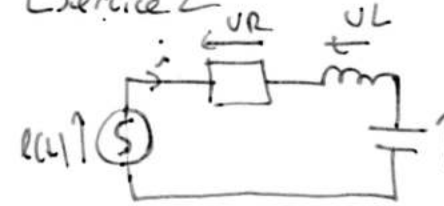
Exercice 2



ddM

$e(t) = u_R + u_L + u_C$

$\downarrow$

$e(t) = Ri + L\frac{di}{dt} + u_C$

D'après la relation i-u pour C :

$$i(t) = C\frac{du_C}{dt}$$

Ainsi $e(t) = RC\frac{du_C}{dt} + LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + u_C$

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{LC} = \frac{e(t)}{LC}$$

On reconnait une équation différentielle

$$\ddot{u}_C + \frac{\omega_0}{Q}\dot{u}_C + \omega_0^2 u_C(t) = \omega_0^2 e(t)$$

Par id : $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$

Q2 et 3 méthode 2

On pose $\underline{u_C}(t) = \underline{U_{C0}}e^{j\omega t} = U_{C0}e^{j\phi}e^{j\omega t}$

et $\underline{e}(t) = E_0 e^{j\omega t}$

On remplace par les grandeurs complexes dans l'E.D :

$$(j\omega)^2\underline{u_C} + \frac{\omega_0}{Q}j\omega\underline{u_C} + \omega_0^2\underline{u_C} = \omega_0^2\underline{e}(t)$$

$$\underline{u_C}\left(\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega\omega_0}{Q}\right) = \omega_0^2\underline{e}(t) \quad *$$

Q2 méthode 1

On a 3 dipôles en série

d'après la formule du pont diviseur de tension en régime sinusoïdale forcé $\underline{U_C}(t) = \frac{\underline{Z_C}}{\underline{Z_C} + \underline{Z_L} + \underline{Z_R}}\underline{e}(t)$

$$\underline{U_{C0}}e^{j\omega t} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{\frac{1}{jC\omega} + jL\omega + R}E_0 e^{j\omega t}$$

$$\underline{U_{C0}} = \frac{1}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}\cdot E_0$$

Q3

$$\underline{U_{C0}} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{\omega}{\omega_0}\frac{1}{Q}}E_0$$

* suite

$$\underline{U_{C0}}\left(\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega\omega_0}{Q}\right) = \omega_0^2 E_0$$

$$\underline{U_{C0}} = \frac{\omega_0^2 E_0}{\left(\omega_0^2 - \omega^2 + j\frac{\omega\omega_0}{Q}\right)}$$

$$\underline{U_{C0}} = \frac{\omega_0^2 E_0}{\omega_0^2\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{\omega}{\omega_0}\times\frac{1}{Q}\right)}$$

$$\boxed{\underline{U_{C0}} = \frac{E_0}{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{\omega}{\omega_0}\times\frac{1}{Q}\right)}}$$

Q4] $U_{C0} = |\underline{U_{C0}}| = \frac{E_0}{\left|1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{\omega}{\omega_0}\times\frac{1}{Q}\right|}$

$$\boxed{U_{C0} = \frac{E_0}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\times\frac{1}{Q^2}}}}$$

5). Pour avoir résonance en tension aux bornes du condensateur, l'amplitude U_{C0} de la tension aux bornes de C doit atteindre un maximum pour une certaine pulsation du signal émis par le GBF appelée alors pulsation de résonance. Si ce maximum n'existe pas il n'y a pas de résonance.

Ainsi, Il y a résonance si la fonction : $\omega \to U_{C0}(\omega) = \dfrac{E_0}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \frac{1}{Q^2}}}$

possède un <u>maximum</u>

C'est le cas si et seulement si la fonction $D : \omega \longmapsto \left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \times \frac{1}{Q^2}$ admet un <u>minimum</u>

$$D'(\omega) = \frac{dD}{d\omega} = \frac{d}{d\omega}\left[\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2\right] + \frac{d}{d\omega}\left[\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \times \frac{1}{Q^2}\right]$$

$$\frac{d}{d\omega}\left[\omega^2 \times \frac{1}{\omega_0^2 Q^2}\right] = \frac{2\omega}{\omega_0^2 Q^2}$$

$$\frac{d}{d\omega}\left[\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2\right] = 2\frac{d}{d\omega}\left[1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right] \times \left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)$$

$$= 2\left(-\frac{2\omega}{\omega_0^2}\right) \times \left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)$$

