Correction DS03

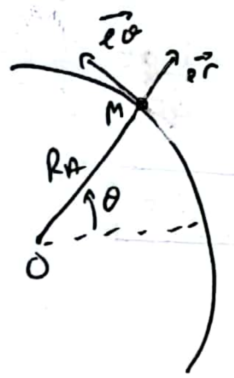
Exercice 1

Q1) $\underline{d = R_A - R_B}$

Q2) $\underline{D_A = \pi R_A}$

Q3) $D_B = 2d + \pi R_B = \underline{2(R_A - R_B) + \pi R_B}$

Q4)



$\vec{v_A} = \frac{d}{dt}(R_A \vec{e_r})$

$\underline{\vec{v_A} = R_A \dot{\theta} \vec{e_\theta}}$

Q5) $\vec{a_A} = \frac{d\vec{v_A}}{dt} = R_A \ddot{\theta} \vec{e_\theta} - R_A \dot{\theta}^2 \vec{e_r}$

or $R_A \ddot{\theta} = \frac{dv_A}{dt}$

mais $v_A = cste \Rightarrow \underline{\ddot{\theta} = 0}$

ainsi $\vec{a_A} = -R_A \dot{\theta}^2 \vec{e_r}$

$v_A = \|\vec{v_A}\| = R_A \dot{\theta} \Rightarrow \boxed{\vec{a_A} = -\frac{v_A^2}{R_A} \vec{e_r}}$

Q6) $\underset{\substack{\uparrow \\ \text{limite}}}{\|\vec{a_A}\| =} 0{,}8g = \frac{v_A^2}{R_A} \Rightarrow \underline{v_A = \sqrt{0{,}8 g R_A}}$

A.N $\underline{v_A = 26{,}6\ m.s^{-1}}$

Q7) $\underline{\Delta t_A = \frac{D_A}{v_A}}$ A.N $\underline{\Delta t_A = 10{,}6\ s}$

Q8) ds le virage $\vec{v_B} = -R_B \dot{\theta}_B \vec{e_r}$ et $\vec{a_B} = -\frac{v_B^2}{R_B} \vec{e_r}$

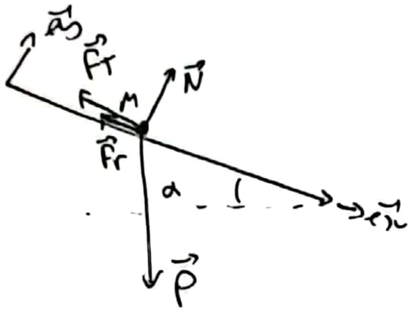
si l'accélération vaut $0{,}g$ on a $v_B = \sqrt{0{,}8 g R_B}$

A.N $v_B = 24{,}3\ m.s^{-1}$

$\Delta t_B = \frac{D_B}{v_B}$ A.N : $\underline{\Delta t_B = 10{,}95\ s}$

Hamilton sort donc le premier du virage car $\Delta t_B > \Delta t_A$!

Exercice 2



Q1) Système : {cycliste + vélo}
Référentiel : Terrestre Supposé galiléen (TSG)

Principe fondamentale de la dynamique (PFD) appliqué au système :

Bilan des forces

$\vec{F_T} = -\frac{1}{2}\rho S C_x v^2 \vec{e_x}$

$\vec{F_r} = -\mu_r N \vec{e_x}$

$\vec{P} = mg\sin\alpha\,\vec{e_x} - mg\cos\alpha\,\vec{e_y}$

$\vec{N} = N\vec{e_y}$

$$\underbrace{m\vec{a}}_{\text{selon } \vec{e_x}} = \vec{F_T} + \vec{F_r} + \vec{P} + \vec{N}$$

Projection sur $\vec{e_y}$: $0 = -mg\cos\alpha + N$ (1)

sur $\vec{e_x}$: $m\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{2}\rho S C_x v^2 - \mu_r N + mg\sin\alpha$

