

CHAP 11 : FILTRAGE LINÉAIRE

Rapports de Jury :

-Pour tracer un diagramme de Bode (comportement fréquentiel), il est important que le signal d'entrée soit un signal sinusoïdal et de vérifier que ce signal reste sinusoïdal et de même fréquence en sortie (on se limite à l'étude de systèmes linéaires). Certains candidats ne semblent pas en connaître la raison.

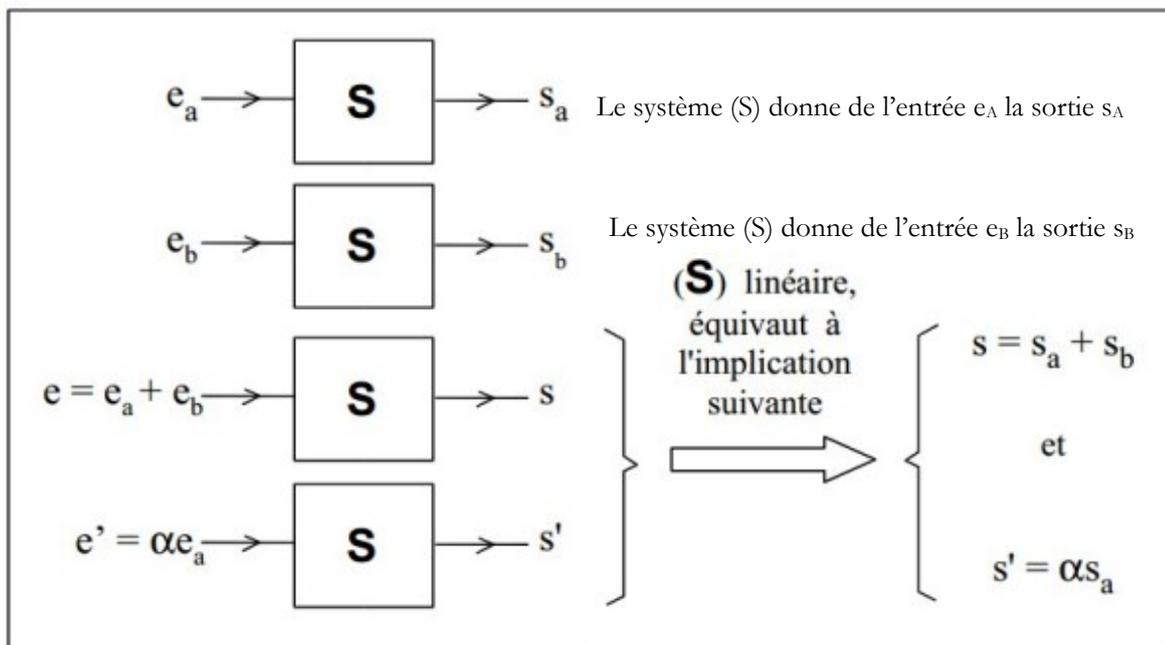
-La notion de bande-passante est mal maîtrisée. Pour un filtre passe-bas, par exemple, la bande-passante va de 0 à la fréquence de coupure identifiée à -3 dB par rapport au gain en basse fréquence, et non depuis la borne moins l'infini.

-Le gain en décibels d'un système linéaire correspond au logarithme du module de la fonction de transfert (ou du rapport de l'amplitude du signal de sortie sur l'amplitude du signal d'entrée) multiplié par 20.

-La détermination de la fréquence de coupure à -3 dB est souvent mal interprétée par les candidats. Il s'agit de la fréquence telle que le gain en décibels (défini précédemment) vaut le gain en décibels max dans la bande-passante diminuée de 3 dB. En amplitude, il s'agit de trouver la fréquence telle que le gain (rapport de l'amplitude du signal de sortie sur l'amplitude du signal d'entrée) a été diminué d'un facteur racine de deux par rapport au gain max dans la bande-passante.

I étude de la réponse d'un système linéaire à un signal périodique

I.1) Notion de système linéaire



(S) est un système linéaire si :

Pour une entrée combinaison linéaire de deux entrées, $e(t) = \alpha e_a(t) + \beta e_b(t)$
alors la sortie est la combinaison linéaire des deux réponses : $s(t) = \alpha s_a(t) + \beta s_b(t)$

I.2) Notion de spectre et décomposition spectral

Rappel : Le signal $s(t)$ est dit périodique de période T si il se reproduit à l'identique après une durée T :
c'est à dire que $s(t+T) = s(t)$

a) Notion de décomposition spectrale d'un signal

Au 19^{ème} siècle, Joseph Fourier montre que tout signal périodique $s(t)$ peut être décomposé en une somme de signaux sinusoïdaux :



Ou plus précisément :

$$s(t) = S_0 + S_1 \cos(2\pi f_1 t + \phi_1) + \sum_{n=2}^{\infty} S_n \cos(2\pi f_n t + \phi_n)$$

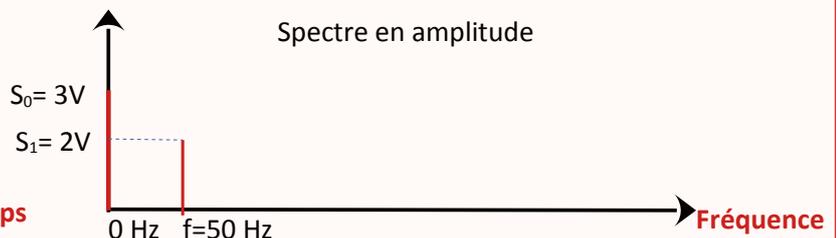
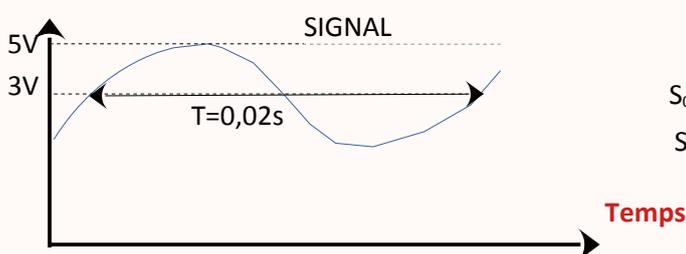
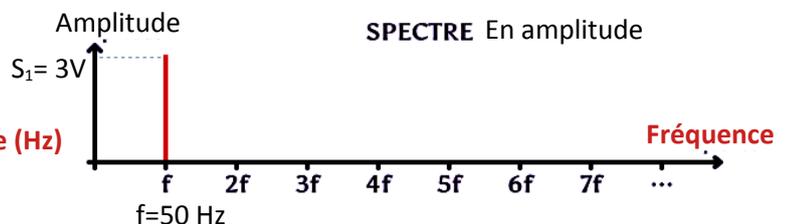
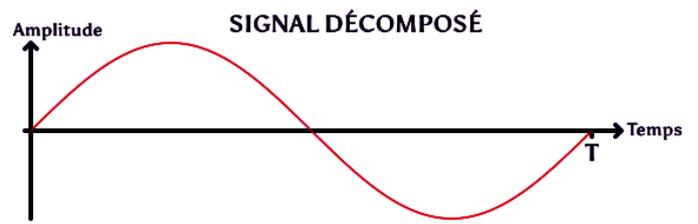
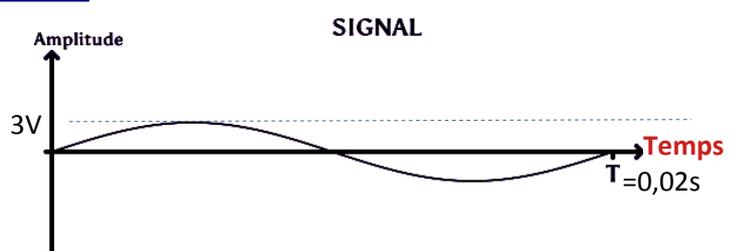
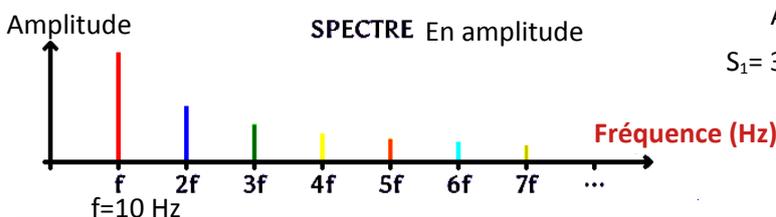
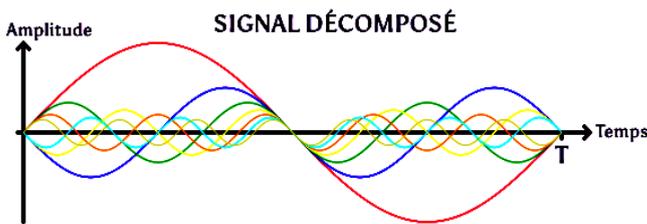
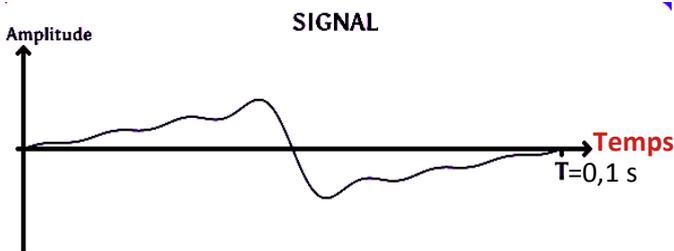
Voc : Cette écriture de s(t) constitue la décomposition spectrale de s(t)