Ainsi

$$\frac{dD}{d\omega} = 2\left(-\frac{2\omega}{\omega_0^2}\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right) + \frac{\omega}{\omega_0^2} \times \frac{1}{Q^2}\right) = \underbrace{\frac{2\omega}{\omega_0^2}}_{\geq 0}\left[-2\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right) + \frac{1}{Q^2}\right]$$

le signe de $\frac{dD}{d\omega}$ dépend de celui de $\frac{1}{Q^2} - 2 + 2\frac{\omega^2}{\omega_0^2}$

S'il y a résonance, il existe une pulsation ω_r telle que $\frac{dD}{d\omega}(\omega_r) = 0$

On a alors $\frac{1}{Q^2} - 2 + 2\frac{\omega_r^2}{\omega_0^2} = 0 \Rightarrow \omega_r^2 = \omega_0^2\left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right) \underset{\substack{Q>0 \\ \omega>0}}{\Rightarrow} \omega_r = \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}}$

Une telle pulsation existe seulement si $1-\frac{1}{2Q^2} \geq 0 \Rightarrow 1 \geq \frac{1}{2Q^2}$

$$\boxed{Q \geq \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$\frac{dD(\omega)}{d\omega} < 0$ si $\omega < \omega r$ et $\frac{d}{d\omega}D(\omega) > 0$ si $\omega > \omega r$

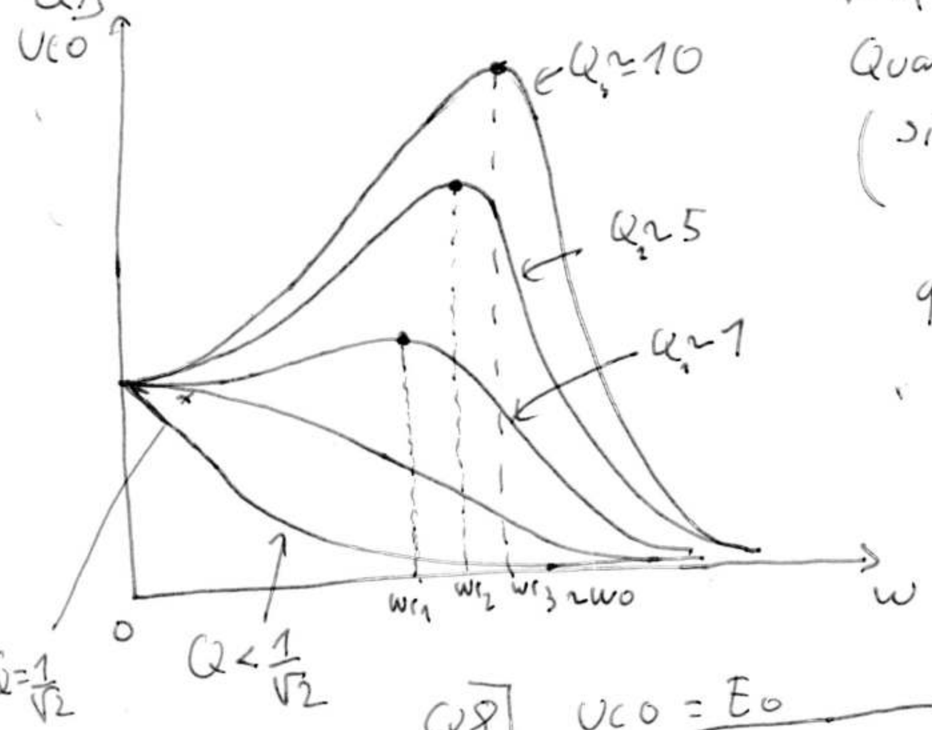
($D(\omega)$ atteint bien un minimum en ωr)

Il y a résonance en tension aux bornes de C ssi $\boxed{Q \geq \frac{1}{\sqrt{2}}}$

la pulsation de résonance est $\boxed{\omega r = \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}}}$

Q6]

Q7]



résonance pour $\omega = 0$ donc energie stationnaire

Rmq $\omega r < \omega_0$ pour importe Q

Quand $Q \to \infty$ $\omega r = \omega_0$

(si $Q > 5$ on peut faire l'approx $\omega r \simeq \omega_0$)

quand $Q \nearrow \Rightarrow \frac{1}{Q^2} \searrow \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \times \frac{1}{Q^2}}} \nearrow$

donc $U_{C0} \nearrow$ quand $Q \searrow$

Q8] $\underline{U_{C0}} = \frac{E_0}{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{\omega}{\omega_0}\times\frac{1}{Q}\right)}$

$$\varphi = \arg(\underline{U_{C0}}) = \underbrace{\arg(E_0)}_{0} - \arg\underbrace{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{\omega}{\omega_0}\times\frac{1}{Q}\right)}_{Z}$$