(1) → $\boxed{N = mg\cos\alpha}$

donc

$$m\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{2}\rho S C_x v^2 - \mu_r mg\cos\alpha + mg\sin\alpha$$

$$\boxed{\frac{dv}{dt} + \underbrace{\frac{1}{2}\rho\frac{S C_x}{m}}_{a} v^2 = \underbrace{g(\sin\alpha - \mu_r\cos\alpha)}_{b}}$$

A.N $a = 2{,}25.10^{-3}\,s^2.m$

$b = 0{,}917\,m.s^{-2}$

Q2) En régime permanent :

$\frac{dv}{dt} = 0$ donc $\frac{1}{2}\rho\frac{S C_x}{m} v_{lim}^2 = g(\sin\alpha - \mu_r\cos\alpha)$

$$v_{lim} = \sqrt{\frac{\frac{2mg(\sin\alpha - \mu_r\cos\alpha)}{\rho}}{S\;C_x}}$$

$$\boxed{K = \frac{2mg(\sin\alpha - \mu_r\cos\alpha)}{\rho}}$$

Q3) $\boxed{v_{lim} \simeq 20{,}2\,m.s^{-1}}$

Q4) en combinant les lignes 6 et 9

on voit qu'on rajoute à la liste V le terme

V[i] + (t[i+1] - t[i]) × (0,92 - 2,3×10⁻³ × V[i] × V[i])

or l'équation différentielle est $\frac{dv}{dt} = 0{,}92 - 2{,}3\,10^{-3} v^2$

$\Leftrightarrow \frac{v(t+dt) - v(t)}{dt} = 0{,}92 - 2{,}3\,10^{-3} v^2(t)$

en python : v(t+dt) donne V[i+1], v(t) = V[i] et dt = t[i+1] - t[i]

on a donc $\frac{V[i+1] - V[i]}{t[i+1] - t[i]} = 0{,}92 - 2{,}3\,10^{-3}\, V^2[i]$

soit V[i+1] = V[i] + (t[i+1] - t[i])(0,92 - 2,3 10⁻³ V[i]**2)

le programme permet donc de calculer v(t+dt) connaissant v(t) :

c'est la méthode d'Euler

Q5) pendant les 20 premières secondes on voit que v est proportionnelle à t

on a donc $v(t) = at$ avec $a = \frac{15}{20} = 0{,}75\ m.s^{-2}$

⚠ v n'est pas constante !

$\cancel{v = \frac{d}{\Delta t}}$ FAUX

On primitive l'expression $v = at$ pour avoir la distance :

$x(t) = \frac{at^2}{2}$ ainsi $L_{RP} = x(t_f)$ avec $t_f = 20s$

A.N $L_{RP} = 0{,}75 \times \frac{20^2}{2} = \boxed{150\,m}$

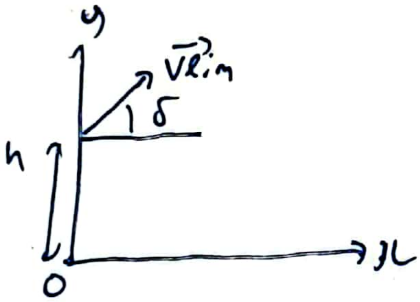
Q6)
```
i = 0
LRP = 0
while t[i]<20:
    LRP += V[i]*(t[i+1]-t[i])
    i += 1
print(LRP)
```

$v(t) = \frac{x(t+dt) - x(t)}{dt}$

donc $x(t+dt) = v(t)\,dt + x(t)$

en python : x[i+1] = V[i]×dt + x[i]

Q7



PFD appliqué au système en chute libre

$$m\vec{a} = m\vec{g} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{g}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -g \end{cases}$$

