1

Correction DS03

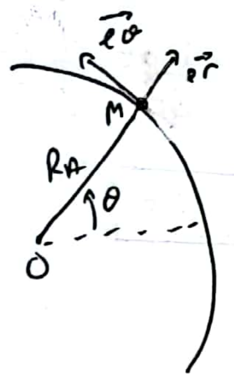
Exercice 1

Q1) $\underline{d = R_A - R_B}$

Q2) $\underline{D_A = \pi R_A}$

Q3) $D_B = 2d + \pi R_B = \underline{2(R_A - R_B) + \pi R_B}$

Q4)



$\vec{V_A} = \frac{d}{dt}(R_A \vec{e_r})$

$\underline{\vec{V_A} = R_A \dot{\theta} \vec{e_\theta}}$

Q5) $\vec{a_A} = \frac{d\vec{V_A}}{dt} = R_A \ddot{\theta} \vec{e_\theta} - R_A \dot{\theta}^2 \vec{e_r}$

or $R_A \ddot{\theta} = \frac{dv_A}{dt}$

mais $v_A = cste \Rightarrow \underline{\ddot{\theta} = 0}$

ainsi $\vec{a_A} = -R_A \dot{\theta}^2 \vec{e_r}$

$V_A = \|\vec{V_A}\| = R_A \dot{\theta} \Rightarrow \boxed{\vec{a_A} = -\frac{V_A^2}{R_A}\vec{e_r}}$

Q6) $\|\vec{a_A}\| = 0{,}8g = \frac{V_A^2}{R_A} \Rightarrow \underline{V_A = \sqrt{0{,}8 g R_A}}$

limite

A.N $\underline{V_A = 26{,}6 \text{ m.s}^{-1}}$

Q7) $\underline{\Delta t_A = \frac{D_A}{V_A}}$ A.N $\underline{\Delta t_A = 10{,}6 \text{ s}}$

Q8) ds le virage $\vec{V_B} = -R_B \dot{\theta}_B \vec{e_r}$ et $\vec{a_B} = -\frac{V_B^2}{R_B}\vec{e_r}$

si l'accélération vaut $0{,}g$ on a $V_B = \sqrt{0{,}8 g R_B}$

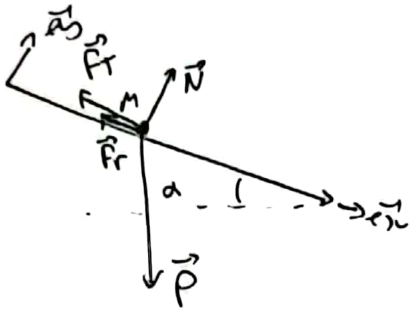
A.N $V_B = 24{,}3 \text{ m.s}^{-1}$

$\Delta t_B = \frac{D_B}{V_B}$ A.N : $\underline{\Delta t_B = 10{,}95 \text{ s}}$

Hamilton sort donc le premier du virage car $\Delta t_B > \Delta t_A$!

Scanné avec CamScanner

Exercice 2



Bilan des forces

$\vec{F_T} = -\frac{1}{2}\rho S C_x v^2 \vec{e_x}$

$\vec{F_r} = -\mu_r N \vec{e_x}$

$\vec{P} = mg\sin\alpha\,\vec{e_x} - mg\cos\alpha\,\vec{e_y}$

$\vec{N} = N\vec{e_y}$

Q1) Système : {cycliste + vélo}

Référentiel : Terrestre Supposé galiléen (TSG)

Principe fondamentale de la dynamique (PFD) appliqué au système :

$m\underbrace{\vec{a}}_{\text{selon } \vec{e_x}} = \vec{F_T} + \vec{F_r} + \vec{P} + \vec{N}$

Projection sur $\vec{e_y}$: $0 = -mg\cos\alpha + N$ (1)

sur $\vec{e_x}$: $m\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{2}\rho S C_x v^2 - \mu_r N + mg\sin\alpha$

(1) → $\boxed{N = mg\cos\alpha}$

donc

$m\frac{dv}{dt} = -\frac{1}{2}\rho S C_x v^2 - \mu_r mg\cos\alpha + mg\sin\alpha$

$$\boxed{\frac{dv}{dt} + \underbrace{\frac{1}{2}\rho\frac{S C_x}{m}}_{a} v^2 = \underbrace{g(\sin\alpha - \mu_r\cos\alpha)}_{b}}$$

A.N $a = 2{,}25.10^{-3}\ s^2.m$

$b = 0{,}917\ m.s^{-2}$

Q2) En régime permanent :