b) Notion de spectre

L'étude spectrale du signal s(t) (ou établir le spectre de s(t)), consiste à :

- Donner la liste des fréquences f_i des composantes qui possèdent une amplitude S_i non nulle (les f_i sont les abscisses des « pics » dans le spectre)
- Donner la valeurs des amplitudes S_i de la fondamentale et des éventuels harmoniques ou de la composante continue (hauteur des pics sur le spectre d'amplitude)
- Donner les valeurs des phases ϕ_i (hauteur des pics sur le spectre de phase que l'on représente rarement en pratique)

animation



c) Valeur moyenne (composante continue)

S_0 est la valeur moyenne du signal (ou composante continue). Le signal oscille autour de cette valeur



d) valeur efficace d'un signal

Pour un signal périodique $s(t)$ la valeur efficace de ce signal est :



Intérêt : Quand on utilise un multimètre pour mesure une tension alternative (c'est à dire périodique) ou une intensité alternative, la valeur affichée est la grandeur efficace associée à la tension ou à l'intensité.

Elle intervient dans le calcul de la puissance moyenne dissipée par une résistance quand les grandeurs électriques sont alternatives

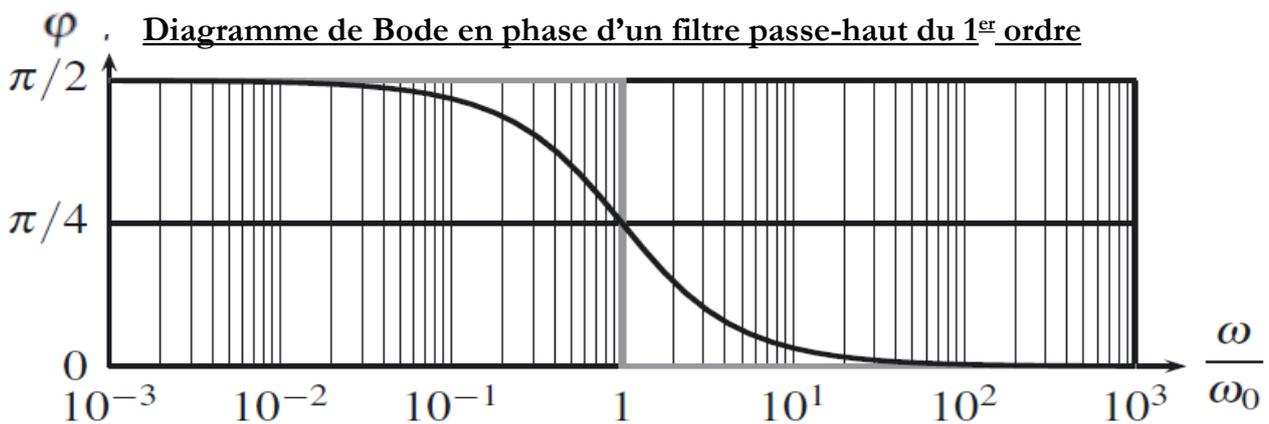
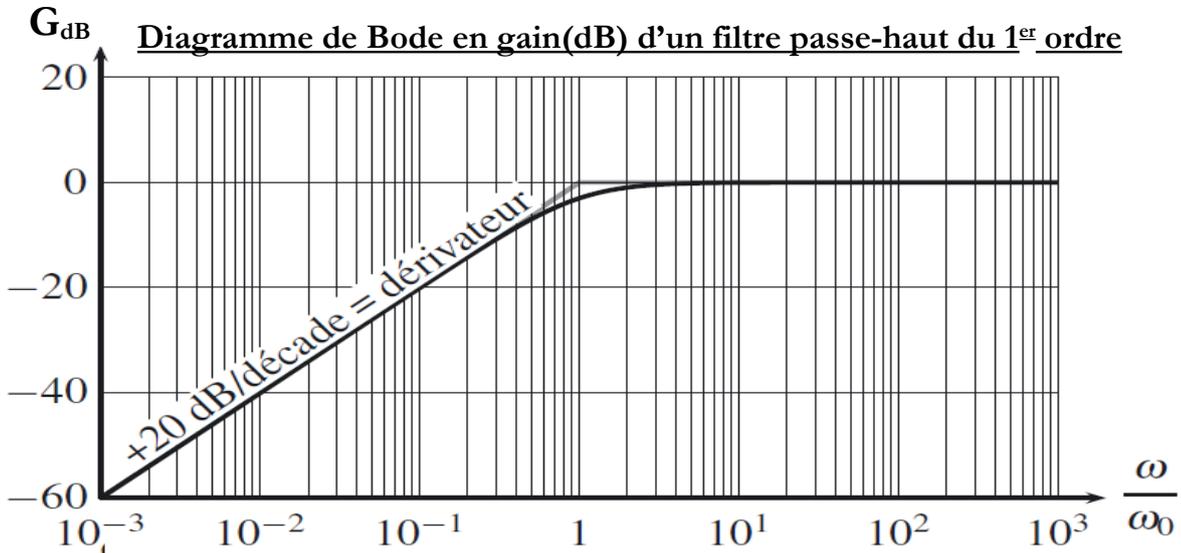
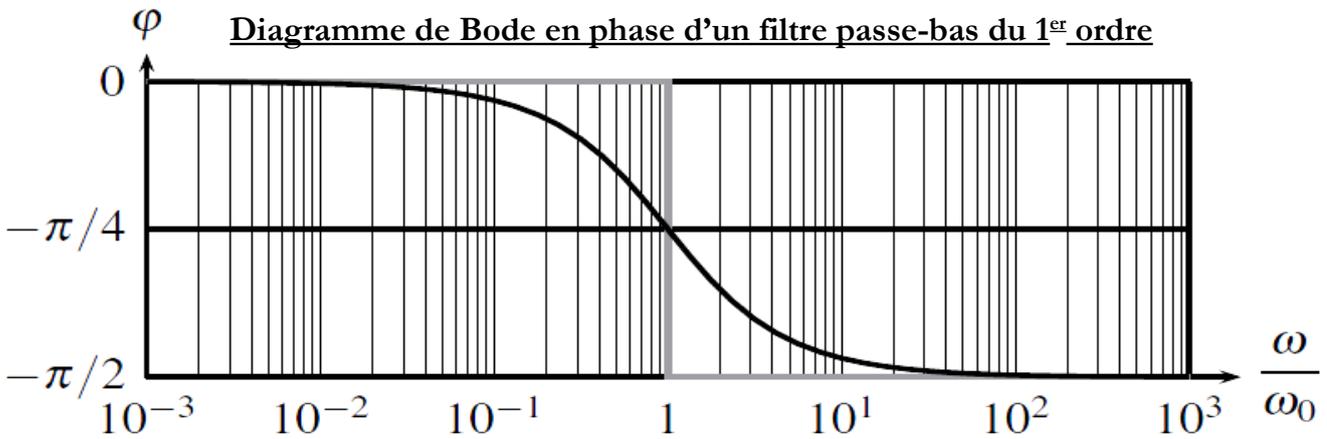
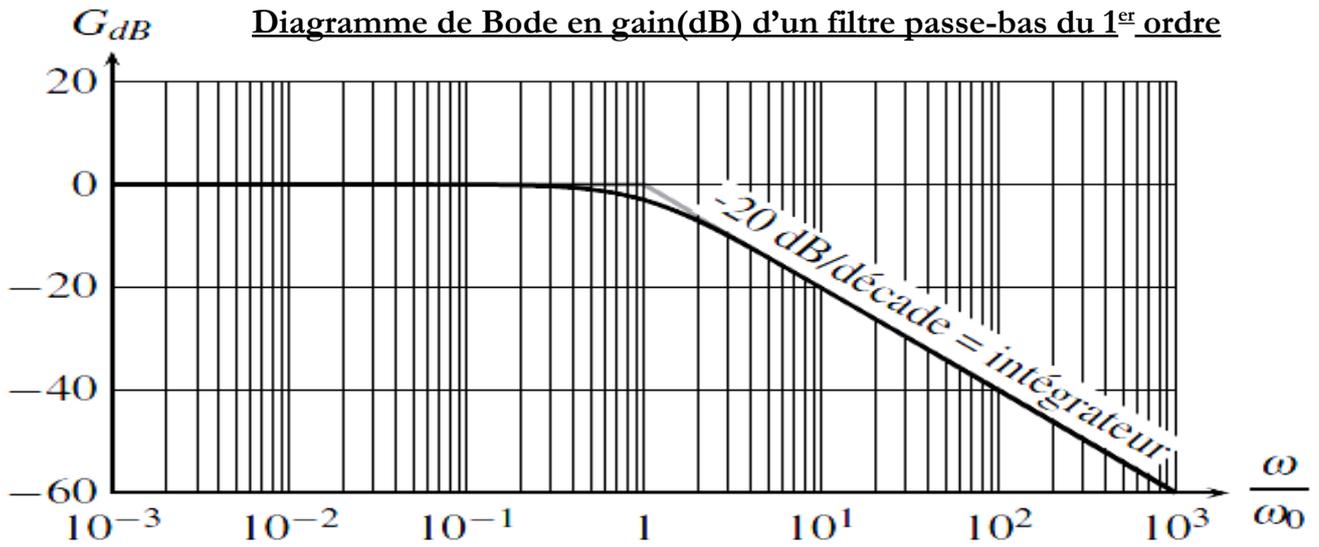
Rmq : quand on dit que la valeur de la tension délivrée par EDF est de 230 V, on parle de la tension efficace en réalité...