Primitive

$$\begin{cases} \dot{x} = V_{lim}\cos\delta \\ \dot{y} = -gt + V_{lim}\sin\delta \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = V_{lim}\cos\delta\, t + \cancel{x(0)} \\ y(t) = -g\frac{t^2}{2} + V_{lim}\sin\delta\, t + h \end{cases}$$

$$t = \frac{x}{V_{lim}\cos\delta} \Rightarrow y(x) = -\frac{g}{2}\frac{x^2}{(V_{lim}\cos\delta)^2} + x\tan\alpha + h$$

On cherche x_D tel que $y(x_D) = 0 \Leftrightarrow \boxed{-\frac{g}{2}\frac{x_D^2}{V_{lim}^2\cos^2\delta} + x_D\tan\alpha + h = 0}$

$$x_{0_1} = \frac{+V_{lim}^2 \cos^2\delta}{g} \pm \sqrt{\tan^2\delta + \frac{4h\,g}{2V_{lim}^2\cos^2\delta}}\ \frac{2V_{lim}^2\cos^2\delta}{g}$$

on garde la solution positive (ou on utilise la calculatrice

$$\boxed{x(tf) \simeq 38\,m}$$

On sinon :

$y(tf)=0 \Leftrightarrow -g\frac{tf^2}{2} + v_{lim}\sin\delta\, tf + h = 0 \Rightarrow tf \simeq 2{,}2\ sec$

avec $v_{lim} \simeq 20{,}2\ m/s$

et $x(tf) = v_{lim}\cos\delta\, tf \simeq 38\,m$

Problème 1

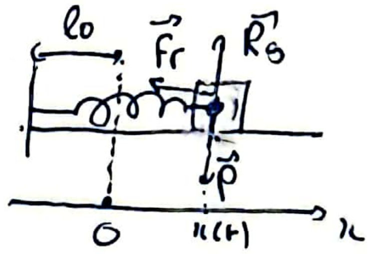
Q1) Le mvt s'effectue seulement selon Ox

le déplacement selon Oy est nul donc d'après le principe d'inertie les forces se compensent selon $\vec{e_y}$

Les 2 forces selon $\vec{e_y}$ sont $\vec{P} + \vec{R_g}$ donc elles se compensent

Q2) Système : { plateforme }

Ref : TSG



Bilan des forces : $\vec{P}, \vec{R_g}, \vec{Fr} = -Kx\vec{e_x}$

PFD en projection sur Ox : $\boxed{m\ddot{x} = -Kx}$

Q3) $\boxed{w_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} \text{ est la pulsation propre qui s'exprime en } rad.s^{-1} \quad [w_0] = T^{-1}}$

$\underline{x(0) = B_0 = x_0}$

$\dot{x}(t) = A_0 w_0 \cos(w_0 t) - B_0 w_0 \sin(w_0 t)$

$\underline{\dot{x}(0) = A_0 w_0 = \dot{x}_0}$

finalement $x(t) = x_0 \cos(w_0 t) + \frac{\dot{x}_0}{w_0} \sin(w_0 t)$

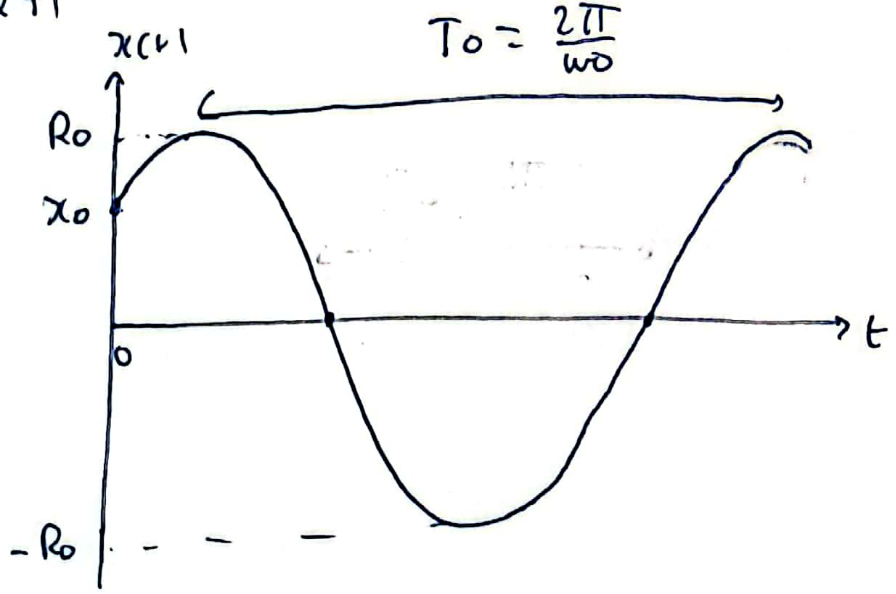
Q4)