$\frac{dv}{dt} = 0$ donc $\frac{1}{2}\rho\frac{S C_x}{m} v_{lim}^2 = g(\sin\alpha - \mu_r\cos\alpha)$

$$V_{lim} = \sqrt{\frac{\frac{2m g(\sin\alpha - \mu_r\cos\alpha)}{\rho}}{S\ C_x}}$$

$$\boxed{K = \frac{2mg(\sin\alpha - \mu_r\cos\alpha)}{\rho}}$$

Q3) $\boxed{V_{lim} \simeq 20{,}2\ m.s^{-1}}$

Scanné avec CamScanner

Q4)

On peut supposer que $v(t) = at$ entre 0 et 20 sec (fonction linéaire du temps)

avec $a \simeq \frac{15}{20}$ m.s^{-2} $= 0{,}75$ ms^{-2}

⚠ lautone n'est pas constante !

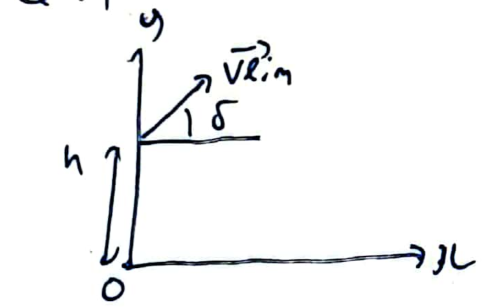
ainsi par primitive $x(t) = a\frac{t^2}{2}$

$$L_{RP} = x(t_f) = \boxed{a\frac{t_f^2}{2}} = 0{,}75 \times \frac{20^2}{2}$$

avec $t_f = 20$ s

$$\boxed{L_{RP} = 150\,m}$$

Q5)



PFD appliqué au système en chute libre

$$m\vec{a} = m\vec{g} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{g}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -g \end{cases}$$

Primitive

$$\begin{cases} \dot{x} = v_{lim}\cos\delta \\ \dot{y} = -gt + v_{lim}\sin\delta \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(t) = v_{lim}\cos\delta\, t + \cancel{x(0)}^{0} \\ y(t) = -g\frac{t^2}{2} + v_{lim}\sin\delta\, t + h \end{cases}$$

$t = \frac{x}{v_{lim}\cos\delta}$ $\Rightarrow$ $y(x) = -\frac{g}{2}\frac{x^2}{(v_{lim}\cos\delta)^2} + x\tan\delta + h$

On cherche x_D tel que $y(x_D) = 0$ $\Leftrightarrow$ $-\frac{g}{2}\frac{x_D^2}{v_{lim}^2\cos^2\delta} + x_D\tan\delta + h = 0$

Scanné avec CamScanner

$$x_{0_1} = +\frac{Vlim^2 \cos^2\delta}{g} \pm \sqrt{\tan^2\delta + 4h\frac{g}{2Vlim^2\cos^2\delta}}\ \frac{2Vlim^2\cos^2\delta}{g}$$

on garde la solution positive (ou on utilise la calculatrice

$$\boxed{x(tf) \simeq 38m}$$

On sinon :

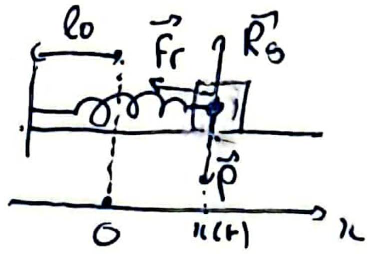
$y(tf) = 0 \iff -g\frac{tf^2}{2} + vlim\sin\delta\, tf + h = 0 \Rightarrow tf \simeq 2,2\ sec$

avec $vlim \simeq 20,2\ m/s$

et $x(tf) = vlim\cos\delta\, tf \simeq 38m$

Problème 1

Q1) Le mvt s'effectue seulement selon Ox
le déplacement selon Oy est nul donc d'après le principe d'inertie les forces se compensent selon $\vec{e_y}$
Les 2 forces selon $\vec{e_y}$ sont $\vec{P} + \vec{R_g}$ donc elles se compensent



Q2) Système : { plateforme }
Ref : TSG
Bilan des forces : $\vec{P}, \vec{R_g}, \vec{Fr} = -Kx\vec{e_x}$
PFD en projection sur Ox : $\boxed{m\ddot{x} = -Kx}$

Q3) $\boxed{w_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} \text{ est la pulsation propre qui s'exprime en } rad.s^{-1} \quad [w_0] = T^{-1}}$

