-\omega_0}{2Q}(t+T)}\left(A\cos(\omega(t+T))+B\sin(\omega(t+T))\right)$$

$$u(t+T)=e^{\frac{-\omega_0}{2Q}T}e^{\frac{-\omega_0}{2Q}t}\left(A\cos(\omega t+T\omega)+B\sin(\omega t+T\omega)\right)$$

Avec $T=\frac{2\pi}{\omega}$

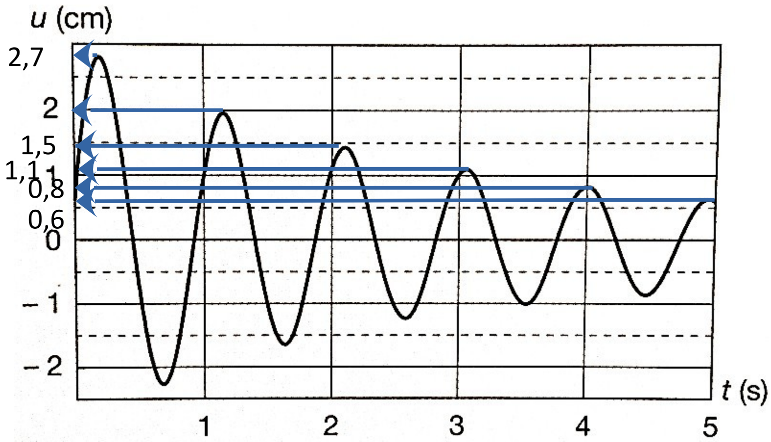
donc $$u(t+T)=e^{\frac{-\omega_0}{2Q}T}e^{\frac{-\omega_0}{2Q}t}\left(A\cos(\omega t+2\pi)+B\sin(\omega t+2\pi)\right)$$

finalement $$u(t+T)=e^{\frac{-\omega_0}{2Q}T}u(t)\Rightarrow\ln\left(\frac{u(t)}{u(t+T)}\right)=\omega_0\frac{T}{2Q}$$

Or $T=\frac{2\pi}{\omega}=\frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}$ donc $$\boxed{\delta=\frac{2\pi}{2Q\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}=\frac{2\pi}{\sqrt{4Q^2-1}}}$$

6 Calculer le décrément logarithmique en utilisant le graphique (on utilisera les positions de la masse à chaque passage au maximum).

On calcul δ pour chaque pseudo-oscillation
on calcul 0.3 , 0.29 , 0.31 , 0.32, 0.29



On peut choisir la valeur moyenne **δ ≈ 0.3**

7 En déduire la valeur de Q.

$$\delta=\frac{2\pi}{\sqrt{4Q^2-1}}\Rightarrow\frac{\delta^2}{4\pi^2}=\frac{1}{4Q^2-1}\Rightarrow 4Q^2=1+\frac{4\pi^2}{\delta^2}\Rightarrow\boxed{Q=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{\pi^2}{\delta^2}}}$$

A.N : $\boxed{Q\approx 10,5}$ Attention sur le graphique on ne voit pas toutes les pseudo-oscillions avant le régime stationnaire, on ne peut pas estimer directement Q

8 A partir du graphique, donner la valeur de la pseudo-pulsation.

On lit sur le graphique 5T = 4,9 s $T=0{,}98\,s$ donc $\omega=\frac{2\pi}{T}=6{,}4\,rad\cdot s^{-1}$

9 En déduire les valeurs numériques de m et de h.

$$\omega=\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}\Rightarrow\omega_0=\frac{\omega}{\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}=\sqrt{\frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{m}}}\quad\Rightarrow\boxed{m=\frac{k}{\omega^2}\left(1-\frac{1}{4Q^2}\right)}$$

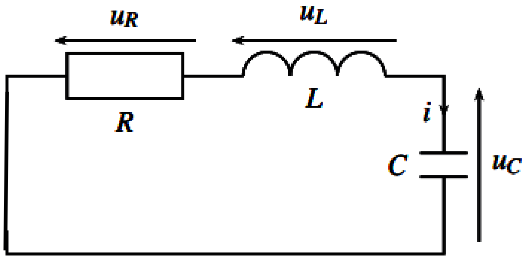
A.N m = 230 g et par définition du facteur de qualité

$$\boldsymbol{Q=\frac{1}{h}\sqrt{mk}\Rightarrow}\boxed{\boldsymbol{h=\frac{\sqrt{mk}}{Q}} \quad \text{A.N } h = 0{,}15 \text{ kg /s}}$$

Exercice 6* (d'après X/ENS) : Interprétation énergétique du facteur de qualité

On considère un circuit RLC série en régime libre. A t=0, le condensateur est chargé avec une charge q_0.