Valeur efficace d'un signal sinusoïdal pur : $s(t) = S_1 \cos(2 \pi f t + \phi)$

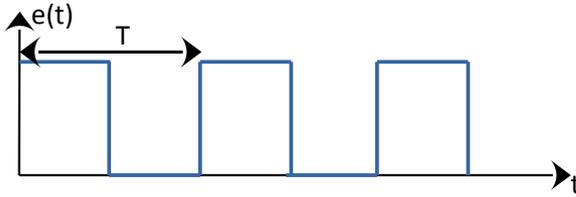
e) Relation de Parseval

La puissance moyenne du signal $s(t)$ est proportionnelle au carré de sa valeur efficace. Or, chaque harmonique transporte également une puissance proportionnelle à sa valeur efficace. La relation de Parseval exprime simplement le fait que la puissance du signal est égale à la somme des puissances transportées par les différents harmoniques, ce qui en terme de valeurs efficace se **traduit**

$$S_{eff}^2 = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{S_i^2}{2}$$



Signal $e(t)$:



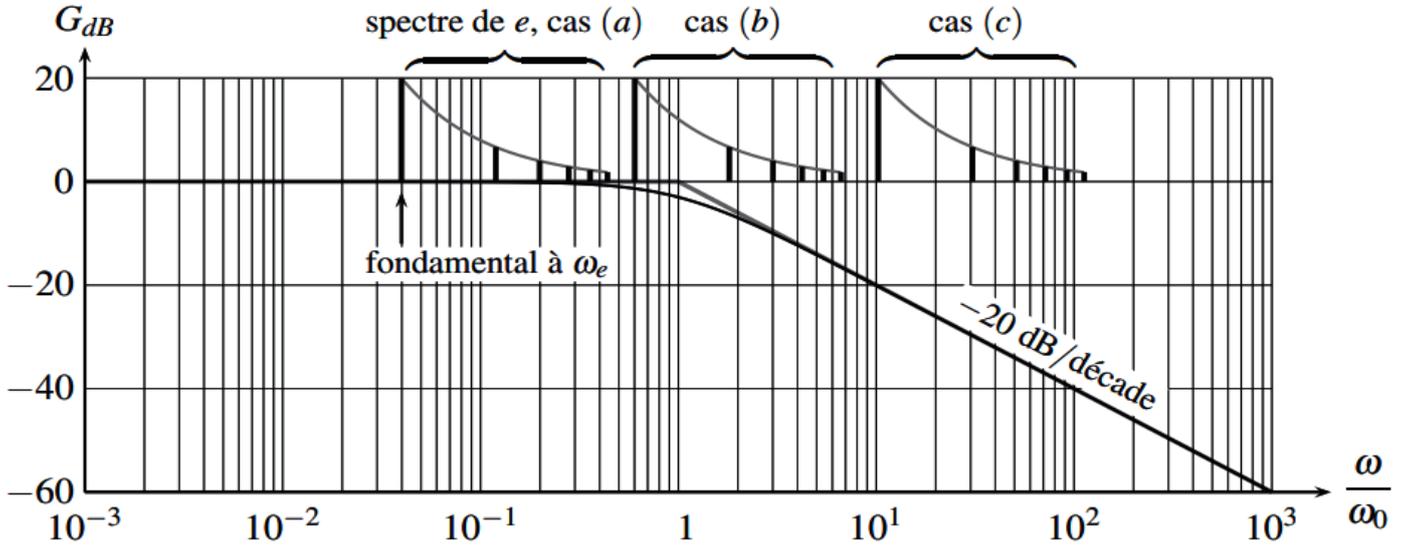
On cherche le signal $s(t)$ en sortie d'un filtre passe-bas de fréquence propre ω_0 et on envisage 3 cas :