$R_0 \cos(w_0 t - \phi_0) = R_0 \cos(w_0 t) \cos\phi_0 + R_0 \sin(w_0 t) \sin\phi_0$

Par identification $\boxed{\begin{array}{l} R_0 \cos\phi_0 = x_0 \\ R_0 \sin\phi_0 = \frac{\dot{x}_0}{w_0} \end{array}}$ $\Rightarrow \underline{R_0^2 = x_0^2 + \left(\frac{\dot{x}_0}{w_0}\right)^2}$

$\underline{\tan\phi_0 = \frac{\dot{x}_0}{x_0 w_0} \Rightarrow \phi_0 = \arctan\left(\frac{\dot{x}_0}{w_0 x_0}\right)}$

Q5)



Q6) $E(t) = K(t) + U(t) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2(t) + \frac{1}{2} K x^2(t)$

$\dot{x}(t) = -w_0 R_0 \sin(w_0 t + \phi_0)$

$E(t) = \frac{1}{2} m\, w_0^2 R_0^2 \sin^2(w_0 t - \phi_0) + \frac{1}{2} K R_0^2 \cos^2(w_0 t - \phi_0)$

or $w_0^2 = \frac{K}{m} \Rightarrow E(t) = \frac{1}{2} K R_0^2 \underbrace{\left[\cos^2(w_0 t - \phi_0) + \sin^2(w_0 t - \phi_0)\right]}_{1}$

$\boxed{E(t) = \frac{1}{2} k R_0^2}$ Indépendant du temps : l'énergie mécanique se conserve (cohérent car on a négligé les frottements)

Q7) Le Principe fondamental de la dynamique appliqué au système donne :

$m\ddot{x}\vec{e_x} = -\gamma\dot{x}\vec{e_x} - kx\vec{e_x}$ soit par projection sur $\vec{e_x}$:

$$\ddot{x} + \frac{\gamma}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Par identification avec l'équation canonique de l'oscillateur amorti :

$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$ et $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{\gamma}{m} \Leftrightarrow \sqrt{\frac{k}{m}} \times \frac{1}{Q} = \frac{\gamma}{m}$

$\Leftrightarrow \boxed{Q = \frac{1}{\gamma}\sqrt{mk}}$

Q8) en régime pseudo périodique $\boxed{Q > \frac{1}{2}}$

Q9) équation caractéristique : $r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$

$\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 < 0$ (régime pseudo périodique)

racines : $r_1 = \frac{\omega_0}{2Q} + i\frac{\sqrt{4\omega_0^2 - \frac{\omega_0^2}{Q^2}}}{2}$ et $r_2 = \frac{\omega_0}{2Q} - i\frac{\sqrt{4\omega_0^2 - \frac{\omega_0^2}{Q^2}}}{2}$

on pose $\omega_d = \sqrt{4\omega_0^2 - \frac{\omega_0^2}{Q^2}} \times \frac{1}{2} = \boxed{\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$

les solutions sont de la forme :