$\varphi = -\arg(Z)$ avec $Z = 1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{\omega}{\omega_0}\times\frac{1}{Q}$

$$Z = \left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_0}\times\frac{1}{Q}\frac{1}{1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}\right)$$

$$\varphi = -\left(\arg\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right) + \arg\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_0}\times\frac{1}{Q}\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2-\omega^2}\right)\right)$$

or $\arg\left(1 + j\frac{\omega}{\omega_0}\times\frac{1}{Q}\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2-\omega^2}\right) = \arctan\left(\frac{\omega\omega_0}{Q(\omega_0^2-\omega^2)}\right)$ et $\arg\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right) = \begin{cases} 0 \text{ si } \omega < \omega_0 \\ \pi \text{ si } \omega > \omega_0 \end{cases}$

Si $w \leq w_0$

$$\varphi = -\arctan\left(\frac{w w_0}{Q(w_0^2 - w^2)}\right)$$

si $w > w_0$

$$\varphi = -\pi - \arctan\left(\frac{w w_0}{Q(w_0^2 - w^2)}\right)$$

- Si $w \to 0$

$$\varphi \simeq -\arctan(0)$$

$x = \arctan(0)$

$\Rightarrow 0 = \tan(x) = 0$

$$\boxed{\varphi = 0}$$

- Si $w \to w_0$, $w < w_0$

$$\lim_{\substack{w \to w_0 \\ w < w_0}} \left(\frac{1}{w_0^2 - w^2}\right) = +\infty$$

$$\lim_{\substack{w \to w_0 \\ w < w_0}} \arctan\left(\frac{w w_0}{Q(w_0^2 - w^2)}\right) = \frac{\pi}{2}$$

donc $\lim_{\substack{w \to w_0 \\ w < w_0}} \varphi = -\frac{\pi}{2}$

de même

$$\lim_{\substack{w \to w_0 \\ w > w_0}} \arctan\left(\frac{w w_0}{Q(w_0^2 - w^2)}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

donc $\lim_{\substack{w \to w_0 \\ w > w_0}} \varphi = -\pi - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}$

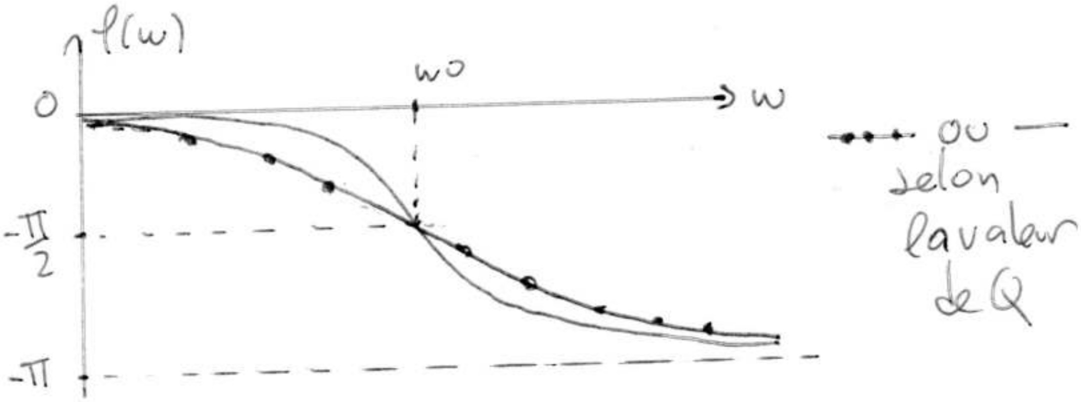
Ainsi $\boxed{\varphi = -\frac{\pi}{2} \text{ quand } w = w_0}$

- Si $w \to +\infty$ $(w > w_0)$

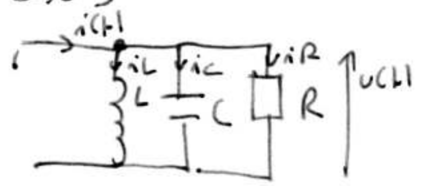
$$\lim_{w \to +\infty} \frac{w w_0}{Q(w_0^2 - w^2)} = 0$$

$$\varphi = -\pi - \arctan(0)$$

$$\boxed{\varphi = -\pi}$$



· Ex 3



Loi des noeuds

$\Rightarrow$ $i(t) = i_L(t) + i_C(t) + i_R(t)$

Relation tension-courant pour les dipoles en convention récepteur :