Cas a) : $\omega_0 T = 150$

Cas b) : $\omega_0 T = 10$

Cas c) : $\omega_0 T = 0,63$

Allure du diagramme de Bode en gain dans les 3 cas



Allure de la sortie dans les 3 cas

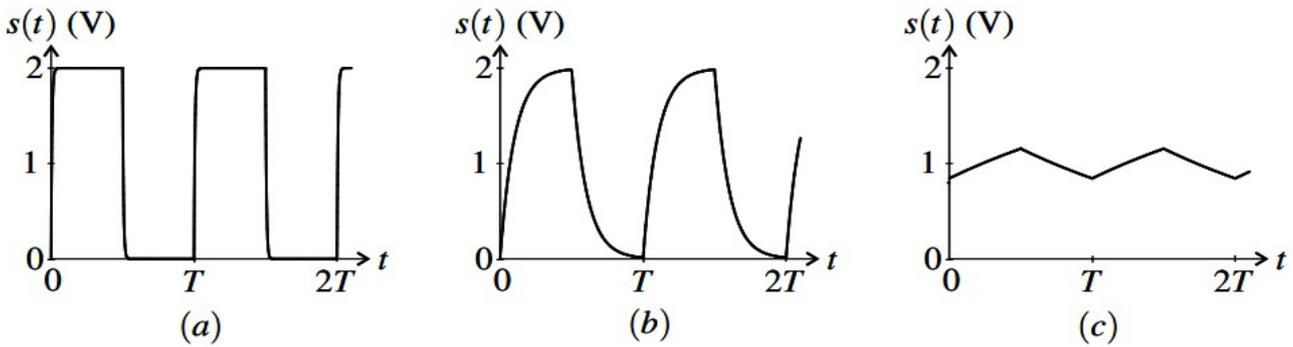


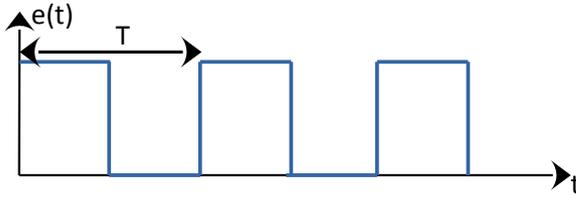
Figure 12.11 – Créneau filtré par un filtre passe-bas du premier ordre : (a) $\omega_0 T \approx 150$, (b) $\omega_0 T = 10$, (c) $\omega_0 T = 0,63$

Cas a) :

Cas b) :

Cas c) :

Signal $e(t)$:

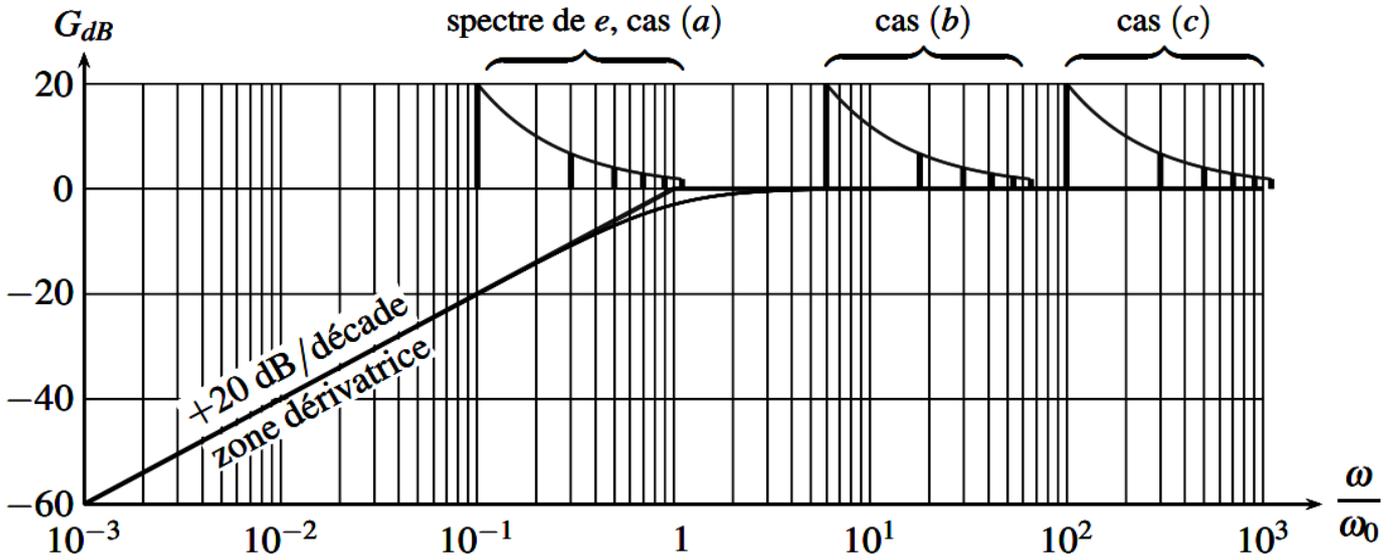


On cherche le signal $s(t)$ en sortie d'un filtre passe-haut de fréquence propre ω_0 et on envisage 3 cas :

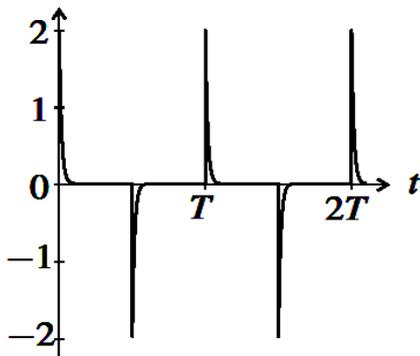
Cas a) : $\omega_0 T = 150$

Cas b) : $\omega_0 T = 10$

Cas c) : $\omega_0 T = 0,63$

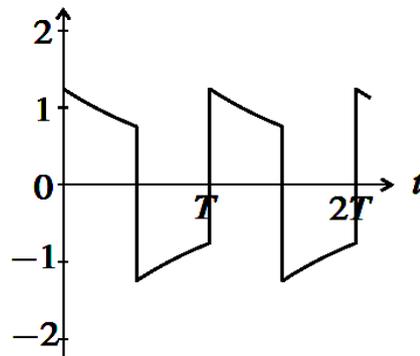


$s(t)$ (V)



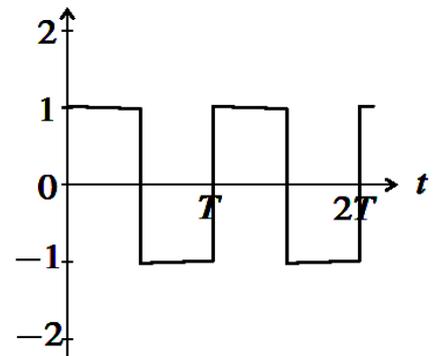
(a)

$s(t)$ (V)



(b)

$s(t)$ (V)