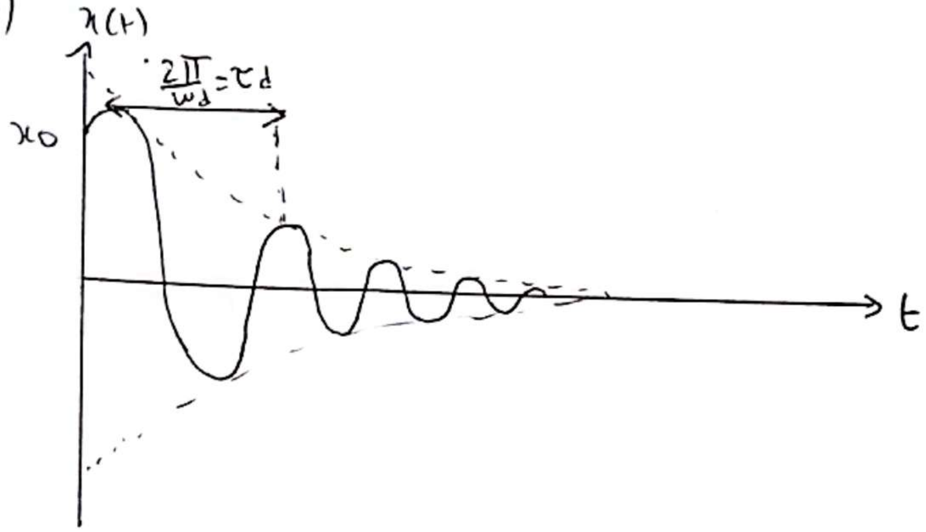
$$\boxed{x(t) = e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}\left(A_d\cos(\omega_d t) + B_d\sin(\omega_d t)\right)}$$

Q10) $x(0) = x_0 \Leftrightarrow e^0(A_d\cos 0 + B_d \sin 0) = x_0 \Leftrightarrow \boxed{A_d = x_0}$

$\dot{x}(t) = -\frac{\omega_0}{2Q}e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}\left(A_d\cos(\omega_d t) + B_d\sin(\omega_d t)\right) + e^{-\frac{\omega_0 t}{2Q}}\left(-\omega_d A_d\sin(\omega_d t) + B_d\omega_d\cos(\omega_d t)\right)$

$\dot{x}(0) = \dot{x}_0 \Leftrightarrow -\frac{\omega_0}{2Q}A_d + B_d\omega_d = \dot{x}_0 \Rightarrow \boxed{B_d = \left(\dot{x}_0 + \frac{\omega_0 x_0}{2Q}\right)\frac{1}{\omega_d}}$

Q11)



Q12) $\tau_d = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{K}{m}}\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}$ (1)

graphiquement $\underline{\tau_d = t_2 - t_1 = 4{,}004\ s}$

on isole Q dans (1) : $\tau_d^2 = \frac{4\pi^2}{\frac{K}{m}\left(1-\frac{1}{4Q^2}\right)}$

soit

$\frac{K}{m}\left(1-\frac{1}{4Q^2}\right) = \frac{4\pi^2}{\tau_d^2}$ $\quad \Leftrightarrow \tau_d^2 = K$

ci $1-\frac{1}{4Q^2} = \frac{4\pi^2}{\tau_d^2} \times \frac{m}{K} \Leftrightarrow \frac{1}{4Q^2} = 1 - \frac{4\pi^2}{\tau_d^2} \times \frac{m}{K} \Leftrightarrow 4Q^2 = \frac{1}{1-\frac{4\pi^2}{\tau_d^2}\times\frac{m}{K}}$

finalement $\boxed{Q = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{1-\frac{4\pi^2}{\tau_d^2}\times\frac{m}{K}}}}$

A.N $Q = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{1-\frac{4\pi^2}{(4{,}004)^2}\times\frac{110\times10^3}{2{,}78\times10^5}}} = \underline{3{,}12}$

Rmq $Q > \frac{1}{2}$ (cohérent)