$u(t) = R i_R(t)$, $i_C = C \frac{du}{dt}$ et $u(t) = L \frac{di_L}{dt}$

La loi des noeuds s'écrit :

$$i(t) = i_L(t) + C\frac{du}{dt} + \frac{u(t)}{R}$$

dérivation

(pour faire apparaitre $\frac{di_L}{dt} = \frac{u(t)}{L}$)

$$\frac{di}{dt} = \frac{di_L}{dt} + C\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{R}\frac{du}{dt}$$

$$\boxed{\frac{di}{dt} = \frac{u(t)}{L} + C\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{1}{R}\frac{du}{dt}} \quad (*)$$

passons à la notation complexe : $\begin{cases} \underline{i(t)} = I_0 e^{j\omega t} \\ \underline{u(t)} = \underline{U} e^{j\omega t} = \underbrace{U_m e^{j\phi}}_{\underline{U}} e^{j\omega t} \end{cases}$

on réécrit (*) en notation complexe

$$\frac{d\underline{i}}{dt} = \frac{\underline{u}(t)}{L} + C\frac{d^2\underline{u}}{dt^2} + \frac{1}{R}\frac{d\underline{u}}{dt} \Rightarrow j\omega \underline{i}(t) = \frac{\underline{u}(t)}{L} + (j\omega)^2 C \underline{u}(t) + \frac{1}{R} j\omega \underline{u}(t)$$

Ainsi : $\underline{i}(t) = \frac{\underline{u}(t)}{j\omega}\left(\frac{1}{L} - \omega^2 C + j\frac{\omega}{R}\right) \Leftrightarrow \underline{i}(t) = \underline{u}(t)\left(\frac{1}{j\omega L} + j\omega C + \frac{1}{R}\right)$

$$\underline{u}(t) = \underline{i}(t)\left(\frac{R}{\frac{1}{\frac{j\omega L}{R}} + j\omega RC + 1}\right) \Rightarrow \boxed{\underline{U} = I_0 \left(\frac{R}{j\left(\omega RC - \frac{R}{\omega L}\right) + 1}\right)}$$

Autre méthode

3 dipôles en parallèle en RSF

$$\frac{1}{\underline{Z}_{eq}} = \frac{1}{\underline{Z}_C} + \frac{1}{\underline{Z}_L} + \frac{1}{\underline{Z}_R} \Rightarrow \underline{Z}_{eq} = \frac{1}{\frac{1}{\underline{Z}_C} + \frac{1}{\underline{Z}_L} + \frac{1}{\underline{Z}_R}}$$

avec $\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}$ $\underline{Z}_L = jL\omega$ $\underline{Z}_R = R$

$$\underline{U} = \underline{Z}_{eq} I_0 = \frac{I_0}{jC\omega + \frac{1}{jL\omega} + \frac{1}{R}} = \boxed{\frac{I_0 R}{jRC\omega + \frac{R}{jL\omega} + 1}}$$

2) $U_m = |\underline{U}| = \dfrac{I_0 R}{\left|j\left(\omega RC - \frac{R}{\omega L}\right) + 1\right|}$

Rmq Il vaut mieux mettre le dénominateur sous la forme : $\boxed{a + jb}$ pour calculer facilement le module

ainsi si on a $\dfrac{1}{jC} + jb$ on écrit : $\dfrac{1}{jC} + jb = j\left(-\dfrac{1}{C} + b\right)$ (car $\dfrac{1}{j} = -j$)

$$U_m = \frac{I_0 R}{\sqrt{1 + \left(\omega RC - \frac{R}{\omega L}\right)^2}}$$

$$U_m^2 = \frac{I_0^2 R^2}{1 + \left(\omega RC - \frac{R}{\omega L}\right)^2}$$

Quand U_m est maximale, U_m^2 est aussi maximale

or U_m^2 est maximale quand $1 + \left(\omega RC - \frac{R}{\omega L}\right)^2$ est minimale

C'est le cas lorsque le terme $\left(\omega RC - \frac{R}{\omega L}\right)^2$ est nul (en effet il est positif ou nul donc minimal quand il est nul)

Ainsi U_m est maximale lorsque : $\omega RC - \dfrac{R}{\omega L} = 0$

Soit $\omega RC = \dfrac{R}{\omega L}$

$\Rightarrow \omega^2 = \dfrac{1}{LC}$ $\Rightarrow$ on en déduit que l'amplitude est maximale pour $\boxed{\omega = \omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}}$

Quand $\omega \to 0$, $\dfrac{R}{\omega L} \to \infty$ donc $\dfrac{1}{\sqrt{1 + \left(\omega RC - \frac{R}{\omega L}\right)^2}} \to 0$

Ainsi $\lim\limits_{\omega \to 0} U_m(\omega) = 0$

de même quand $\omega \to \infty$ $\dfrac{1}{\sqrt{1 + \left(\omega RC - \frac{R}{\omega L}\right)^2}} \to 0$