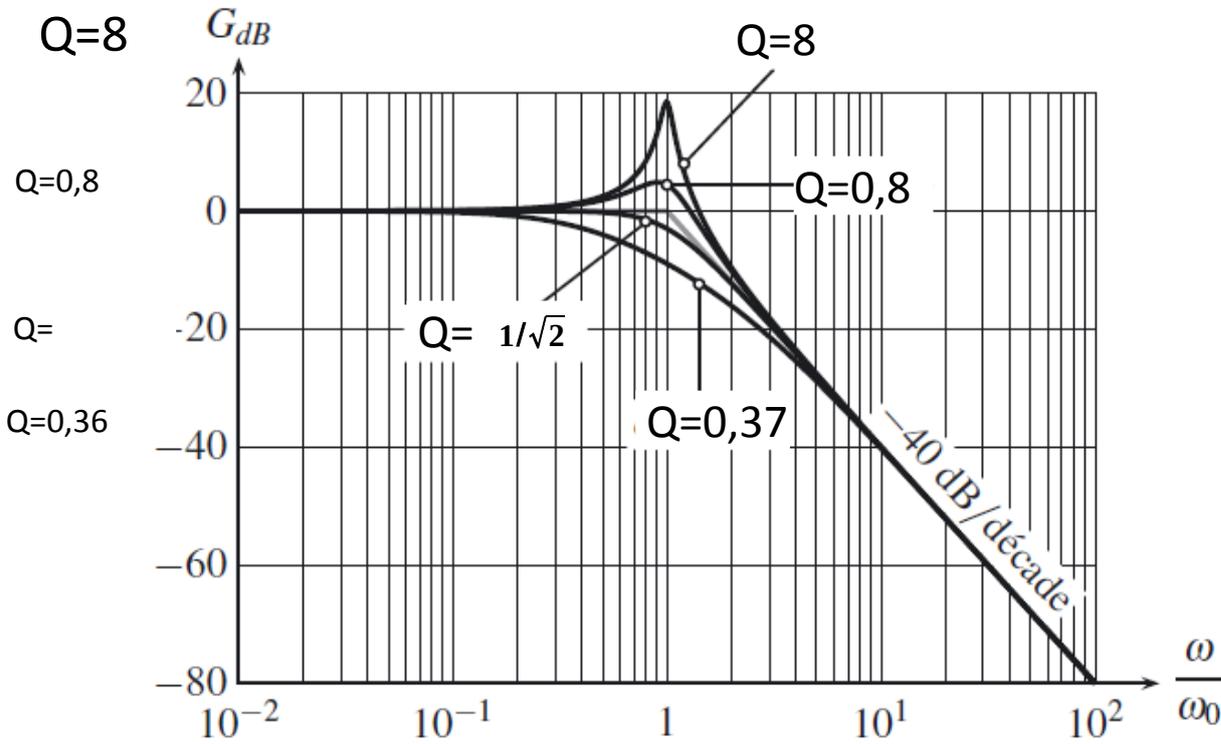
(c)

Figure 12.13 – Créneau filtré par un filtre passe-haut du premier ordre : (a) $\omega_0 T = 63$, (b) $\omega_0 T = 1$, (c) $\omega_0 T = 0,063$

III Modèles simples de filtres passifs du deuxième ordre

III.1) Filtre passe-bas du 2^{ème} ordre

Allure de la Courbe de gain en dB pour un passe bas du deuxième ordre (pour différent facteur de qualité)



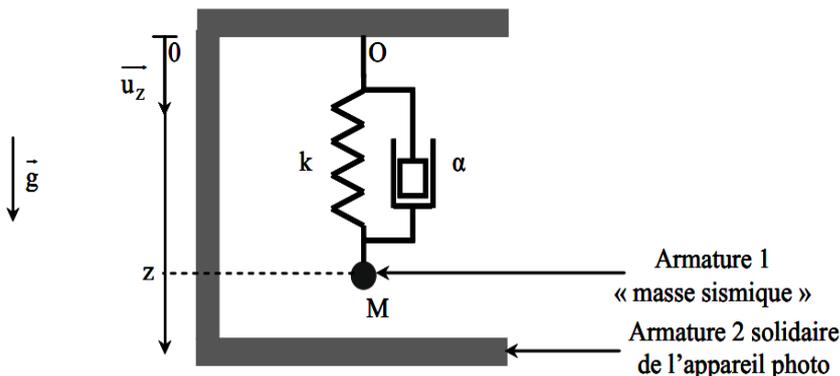
c) bande passante à -3dB

Pour ce filtre comme pour tous les filtres, on peut déterminer la bande passante $\Delta\omega$ à -3dB comme l'intervalle de pulsation $[\omega_1, \omega_2]$

On peut donc chercher sur la courbe l'intervalle de pulsation pour lequel cette condition est vérifiée et déterminer les pulsations qui délimitent la bande passante (voir chapitre précédent)

III.2) Exemple mécanique de filtre passe-bas du 2^{ème} ordre : accéléromètre d'un téléphone

a) Modélisation de l'accéléromètre



L'armature 2 et le point O sont solidaire du téléphone (on lui associe un référentiel R_1)

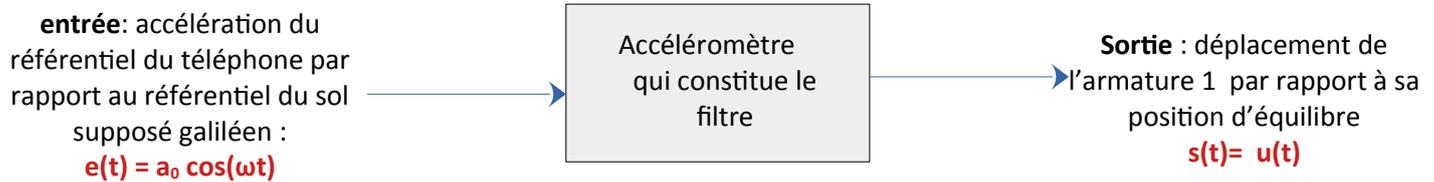
Le point O d'accroche du ressort relié à l'armature 1 subit l'accélération du téléphone par rapport au référentiel du sol R_0 supposé galiléen :

$$\vec{a}_O(t)_{R_0} = \vec{a}_{R_1/R_0} = a_O \cos(\omega t) \vec{u}_z$$

Sous l'effet de cette accélération, l'armature 1 va se mettre à osciller et un capteur interne va mesurer le déplacement par rapport à la position d'équilibre $u(t) = z(t) - z_{eq}$ dans le référentiel du téléphone noté R_1

$$z_{eq} = l_0 + \frac{mg}{k}$$

Modélisation de l'accéléromètre sous forme de fonction de transfert :



Rmq : ici les grandeurs en entrée et en sortie n'ont pas la même dimension

on a donc
$$H(\omega) = \frac{u(t)}{e(t)} = \frac{u(t)}{a_0 e^{j\omega t}}$$

b) Détermination de la fonction de transfert

- l'accélération du point M dans le référentiel du téléphone est donc $\vec{a}_M(t)_{R_1} = \ddot{u} \vec{u}_z = \ddot{z}(t) \vec{u}_z$

- de même la vitesse de M dans le référentiel du téléphone est $\vec{v}_M(t)_{R_1} = \dot{u}(t) \vec{u}_z = \dot{z}(t) \vec{u}_z$

système étudié : { **armature 1** } référentiel : **Référentiel du sol (galiléen)**

Bilan des forces :

force de frottement fluide $\vec{F}_l = -\alpha \dot{z} \vec{u}_z$ force de rappel $\vec{F} = -(z - l_0) \vec{u}_z$ poids $\vec{P} = mg \vec{u}_z$

Principe fondamental de la dynamique appliqué à l'armature 1 dans le référentiel galiléen R_0 (**du sol mais pas du téléphone!**).

$$m \vec{a}_M(t)_{R_0} = \vec{F}_l + \vec{F} + \vec{P}$$

or d'après la formule de composition des accélérations
$$\vec{a}_M(t)_{R_0} = \vec{a}_M(t)_{R_1} + \vec{a}_{R_1/R_0} = \ddot{u} \vec{u}_z + a_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z$$

en projetant le PFD sur (Oz) : $m \ddot{u} + m a_0 \cos(\omega t) = -k(z(t) - z_{eq}) - \alpha \dot{u}(t)$

$$\ddot{u} + \frac{k}{m} u(t) + \frac{\alpha}{m} \dot{u}(t) = -a_0 \cos(\omega t)$$

soit

$$\ddot{u} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = -a_0 \cos(\omega t)$$