Scanné avec CamScanner

$\underline{x(0) = B_0 = x_0}$

$\dot{x}(t) = A_0 w_0 \cos(w_0 t) - B_0 w_0 \sin(w_0 t)$

$\underline{\dot{x}(0) = A_0 w_0 = \dot{x}_0}$

finalement $x(t) = x_0 \cos(w_0 t) + \dfrac{\dot{x}_0}{w_0} \sin(w_0 t)$

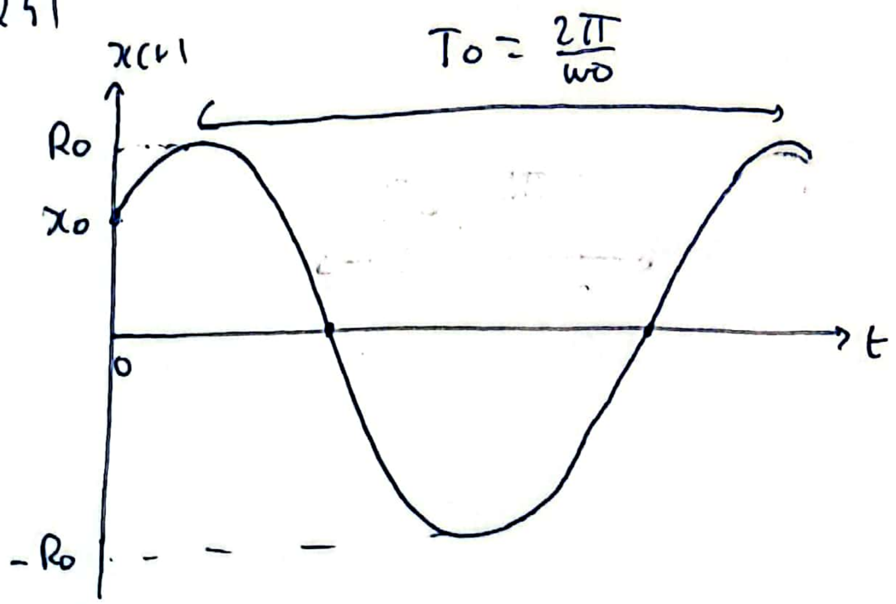
Q4)

$R_0 \cos(w_0 t - \phi_0) = R_0 \cos(w_0 t) \cos\phi_0 + R_0 \sin(w_0 t) \sin\phi_0$

Par identification $\boxed{\begin{array}{l} R_0 \cos\phi_0 = x_0 \\ R_0 \sin\phi_0 = \dfrac{\dot{x}_0}{w_0} \end{array}}$ $\Rightarrow \underline{R_0^2 = x_0^2 + \left(\dfrac{\dot{x}_0}{w_0}\right)^2}$

$\underline{\tan\phi_0 = \dfrac{\dot{x}_0}{x_0 w_0} \Rightarrow \phi_0 = \arctan\left(\dfrac{\dot{x}_0}{w_0 x_0}\right)}$

Q5)



Q6) $E(t) = K(t) + U(t) = \dfrac{1}{2} m \dot{x}^2(t) + \dfrac{1}{2} K x^2(t)$

$\dot{x}(t) = -w_0 R_0 \sin(w_0 t + \phi_0)$

$E(t) = \dfrac{1}{2} m\, w_0^2 R_0^2 \sin^2(w_0 t - \phi_0) + \dfrac{1}{2} K R_0^2 \cos^2(w_0 t - \phi_0)$

or $w_0^2 = \dfrac{K}{m} \Rightarrow E(t) = \dfrac{1}{2} K R_0^2 \underbrace{\left[\cos^2(w_0 t - \phi_0) + \sin^2(w_0 t - \phi_0)\right]}_{1}$

Scanné avec CamScanner

$$\boxed{E(t) = \frac{1}{2} k R_0^2}$$ ← indépendant du temps

l'energie mécanique se conserve

Car on a négligé les frottements

Q7)

Le PFD appliqué au système en projection sur Ox donne

$$m\ddot{x} = -\gamma \dot{x} - Kx$$

Soit $\ddot{x} + \frac{\gamma}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$

Par identificat°

$$w_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$2\xi w_0 = \frac{\gamma}{m} \Rightarrow \xi = \frac{1}{2}\frac{\gamma}{m w_0} \Rightarrow \boxed{\xi = \frac{1}{2}\gamma\frac{1}{\sqrt{mK}}}$$