Ainsi $\lim\limits_{\omega \to \infty} U_m(\omega) = 0$

Comme $U_m(\omega)$ passe par un max pour $\omega = \omega_0$ on en déduit

4] Calculons l'amplitude maximale (pour $w = w_0$)

$U_m(w_0) = I_0 R = U_{m\,max}$

$U_m(w) = \frac{U_{m\,max}}{\sqrt{2}} \Rightarrow U_m^2(w) = \frac{U_{m\,max}^2}{2} = \frac{I_0^2 R^2}{2}$

$$\Rightarrow \frac{I_0^2 R^2}{1 + \left(wRC - \frac{R}{wL}\right)^2} = \frac{I_0^2 R^2}{2}$$

$$\Rightarrow 1 + \left(wRC - \frac{R}{wL}\right)^2 = 2$$

$$\Rightarrow \left(wRC - \frac{R}{wL}\right)^2 = 1$$

$$\Rightarrow wRC - \frac{R}{wL} = 1 \quad \text{ou} \quad wRC - \frac{R}{wL} = -1$$

$\Rightarrow w^2 LRC - R = wL$

$\Rightarrow w^2 LRC - wL - R = 0$

$\Delta = L^2 + 4LR^2C$

$w_1 = \frac{L + \sqrt{L^2 + 4LR^2C}}{2(LRC)}$

$w_1' = \frac{L - \sqrt{L^2 + 4LR^2C}}{2(LRC)}$

on ne garde pas cette solution car elle est négative (une pulsation est positive)

$w^2 LRC - R = -wL$

$w^2 LRC + wL - R = 0$

$\Delta = L^2 + 4LR^2C$

$w_2 = \frac{-L + \sqrt{L^2 + 4LR^2C}}{2(LRC)}$

$w_2' = \frac{-L - \sqrt{L^2 + 4LR^2C}}{2(LRC)}$

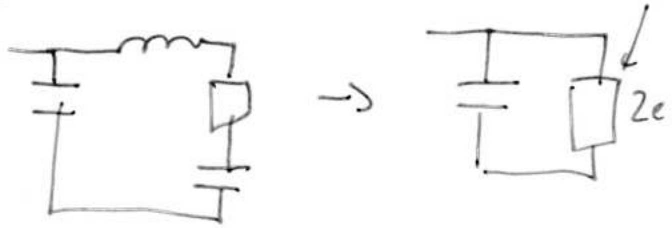
On ne garde pas cette solution car elle est négative finalement $\Delta\omega = \omega_1 - \omega_2 = \dfrac{L + \sqrt{L^2 + 4LR^2C} - (-L + \sqrt{L^2+4LR^2C})}{2LRC}$

$$\boxed{\Delta\omega = \frac{2L}{2LRC} = \frac{1}{RC}}$$

$$\frac{1}{Q} = \frac{\Delta\omega}{\omega_0} = \frac{\sqrt{LC}}{RC} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \Rightarrow \boxed{Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}}$$

Ex 4

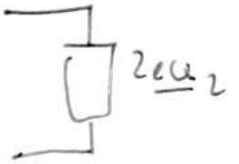
ce dipole n'est pas une résistance !



$\underline{Zeq}_1 = \underline{Z_L} + \underline{Z_{Rp}} + \underline{Z_{cp}}$

$\underline{Zeq}_1 = jL\omega + R_p + \frac{1}{jC_p\omega}$

schéma eq 2



dipoles en // $\Rightarrow$ $\frac{1}{\underline{Zeq}_2} = \underline{Y} = \frac{1}{\underline{Zeq}_1} + \frac{1}{\underline{Z_c}}$

$$\underline{Y} = \frac{1}{jL\omega + R_p + \frac{1}{jC_p\omega}} + jC\omega$$

Rmq math soit un nombre complexe de la forme :

$\underline{Z} = \frac{1}{a+jb}$ en multipliant en haut et en bas par le complexe conjugué :

on a $Z = \frac{a-jb}{a-jb} \times \frac{1}{a+jb} = \frac{a-jb}{a^2+b^2} = \boxed{\frac{a}{a^2+b^2} - j\frac{b}{a^2+b^2}}$

Ainsi $\frac{1}{j(L\omega - \frac{1}{C_p\omega}) + R_p} = \frac{R_p - j(L\omega - \frac{1}{C_p\omega})}{R_p^2 + (L\omega - \frac{1}{C_p\omega})^2}$

$$\underline{Y} = \frac{R_p}{R_p^2 + (L\omega - \frac{1}{C_p\omega})^2} - j\overbrace{\left(\frac{(L\omega - \frac{1}{C_p\omega})}{R_p^2 + (L\omega - \frac{1}{C_p\omega})^2} - C\omega\right)}^{\text{Partie imaginaire (réactive)}}$$