1 Etablir l'équation différentielle satisfaite par la charge q(t) du condensateur lors de la décharge. Définir, en fonction de R, L et C, la pulsation propre du système ainsi que le facteur de qualité. On donnera leur dimension.



$$u_r(t)+u_L(t)+u_c(t)=0$$

ant pour L et R dipôles en conv réc

$$Ri(t)+L\frac{di}{dt}+u_c(t)=0$$

relation charge accumulée sur l'armature positive et tension pour le condensateur $q(t)=Cu_c(t)$

relation intensité charge accumulée $i(t)=\frac{dq}{dt}$

finalement $R\frac{dq}{dt}(t)+L\frac{d^2q}{dt^2}(t)+\frac{q(t)}{C}=0$

$$\boxed{\frac{d^2q}{dt^2}(t)+\frac{R}{L}\frac{dq}{dt}(t)+\frac{q(t)}{LC}=0}$$

On reconnaît l'équation différentielle d'un oscillateur amorti, sous forme canonique on a

$$\frac{d^2q}{dt^2}(t)+\frac{\omega_0}{Q}\frac{dq}{dt}(t)+\omega_0^2q(t)=0$$

par identification :

$$\omega_0^2=\frac{1}{LC}\Rightarrow\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad \frac{\omega_0}{Q}=\frac{R}{L}\Rightarrow Q=\frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

On se place dans la suite dans le cas d'un amortissement faible, c'est-à-dire Q>1/2.

2 En partant du polynôme caractéristique, donner l'expression de q(t). On justifiera les conditions initiales utilisées.

Le polynôme caractéristique possède un discriminant positif en régime apériodique

équation caractéristique :

$$r^2+\frac{\omega_0}{Q}r+\omega_0^2=0$$

Le polynôme caractéristique possède deux racines **complexes conjuguées**:

$$r_1=\frac{-b-i\sqrt{(-\Delta)}}{2a} \qquad r_2=\frac{-b+i\sqrt{(-\Delta)}}{2a}$$

sous forme canonique $r_1=\frac{-\omega_0}{2Q}-i\omega \qquad r_2=\frac{-\omega_0}{2Q}+i\omega$ avec $\omega=\omega_0\sqrt{(\frac{4Q^2-1}{4Q^2})}=\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}$

$$q(t)=e^{\frac{-\omega_0}{2Q}t}\left(A\cos(\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}t)+B\sin(\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}t)\right)$$

à t= 0^- $q(0^-)=q_0$ par continuité de l'énergie stockée dans C (et donc de la charge accumulé car $E_c(t)=1/2\,q(t)^2/C$ on a $\mathbf{q(0^+)=q(0^-)=q_0}$

de plus à t=0⁻ le condensateur est chargé. Le régime permanent est atteint , le condenstaeur se comporte comme un interrupteur ouvert donc $i(0^-)=0$

par continuité de l'intensité du courant traversant une bobine i(0+) = i(0-) = 0

comme $i(t)=\frac{dq}{dt}$ on a $\dot{q}(0^+)=0$

ainsi $q(0^+)=q_0 \Rightarrow \boldsymbol{A=q_0}$

$$\frac{dq}{dt}=\frac{-\omega_0}{2Q}e^{\frac{-\omega_0}{2Q}t}(A\cos(\omega t)+B\sin(\omega t))+e^{\frac{-\omega_0}{2Q}t}(-A\omega\sin(\omega t)+B\omega\cos(\omega t))$$

$$\frac{dq}{dt}(0^+)=0\Rightarrow B\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}-\frac{\omega_0}{2Q}A\Rightarrow 0=B\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}-\frac{\omega_0}{2Q}q_0 \quad\Rightarrow\quad \boxed{B=\frac{q_0}{\sqrt{4Q^2-1}}}$$

3 Donner la durée du régime transitoire en utilisant le critère des 95%.

d'après l'expression de q(t), Le signal q(t) est enveloppé par des enveloppes exponentielles de temps caractéristique de variation $\tau=2\frac{Q}{\omega_0}$

le temps de réponse à 5 % (critère des 95 %) est défini par $\boxed{T_r=3\tau=\frac{6Q}{\omega_0}}$

On se place dans la suite dans le cas d'un amortissement très faible, c'est-à-dire Q>>1.