(Le système étudié est bien linéaire car l'entrée et la sortie sont reliées par une équation différentielle linéaire)

Comme l'entrée est sinusoïdale, on peut passer aux notations complexes :

Notice d'un accéléromètre



Small, Low Power, 3-Axis $\pm 3 g$ iMEMS® Accelerometer

ADXL330

FEATURES

3-axis sensing

Small, low-profile package

4 mm × 4 mm × 1.45 mm LFCSP

Low power

180 μA at $V_s = 1.8 V$ (typical)

Single-supply operation

1.8 V to 3.6 V

10,000 g shock survival

Excellent temperature stability

BW adjustment with a single capacitor per axis

RoHS/WEEE lead-free compliant

APPLICATIONS

Cost-sensitive, low power, motion- and tilt-sensing applications

Mobile devices

Gaming systems

Disk drive protection

Image stabilization

Sports and health devices

GENERAL DESCRIPTION

The ADXL330 is a small, thin, low power, complete 3-axis accelerometer with signal conditioned voltage outputs, all on a single monolithic IC. The product measures acceleration with a minimum full-scale range of $\pm 3 g$. It can measure the static acceleration of gravity in tilt-sensing applications, as well as dynamic acceleration resulting from motion, shock, or vibration.

The user selects the bandwidth of the accelerometer using the C_x , C_y , and C_z capacitors at the X_{OUT} , Y_{OUT} , and Z_{OUT} pins.

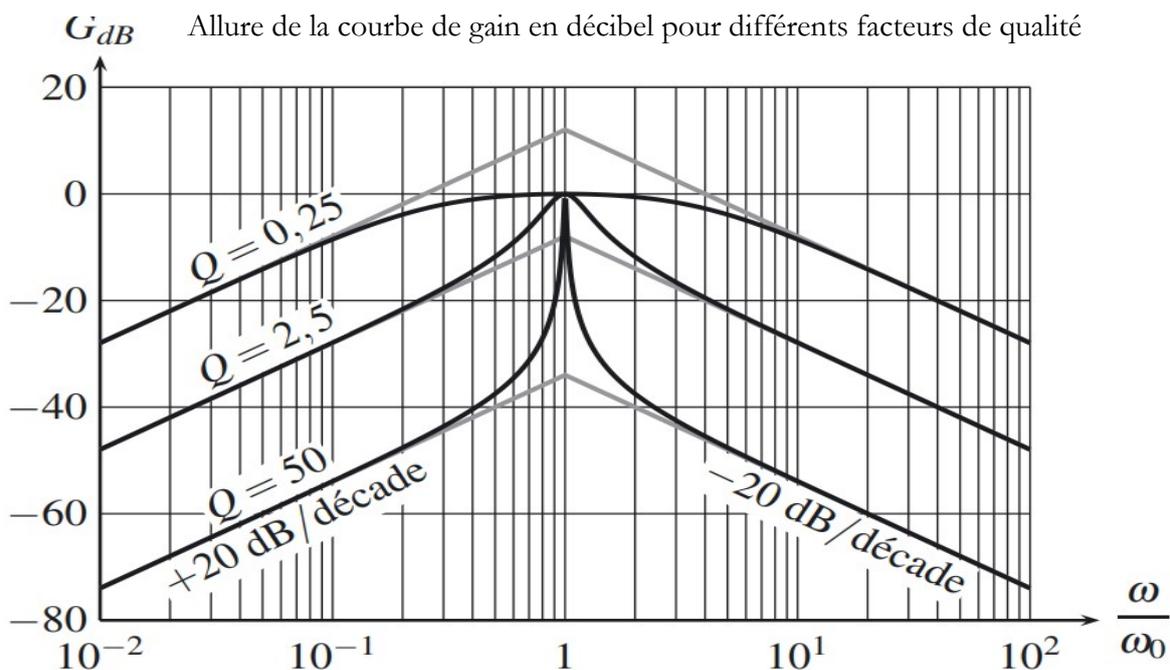
Bandwidths can be selected to suit the application, with a range of 0.5 Hz to 1600 Hz for X and Y axes, and a range of 0.5 Hz to 550 Hz for the Z axis.

Bande passante

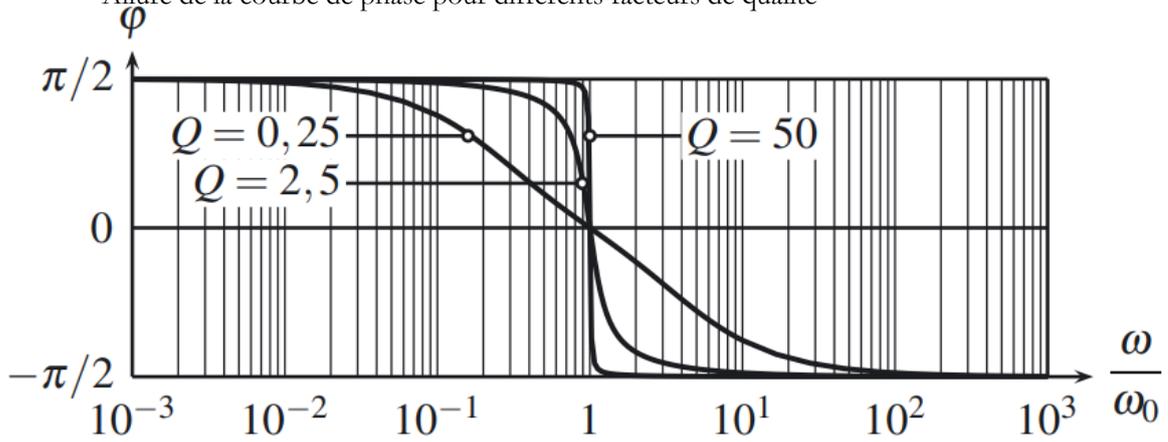
The ADXL330 is available in a small, low profile, 4 mm × 4 mm × 1.45 mm, 16-lead, plastic lead frame chip scale package (LFCSP_IQ).