Q8)

equation caractéristique :

$$r^2 + 2\xi w_0 r + w_0^2 r = 0$$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 4w_0^2(\xi^2 - 1) < 0 \text{ si } \xi < 1$$

racines $r_{1,2} = -\xi w_0 \pm i\sqrt{-\frac{\Delta}{4}} = -\xi w_0 \pm i\sqrt{1-\xi^2}\, w_0$

pseudo-pulsation w_d

on sait que les solutions sont alors de la forme

$$x(t) = e^{-\xi w_0 t}\left[A_d \cos(w_d t) + B_d \sin(w_d t)\right]$$

$x(0) = x_0 \Leftrightarrow \boxed{A_d = x_0}$

$$\dot{x}(t) = -\xi w_0 e^{-\xi w_0 t}\left(A_d \cos(w_d t) + B_d \sin(w_d t)\right) + e^{-\xi w_0 t}\left[w_d\left(-A_d \sin(w_d t) + B_d \cos(w_d t)\right)\right]$$

Scanné avec CamScanner

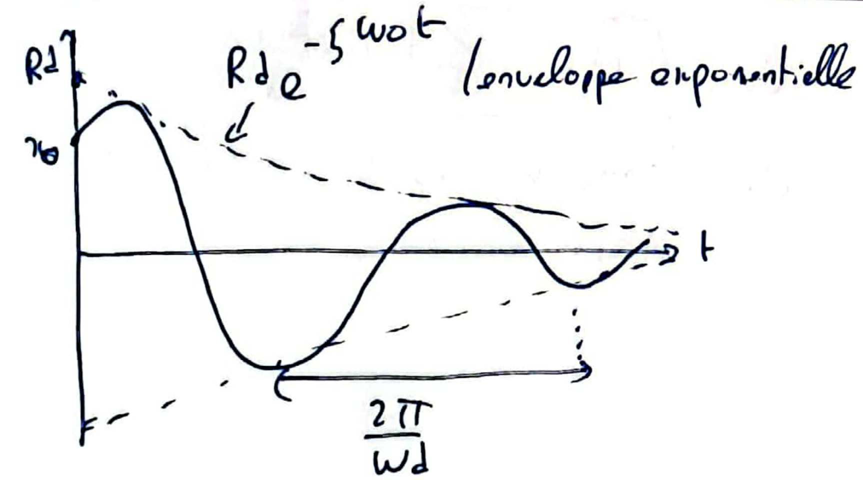
$$\dot{x}_0 = -\xi w_0 x_0 + B_d w_d$$

$$\boxed{B_d = \frac{\dot{x}_0 + \xi w_0 x_0}{w_d}}$$

Q9) de la même façon qu'à Q4

$$R_d \cos\phi_d = A_d \quad R_d \sin\phi_d = B_d \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_d = \sqrt{B_d^2 + A_d^2} \quad \phi_d = \arctan\left(\frac{B_d}{A_d}\right)}$$

Q10)



Q11)

$$T = \frac{2\pi}{w_d} = \frac{2\pi}{w_0\sqrt{1-\xi^2}} \Leftrightarrow \sqrt{1-\xi^2} = \frac{2\pi}{w_0 T}$$

$$1-\xi^2 = \frac{4\pi^2}{w_0^2 T^2} = \frac{4\pi^2}{K T^2} \times m$$

$$w_0^2 = \frac{K}{m}$$

$$\boxed{\xi^2 = 1 - \frac{4\pi^2 m}{K T^2}} \Rightarrow \xi^2 = 0{,}027$$

$T = 4{,}004$ s (graphique)

A.N: $\boxed{\xi = 0{,}16}$

Scanné avec CamScanner

Q12)

$$E(t) = \frac{1}{2} m\dot{x}^2(t) + \frac{1}{2} K x^2(t)$$

quand $\xi = 0$ $\omega_d = \omega_0$ et $e^{-\xi\omega_0 t} = 1$ donc $x(t) = Rd\cos(\omega_0 t - \phi_D)$

on se retrouve avec des oscillations harmoniques !

donc $\boxed{E(t) = \frac{1}{2} K Rd^2}$

quand $\xi = 1$ $\omega_d = \omega_0\sqrt{1-\xi^2} = 0$ et $e^{-\xi\omega_0 t} = e^{-\omega_0 t}$

donc $x(t) = Rd\, e^{-\xi\omega_0 t}\cos(-\phi_D) = \underbrace{Rd\cos(\phi_d)}_{Ad = x_0} e^{-\xi\omega_0 t} = x_0 e^{-\omega_0 t}$

$$\dot{x}(t) = -\omega_0 x_0 e^{-\omega_0 t}$$

et $E(t) = \frac{1}{2} K x^2(t) + \frac{1}{2} m\dot{x}^2(t) = \frac{1}{2} k x_0^2 e^{-2\omega_0 t} + \frac{1}{2} \frac{m\omega_0^2}{k} x_0^2 e^{-2\omega_0 t}$

$$\boxed{E(t) = K x_0^2 e^{-2\omega_0 t}}$$

$E(t)$ diminue de façon exponentielle

cette diminution est causée par les frottements