4

Si Q>>1 $\frac{1}{\sqrt{4Q^2-1}}\approx 0$ et $\omega=\omega_0\sqrt{(\frac{4Q^2-1}{4Q^2})}\approx\omega_0$ donc $q(t)\approx e^{\frac{-\omega_0}{2Q}t}(q_0\cos(\omega_0 t))$

$$\dot{q}(t)\approx\frac{-\omega_0}{2Q}e^{\frac{-\omega_0}{2Q}t}(q_0\cos(\omega_0 t))+e^{\frac{-\omega_0}{2Q}t}(-q_0\omega_0\sin(\omega_0 t))$$

comme Q>>1 le premier terme est négligeable devant le second et $\boxed{\dot{q}(t)\approx e^{\frac{-\omega_0}{2Q}t}(-q_0\omega_0\sin(\omega_0 t))}$

5 En déduire l'énergie électromagnétique $E_m(t)$ contenue dans le circuit à l'instant t.

$$E_m(t)=E_L(t)+E_c(t)$$

$$E_m(t)=\frac{1}{2}L\dot{q}(t)^2+\frac{1}{2}\frac{q(t)^2}{C}$$

$$E_m(t)\approx\frac{1}{2}Le^{-2\frac{\omega_0}{2Q}t}\omega_0^2q_0^2\sin^2(\omega_0 t)+\frac{1}{2}\frac{1}{C}e^{-2\frac{\omega_0}{2Q}t}q_0^2\sin^2(\omega_0 t)$$

or $\omega_0^2=\frac{1}{LC}$

$$E_m(t)\approx\frac{1}{2}\frac{1}{C}e^{\frac{-\omega_0}{Q}t}\omega_0^2q_0^2\sin^2(\omega_0 t)+\frac{1}{2}\frac{1}{C}e^{\frac{-\omega_0}{Q}t}q_0^2\sin^2(\omega_0 t)=\frac{1}{2C}q_0^2e^{\frac{-\omega_0}{Q}t}(\cos^2(\omega_0 t)+\sin^2(\omega_0 t))$$

$$\boxed{E_m(t)\approx\frac{1}{2C}q_0^2e^{\frac{-\omega_0}{Q}t}}$$

6 Que dire du signe de $\frac{dEm}{dt}$? Commenter.

$$\frac{dE_m(t)}{dt} \approx \frac{-\omega_0}{Q\,2C} q_0^2 e^{\frac{-\omega_0}{Q}t} \qquad \frac{dE_m(t)}{dt} < 0$$

L'énergie électromagnétique stockée diminue car elle est dissipé dans le résistor par effet Joule

7 Évaluer la variation relative α d'énergie électromagnétique contenue dans le circuit pendant une pseudo période :

$$\alpha = \frac{E_m(t) - E_m(t+T)}{E_m(t)}$$

$$E_m(t+T) \approx \frac{1}{2C} q_0^2 e^{\frac{-\omega_0}{Q}(t+T)} = \frac{1}{2C} q_0^2 e^{\frac{-\omega_0}{Q}t} \times e^{\frac{-\omega_0}{Q}T}$$ or

$T \approx T_0 \approx \frac{2\pi}{\omega_0}$ donc $e^{\frac{-\omega_0}{Q}T} \approx e^{\frac{-2\pi}{Q}}$

ainsi $E_m(t+T) \approx E_m(t) \times e^{-2\frac{\pi}{Q}}$

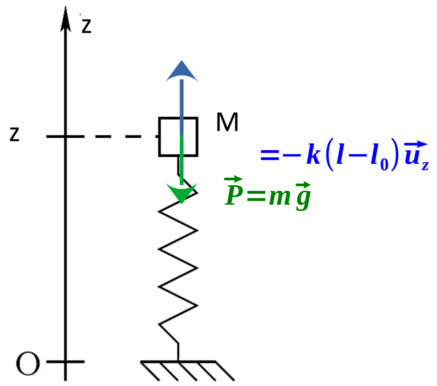
$$\alpha = \frac{E_m(t) - E_m(t+T)}{E_m(t)} = \frac{E_m(t)\left(1 - e^{-2\frac{\pi}{Q}}\right)}{E_m(t)} = 1 - e^{-2\frac{\pi}{Q}}$$

En déduire une caractérisation du facteur de qualité. On donne exp(x) = 1+x pour x<<1.