2)

On admet que si la partie imaginaire de Y est nulle la partie imaginaire de Z le sera aussi et inversement ($\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \underline{Z} \in \mathbb{R}$)

Preuve plus loin

Il faut donc :

$\text{Im}(\underline{Y}) = 0 \Rightarrow \frac{L\omega - \frac{1}{C_p\omega}}{R_p^2 + (L\omega - \frac{1}{C_p\omega})^2} - C\omega = 0 \Rightarrow \boxed{C = \frac{L - \frac{1}{C_p\omega^2}}{R_p^2 + (L\omega - \frac{1}{C_p\omega})^2}}$

Preuve de la propriété admise :

$$\forall z \in \mathbb{C}, \frac{1}{z} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$$

Preuve $\Leftarrow$

Si $z \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{1}{z} \in \mathbb{R}$ évident

Preuve $\Rightarrow$

- Soit $z = a + ib$. $\frac{1}{z} \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{1}{a+ib} \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{a}{a^2+b^2} - j\frac{b}{a^2+b^2} \in \mathbb{R} \Rightarrow \frac{b}{a^2+b^2} = 0$
  avec $a \neq 0$

$a^2+b^2 > 0$

$\Rightarrow b = 0 \Rightarrow z = a$

$z \in \mathbb{R}$ ok

3] $\underline{Y} \in \mathbb{R}$ donc $\boxed{R_1 = \frac{1}{Y} = \frac{R_p^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C_p\omega}\right)^2}{R_p}}$

(homogène)

Exo 5

Partie A

A-1

PFD appliqué au petit élément de masse m dans réf labo gal :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{T} + \vec{F}_f + \vec{F}_p$$

Projection sur (Ox)

$m\ddot{x} = -kx - h\dot{x} + \beta V(t)$ ← ⚠ $V(t)$ est une tension et pas une vitesse

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m}x + \frac{h}{m}\dot{x} = \frac{\beta}{m}V(t)}$$

A.1.b) $C_p = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{e}$ $\Rightarrow$ A.N $C_p = \frac{8{,}85\times10^{-12}\times 2{,}3\times\overbrace{\pi\frac{(1.10^{-2})^2}{4}}^{S=\pi\frac{d^2}{4}}}{0{,}2\times10^{-3}}$

$C_p = \underline{8pF}$ (faible mais possible)

relation charge accumulée tension pour un condensateur en convention récepteur :

$q = Cu \Rightarrow \boxed{q_1(t) = C_p V(t)}$

A.1.c) $\ddot{x} + \frac{k}{m}x + \frac{h}{m}\dot{x} = \frac{\beta}{m}V(t)$ or d'après la question précédente $V(t) = \frac{q_1(t)}{C_p}$

donc $\ddot{x} + \frac{h}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{\beta}{m}\frac{q_1(t)}{C_p}$ (*)

enfin d'après l'énoncé $q_2(t) = \gamma x(t) \Rightarrow x(t) = \frac{q_2(t)}{\gamma}$

on remplace dans (*) :

$$\frac{\ddot{q}_2(t)}{\gamma} + \frac{h}{m}\frac{\dot{q}_2(t)}{\gamma} + \frac{k}{m}\frac{q_2(t)}{\gamma} = \frac{\beta}{m}\frac{q_1(t)}{C_p}$$

$$\boxed{\ddot{q}_2(t) + \frac{h}{m}\dot{q}_2(t) + \frac{k}{m}q_2(t) = \frac{\gamma\beta}{m}V(t)} \quad (1)$$

A.1.d) L'équation différentielle vérifiée par $q_2(t)$ dans le circuit représenté

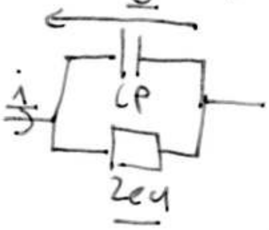
est $V(t) = \underset{\overset{\uparrow}{\text{ldm}}}{R}\frac{dq_2}{dt} + L\frac{d^2q_2}{dt^2} + \frac{q_2(t)}{C_s} \Rightarrow \boxed{\ddot{q}_2 + \frac{R}{L}\dot{q}_2 + \frac{1}{LC_s}q_2 = \frac{V(t)}{L}}$ (2)