III.3) Passe-bande du deuxième ordre

b) Diagramme de Bode



Allure de la courbe de phase pour différents facteurs de qualité



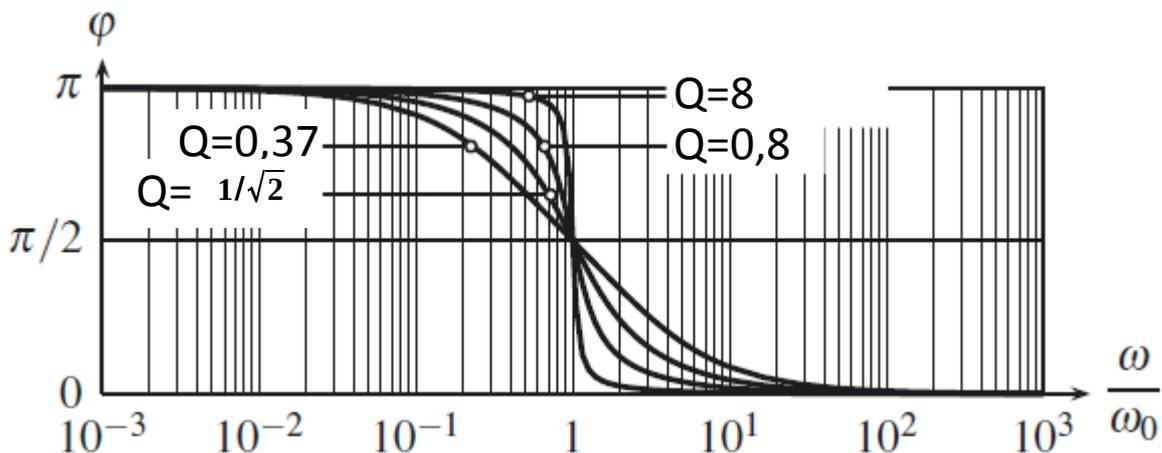
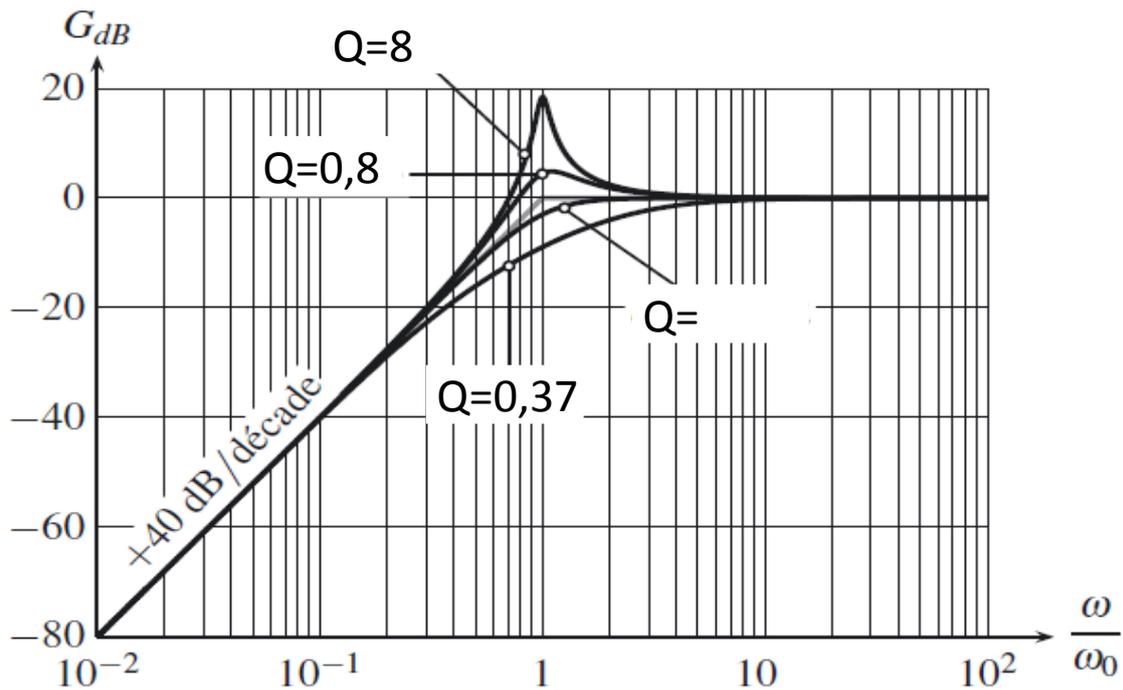
c) bande passante à - 3dB

On a déjà déterminé dans le chapitre précédent la bande passante dans ce cas (**résonance en intensité**)

$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$ donc la bande passante est l'intervalle centrée sur ω_0 : $[\omega_0 - \frac{\omega_0}{2Q}, \omega_0 + \frac{\omega_0}{2Q}]$

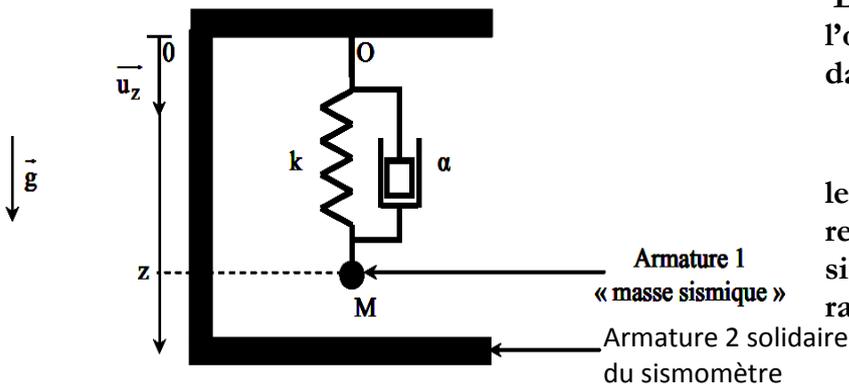
Rmq :

III.4) Filtre passe-haut du deuxième ordre



b) exemple mécanique : le sismomètre

système étudié : Même système mécanique qu'au III.2 (mêmes forces en présence)

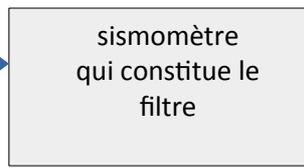


Le séisme provoque le déplacement de l'origine O du référentiel du sismomètre R_1 dans le référentiel du sol R_0 :

$$Z_O(t)_{R_0} = Z_0 \cos(\omega t)$$

le déplacement sinusoïdal de l'origine du repère entraîne le mouvement de la « masse sismique » dans le réf R_1 du sismomètre par rapport à sa position d'équilibre

entrée: déplacement sinusoïdal $Z_0(t)$ de l'origine du référentiel du sismomètre par rapport au référentiel du sol galiléen



Sortie : déplacement de l'armature 1 par rapport à sa position d'équilibre dans le référentiel du sismomètre

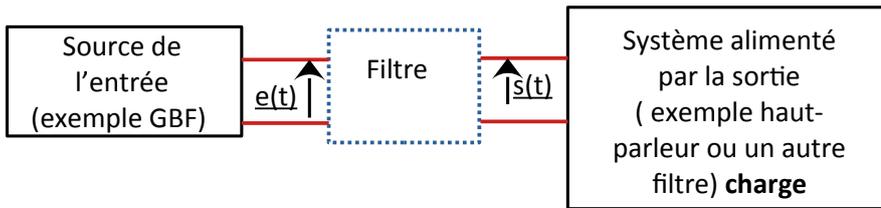
$$s(t) = u(t)$$

(remarque : par rapport au cas du 3.2 $\vec{a}_O(t)_{R_0} = \vec{a}_{R_1/R_0} = \ddot{Z}_0(t) \vec{e}_z = -\omega^2 Z_0(t) \vec{e}_z$ $\underline{H}(\omega) = \frac{s(t)}{Z_0(t)}$

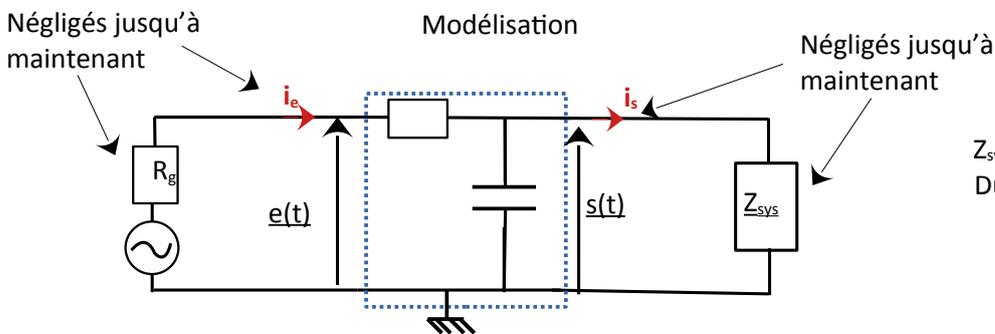
III.5) Influence de l'environnement du filtre sur la fonction de transfert

a) Validité des calculs effectués

Jusqu'à maintenant on a négliger l'environnement du filtre :



Rmq voc
4 fils « partent » du filtre (deux en entrée et deux en sortie)
 Le filtre est donc un **quadripôles**