Comme Q>>1 alors 2π/Q <<1 $e^{\frac{-2\pi}{Q}} \approx 1 + 2\frac{\pi}{Q}$

et finalement

$$\boxed{\alpha = \frac{2\pi}{Q}}$$



Exercice 7: Suspension d'un véhicule
système : {voiture ponctuelle de masse M}
Ref : TSG

.

Bilan des forces
Le poids : $\vec{P} = -Mg\vec{u}_z$ la force de rappel : $\vec{F} = -k(l-l_0)\vec{u}_z = -k(z-l_0)\vec{u}_z$

D'après le principe fondamental de la dynamique appliqué au mobile dans le référentiel d'étude supposé galiléen :

$$M\vec{a} = \vec{P} + \vec{F}$$

$$\vec{a} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2} = \frac{d^2 z}{dt^2}\vec{u}_z \quad \text{donc} \quad M\ddot{z}\vec{u}_z = -Mg\vec{u}_z - k(z-l_0)\vec{u}_z$$

en projetant sur l'axe z : $M\ddot{z} = -Mg - k(z-l_0) \Rightarrow \ddot{z}(t) + \frac{k}{M}z(t) = -g + \frac{kl_0}{M}$

$z(t) = z_H(t) + z_{EQ}$

avec

$\ddot{z}_H(t) + \frac{k}{M}z_H(t) = 0$ par identification la pulsation propre est $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}$

On retrouve la même pulsation propre (et donc aussi la même période des oscillations) que pour un oscillateur harmonique horizontale

$$T_0 = \frac{2\pi}{w_0} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{K}{M}}} = \boxed{2\pi\sqrt{\frac{M}{K}}}$$

A.N $\underline{T_0 = 1{,}09\ s}$

2) $$T_0' = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{K}{M+m}}} = \boxed{2\pi\sqrt{\frac{M+m}{K}}}$$ A.N $\underline{T_0' = 1{,}33\ s}$

3) Le PFD devient : $M\ddot{z} = -K(z-\ell_0) - Mg - b\dot{z}$

soit $$\boxed{\ddot{z} + \frac{b}{M}\dot{z} + \frac{K}{M}z = \frac{K\ell_0}{M} - g}$$

de la forme $\ddot{z} + \frac{w_0}{Q}\dot{z} + w_0^2 z = K$

avec $w_0 = \sqrt{\frac{K}{M}}$ et $\boxed{\frac{w_0}{Q} = \frac{b}{M}}$

si le régime est critique $Q = 1/2$

donc $b = \frac{M w_0}{Q}$

$b = 2\sqrt{MK}$ $\underline{b = 1{,}73 \times 10^3\ N\,m^{-1}\,s}$

4)

on a $(M+m)\ddot{z} = -K(z-\ell_0) - (M+m)g - b\dot{z}$

soit $$\underline{\ddot{z} + \frac{b}{M+m}\dot{z} + \frac{K}{M+m}z = \frac{K\ell_0}{M+m} - g}$$

ici $\frac{w_0'}{Q'} = \frac{b}{M+m}$ et $w_0' = \sqrt{\frac{K}{M+m}}$

donc $Q' = \frac{(M+m)\,w_0'}{b} = \frac{1}{b}\sqrt{(M+m)K}$ A.N $\underline{Q' = 2{,}45}$

Scanné avec CamScanner

$$\boxed{T = \frac{T_0'}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}}$$

A.N

$T = 1{,}37\,s$

Scanné avec CamScanner

Q3) Sous forme canonique $\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0$

par Id $\frac{\omega_0}{Q} = 3\omega_0 \Rightarrow \boxed{Q = \frac{1}{3}}$

$Q < \frac{1}{2} \Rightarrow$ régime apériodique

eq° carac : $r^2 + 3\omega_0 r + \omega_0^2 = 0$

$\Delta = b^2 - 4ac = (9-4)\omega_0^2 = 5\omega_0^2$

$r_1 = -\frac{3\omega_0}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}\omega_0$ $\quad r_2 = \left(\frac{-3}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}\right)\omega_0$