Par identification entre (1) et (2)

$$\frac{R}{L} = \frac{h}{m} \qquad \frac{1}{LC_s} = \frac{K}{m} \qquad \frac{\gamma B}{m} = \frac{1}{L}$$

$$\boxed{L = \frac{m}{\gamma B}} \qquad \boxed{C_s = \frac{m}{KL} = \frac{\gamma B}{K}} \qquad R = \frac{h}{m} L \Rightarrow \boxed{R = \frac{h}{\gamma B}}$$

A.2) a) schéma eq 1 (en RSF)

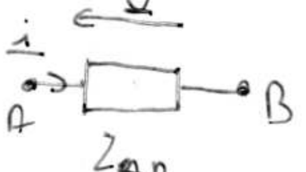


$$\underline{Z_{eq}} = \underline{Z_L} + \underline{Z_{Cs}}$$

$$\underline{Z_{eq}} = jL\omega + \frac{1}{jC_s\omega}$$

$$\underline{Z_{eq}} = \frac{-LC_s\omega^2 + 1}{jC_s\omega}$$

schéma eq 2



$$\underline{Z_{AB}}$$

$$\frac{1}{\underline{Z_{AB}}} = \frac{1}{\underline{Z_{Cp}}} + \frac{1}{\underline{Z_{eq}}}$$

$$\underline{Z_{AB}} = \frac{1}{jC_p\omega + \frac{jC_s\omega}{1 - LC_s\omega^2}}$$

$$\underline{Z_{AB}} = \frac{1}{\frac{j(C_p\omega(1-LC_s\omega^2) + C_s\omega)}{1 - LC_s\omega^2}} = \frac{1 - LC_s\omega^2}{j\omega(C_p - LC_sC_p\omega^2 + C_s)} = \frac{1 - LC_s\omega^2}{j\omega(C_p + C_s - LC_sC_p\omega^2)}$$

$$\underline{Z_{AB}} = \frac{1 - LC_s\omega^2}{j\omega(C_p + C_s)\left(1 - \frac{LC_sC_p}{C_s + C_p}\omega^2\right)} = \frac{-j}{\omega(C_p + C_s)}\left(\frac{1 - LC_s\omega^2}{1 - \frac{LC_sC_p}{C_s + C_p}\omega^2}\right)$$

Par identification: $\boxed{\alpha = C_p + C_s}$

$$\frac{1}{\omega_r^2} = LC_s \Rightarrow \boxed{\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC_s}}}$$

$$\frac{1}{\omega_a^2} = \frac{LC_sC_p}{C_s + C_p} \Rightarrow \boxed{\omega_a = \sqrt{\frac{C_s + C_p}{LC_sC_p}}}$$

$$\omega_r^2 = \frac{1}{L} \cdot \frac{1}{C_s}$$

$$\omega_a^2 = \frac{1}{L}\left(\frac{1}{C_s} + \frac{1}{C_p}\right) = \omega_r^2 + \underbrace{\frac{1}{LC_p}}_{>0} \Rightarrow \boxed{\omega_a^2 > \omega_r^2}$$

b) $w_A = 2\pi f_a$ et $w_r = 2\pi f_r \Rightarrow f_r = \frac{w_r}{2\pi}$ et $f_a = \frac{w_a}{2\pi}$

A.N $f_a = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{(8{,}08)\times10^{-12}}{0{,}5\times8\times0{,}08\times10^{-12}\times10^{-12}}} = \underline{8{,}00\times10^5\,Hz}$

$f_r = \frac{1}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{0{,}5\times0{,}08\times10^{-12}}} = 7{,}96\times10^5\,Hz$

A-2-c) $\underline{Z_{AB}}$ est purement imaginaire $Im(\underline{Z_{AB}}) = \frac{\underline{Z_{AB}}}{j} = \frac{-1}{\alpha w}\overbrace{\left(\frac{1-\left(\frac{w}{w_r}\right)^2}{1-\left(\frac{w}{w_a}\right)^2}\right)}^{F(w)}$

il faut donc étudier le signe de $Im(\underline{Z_{AB}})$

⚠ signe $Im(\underline{Z_{AB}}) = -$signe$(F(w))$

Tableau de signe: (on a $0 < w_r < w_a$)

w	0	w_r	w_a	∞
$1-\left(\frac{w}{w_r}\right)^2$	$\frac{w}{w_r}<1 \Rightarrow 1-\left(\frac{w}{w_r}\right)^2 > 0$ +	0 $1-\left(\frac{w}{w_r}\right)^2 < 0$ −	$1-\left(\frac{w}{w_r}\right)^2 < 0$ −	
$\left(1-\frac{w}{w_a}\right)^2$	$w<w_a \Rightarrow 1-\left(\frac{w}{w_A}\right)^2 > 0$ +	$1-\left(\frac{w}{w_A}\right)^2 > 0$ +	0 $1-\left(\frac{w}{w_a}\right)^2 < 0$ −	
$F(w)$	+	0 −	+	
$Im(\underline{Z_{AB}})$	−	0 +	−	