Z_{sys} est l'impédance électrique complexe Du système physique à la sortie du filtre

b) Impédance d'entrée et de sortie du filtre

Pour caractériser le comportement du filtre vis à vis du reste du circuit (**indépendamment de sa structure réelle, qui peut être inconnue**) on peut **modéliser** :

-Ses bornes d'entrée comme un dipôle passif d'impédance Z_e , appelée

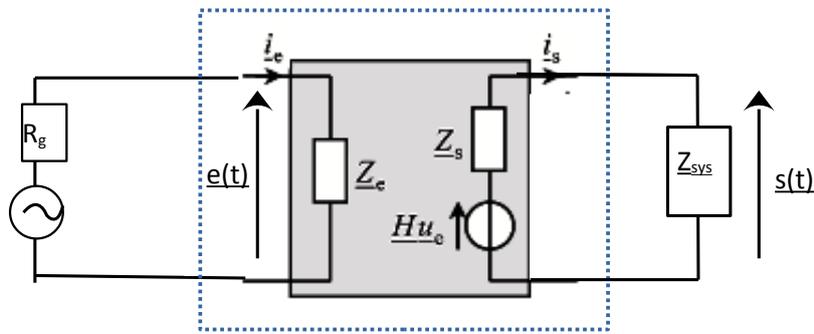
-Ses bornes de sortie comme un générateur idéal de $F_{em} = \underline{\quad}$

Rmq importante :

pour la F_{em} , \underline{H} est déterminée **sans prendre en compte ce qui est relié à la suite du filtre** .

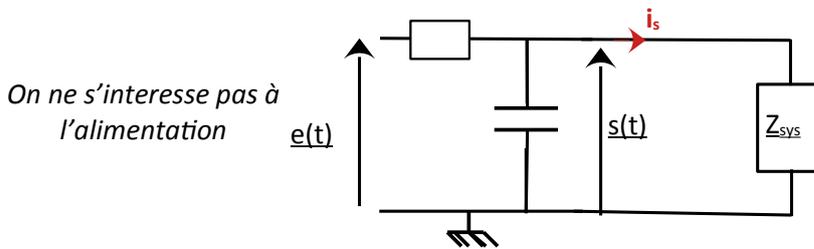
cela correspond à $\underline{i}_s = 0$ et c'est ce que nous avons fait jusqu'à maintenant.

Modélisation du filtre en prenant en compte les impédances de sortie et d'entrée :

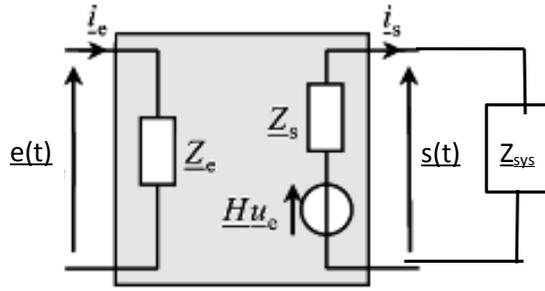


Rmq : l'entrée est considérée en convention récepteur et la sortie en convention générateur

c) Expression de $\frac{s}{e}$ en fonction Z_s et Z_{sys} et de \underline{H} (fonction de transfert en boucle ouverte)



Modélisation prenant en compte l'impédance de sortie :



Relation tension courant en complexe pour le dipôle en aval du filtre (d'impédance Z_{sys})
 $s(t) = Z_{sys} i_s$

Convention générateur en sortie

si $i_s = 0$ $H = \frac{Z_C}{Z_C + Z_R}$ Fonction de transfert en boucle ouverte

$$\underline{u}_s = H \underline{u}_e - \frac{Z_s}{Z_{sys}} \underline{u}_s$$

$$\underline{u}_s \left(1 + \frac{Z_s}{Z_{sys}}\right) = H \underline{u}_e$$

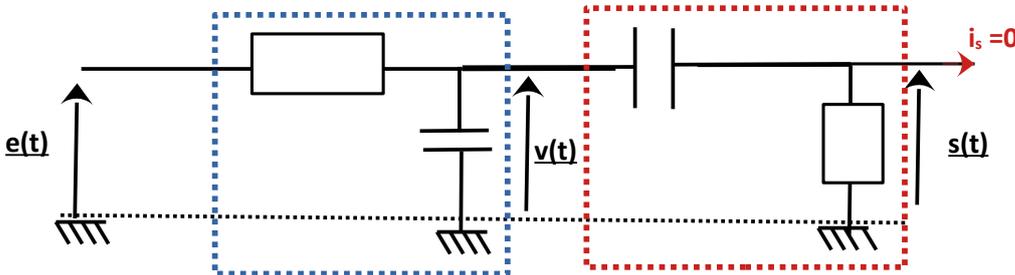
$$\frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} = \left(1 + \frac{Z_s}{Z_{sys}}\right) = H \frac{Z_{sys}}{Z_s + Z_{sys}}$$

d) Mises en cascades de filtres

Si on place un autre filtre derrière le premier quelle-est la fonction de transfert totale H_{tot} ?

Filtre 1 de fonction de transfert $H_1(\omega)$ en l'absence de charge

Filtre 2 de fonction de transfert $H_2(\omega)$ en l'absence de charge

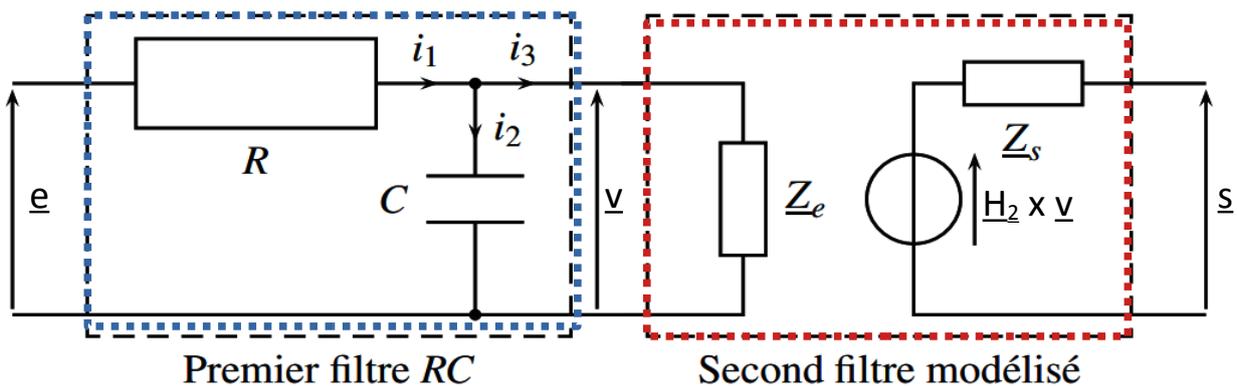


On aimerait avoir : $H_{tot}(\omega) = \frac{s}{e} = \frac{s}{v} \times \frac{v}{e} = H_2(\omega) \times H_1(\omega)$

Si on considère que l'impédance de sortie du deuxième filtre est nulle, on peut relier s à v
 En utilisant un pont diviseur de tension :

Pb : Dans quel cas est-ce possible ?

on peut modéliser le deuxième filtre par son impédance d'entrée :



Premier filtre RC

Second filtre modélisé

Nature du filtre	Fonction de transfert sous forme canonique	Exemple de filtre simple
Filtre passe-bas 1 ^{er} ordre		
Filtre passe-haut 1 ^{er} ordre		
Filtre passe-bas 2 ^{ème} ordre		
Filtre passe-haut 2 ^{ème} ordre		
Filtre passe-bande 2 ^{ème} ordre		