$r_2 - r_1 = -\sqrt{5}\,\omega_0 = -\frac{\sqrt{5}}{RC}$

$u(t) = A e^{+r_1 t} + B e^{+r_2 t}$

$u(0^+) = 0 \Rightarrow A + B = 0 \Rightarrow A = -B$

$\frac{du}{dt}(0^+) = \frac{E}{RC} \Rightarrow r_1 A + r_2 B = \frac{E}{RC} \Rightarrow B = \frac{E}{RC} \times \frac{1}{(r_2 - r_1)}$

$$\boxed{u(t) = \frac{E}{\sqrt{5}} e^{r_1 t} - \frac{E}{\sqrt{5}} e^{r_2 t}}$$

Exercice 9

$\vec{e_y}$, $\vec{e_x}$

Q1) Bilan des forces : • Poids $\vec{P} = m\vec{g}$, • Réaction du support $\vec{R_N} = R_N \vec{e_y}$

• force de frottement : $\vec{f} = -\alpha \vec{V}$ • force de rappel $\vec{F_{rap}} = -K(x-L_0)\vec{e_x}$

• force d'inertie d'entrainement $\vec{F_e} = ma\vec{e_x}$

Q2) système : {accéléromètre}

PFD :

$$m\ddot{x}\vec{e_x} = -mg\vec{e_y} + R_N\vec{e_y} + ma\vec{e_x} - \alpha\dot{x}\vec{e_x} - K(x-L_0)\vec{e_x}$$

Projecto sur (Ox) :

$$m\ddot{x} = -\alpha\dot{x} - Kx + KL_0 + ma$$

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{K}{m}(x-L_0) = a$$

chgt de variable $X(t) = x - L_0 \Rightarrow \boxed{\ddot{X} + \frac{\alpha}{m}\dot{X} + \frac{K}{m}X = a}$

Par id $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}}}$ $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{\alpha}{m} \Rightarrow \boxed{Q = \frac{1}{\alpha}\sqrt{mK}}$

Q3) avant la phase de freinage $a = 0$ et $x = L_0 \Rightarrow X = 0$

Mvt rectiligne + uniforme

1er principe ⇒ donc $\dot{X} = V_0$ et $\ddot{X} = 0$ $\Rightarrow$ $X(t) = 0 \quad \forall t < 0$ $\quad X(0) = 0$

vitesse

$\dot{X}(0)$

$\forall t > 0$ (Pendant le freinage) régime critique donc $Q = \frac{1}{2}$

critique?

eq carac : $r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow r = -\frac{\omega_0}{2Q}$

$$X(t) = (At+B)e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} + \text{sol particulière}$$

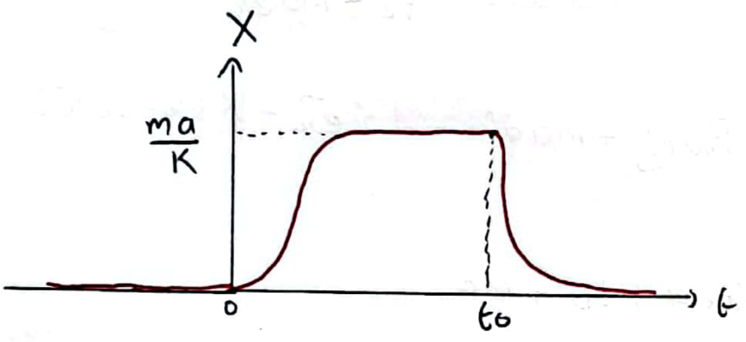
$$\cancel{\ddot{X}_p}^{\,0} + \frac{\alpha}{m}\cancel{\dot{X}_p}^{\,0} + \frac{K}{m}X_p = a \Rightarrow X_p = \frac{ma}{K}$$

$$\boxed{X(t) = (At+B)e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} + \frac{ma}{K}}$$ (Pendant le freinage)

dès que la voiture s'arrête : $X(t) = 0$ (car immobile $a = 0$)

Si le régime permanent a le tps de s'établir

$\boxed{X(t) \longrightarrow \frac{ma}{K}}$ avant $t = t_0$



Q4) $a_{moy} = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{0-25}{0,15}$

vitesse finale — vitesse initiale

$a_{moy} = -16\cancel{7}\ m.s^{-2}$

Q5) $\|\vec{F}_{el}\| = \|m\vec{a}_{moy}\| = m|a_{moy}|$

A.N $\|\vec{F}_{el}\| = 0,4\cancel{7}\ N$

Q6) $[X] = \frac{[\text{Tension}]}{[\text{force}]} \Rightarrow U = X \times \|\vec{F}_{el}\|$

$U = 6 \times 0,47 \simeq 2,82V$

c'est une tension totalement mesurable

Scanné avec CamScanner