$0<w<w_r$ Comportement Capacitif

$w_r<w<w_a$ Comportement Inductif

$w_a<w<\infty$ Comportement Capacitif

A.2.d) $\|\underline{Z_{AB}}\| = \frac{1}{\alpha w}\frac{\left|1-\left(\frac{w}{w_r}\right)^2\right|}{\left|1-\left(\frac{w}{w_a}\right)^2\right|}$

$\lim_{w\to0}|\underline{Z_{AB}}| = +\infty$ $\quad \lim_{w\to w_a}\|Z_{AB}| = +\infty$

$\lim_{w\to w_r}\|Z_{AB}\| = 0$ $\quad \lim_{w\to+\infty}\|Z_{AB}| = 0$

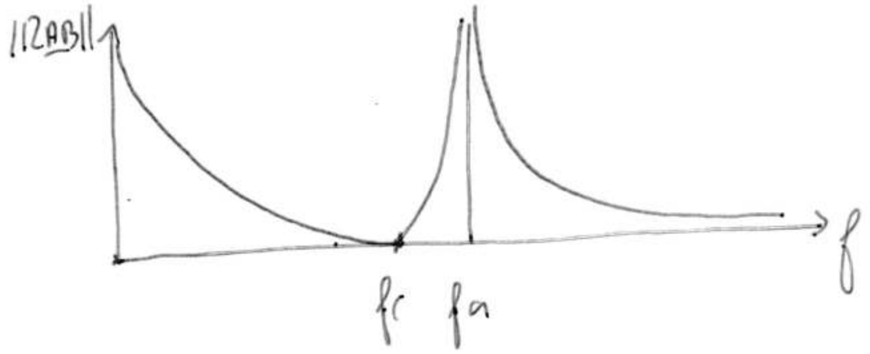
• si $w \ll w_r$

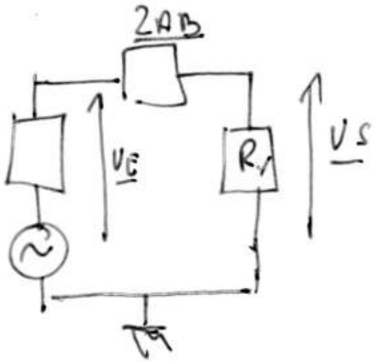
$\|Z_{AB}\| \simeq \frac{1}{\alpha w}$ (forme $y = \frac{K}{x}$)

• si $w \gg w_A$

$\|Z_{AB}\| \simeq \frac{1}{\alpha w}\frac{w_A^2}{w_r^2}$

(forme $y = \frac{K'}{x}$)





Pont diviseur de tension

$$\underline{V_S} = \frac{R_V}{\underline{Z_{AB}} + R_V}\underline{V_e} = \frac{1}{1 + \frac{\underline{Z_{AB}}}{R_V}}\underline{V_e}$$

$$\boxed{\underline{H} = \frac{1}{1 + \frac{\underline{Z_{AB}}}{R_V}}}$$

A.3.b) $\left|\frac{1}{1 + \frac{\underline{Z_{AB}}}{R_V}}\right| = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{\left|1 + \frac{\underline{Z_{AB}}}{R_V}\right|} = \frac{1}{2} \Rightarrow \left|1 + \frac{\underline{Z_{AB}}}{R_V}\right| = 2$

Comme $\underline{Z_{AB}}$ est imaginaire pur $\left|1 + \frac{\underline{Z_{AB}}}{R_V}\right| = \sqrt{1 + \left(\frac{|Z_{AB}|}{R_V}\right)^2}$

$$1 + \left(\frac{|\underline{Z_{AB}}|}{R_V}\right)^2 = 4 \Rightarrow |Z_{AB}|^2 = 3 R_V^2 \Rightarrow \boxed{|\underline{Z_{AB}}| = \sqrt{3} R_V}$$

A.3.C $\quad Q = \frac{L\omega_0}{R} \qquad \Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q} \Rightarrow Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{f_0}{\Delta f}$

A.N $\quad Q = \frac{796 \times 10^3}{50} = 1{,}6 \times 10^4 \rightarrow$ résonance très aiguë

$$R = L \times 2\pi\Delta f \Rightarrow R = \underline{157\,\Omega}$$

B.1) La fréquence est divisée par 2. Le signal obtenu possède une fréquence $f = 16384\,Hz$

B.2 $\quad 32768 = 2^{15} \quad$ 15 compteurs modulo 2 en cascade pour obtenir une fréquence $f = 1\,HZ$