

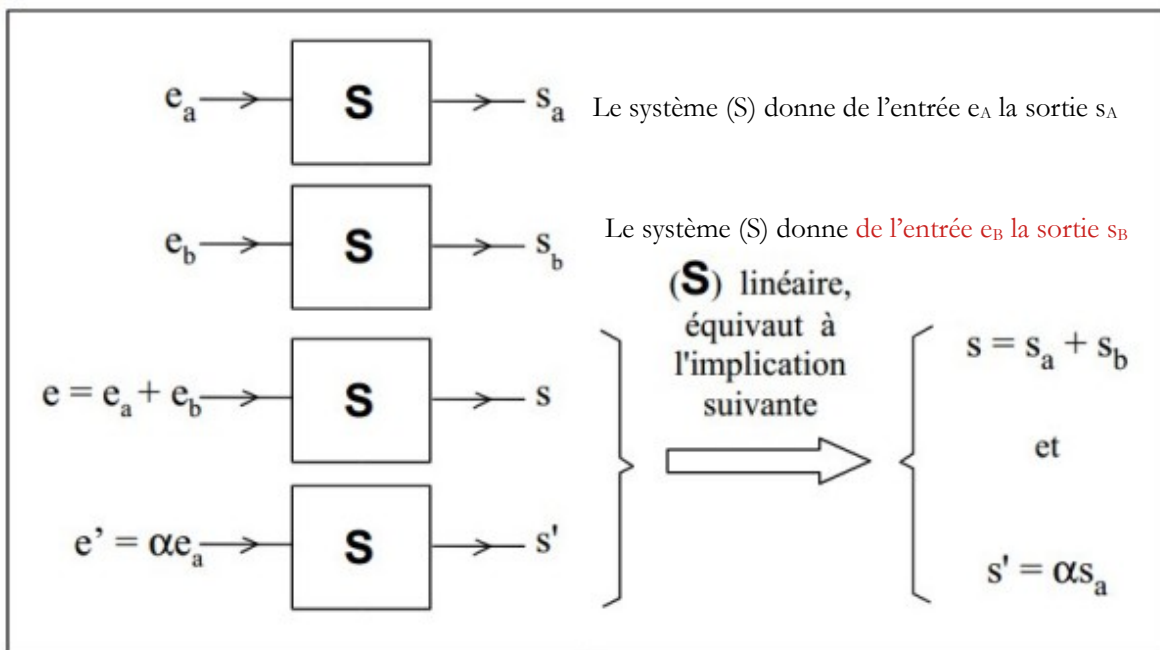
CHAP 11 : FILTRAGE LINÉAIRE

Rapports de Jury :

- Pour tracer un diagramme de Bode (comportement fréquentiel), il est important que le signal d'entrée soit un signal sinusoïdal et de vérifier que ce signal reste sinusoïdal et de même fréquence en sortie (on se limite à l'étude de systèmes linéaires). Certains candidats ne semblent pas en connaître la raison.
- La notion de bande-passante est mal maîtrisée. Pour un filtre passe-bas, par exemple, la bande-passante va de 0 à la fréquence de coupure identifiée à -3 dB par rapport au gain en basse fréquence, et non depuis la borne moins l'infini.
- Le gain en décibels d'un système linéaire correspond au logarithme du module de la fonction de transfert (ou du rapport de l'amplitude du signal de sortie sur l'amplitude du signal d'entrée) multiplié par 20.
- La détermination de la fréquence de coupure à -3 dB est souvent mal interprétée par les candidats. Il s'agit de la fréquence telle que le gain en décibels (défini précédemment) vaut le gain en décibels max dans la bande-passante diminuée de 3 dB. En amplitude, il s'agit de trouver la fréquence telle que le gain (rapport de l'amplitude du signal de sortie sur l'amplitude du signal d'entrée) a été diminué d'un facteur racine de deux par rapport au gain max dans la bande-passante.

I étude de la réponse d'un système linéaire à un signal périodique

I.1) Notion de système linéaire



(S) est un système linéaire si :

Pour une entrée combinaison linéaire de deux entrées, $e(t) = \alpha e_a(t) + \beta e_b(t)$
 alors la sortie est la combinaison linéaire des deux réponses : $s(t) = \alpha s_a(t) + \beta s_b(t)$

I.2) Notion de spectre et décomposition spectral

Rappel : Le signal $s(t)$ est dit périodique de période T si il se reproduit à l'identique après une durée minimale T :
 c'est à dire que $s(t+T) = s(t)$

a) Notion de décomposition spectrale d'un signal

Au 19 ème siècle, Joseph Fourier montre que tout signal périodique $s(t)$ peut être décomposé en une somme de signaux sinusoïdaux :

si $s(t)$ est périodique alors $\exists (s_i, f_i, \phi_i) \in \mathbb{R}^3$ tq :

$$s(t) = \sum_{i=0}^{\infty} s_i \cos(2\pi f_i t + \phi_i)$$



Ou plus précisément :

$$s(t) = S_0 + S_1 \cos(2\pi f_1 t + \phi_1) + \sum_{n=2}^{\infty} S_n \cos(2\pi f_n t + \phi_n)$$

Composante continue (« offset »)

Composante fondamentale

Fréquence fondamentale telle que $f_1 = \frac{1}{T}$ (T est la période du signal)

N^{ième} composante harmonique

N^{ième} fréquence harmonique telle que $f_n = n f_1 = n \frac{1}{T}$

$f_2 = 2 f_1, f_3 = 3 f_1 \text{ etc...}$

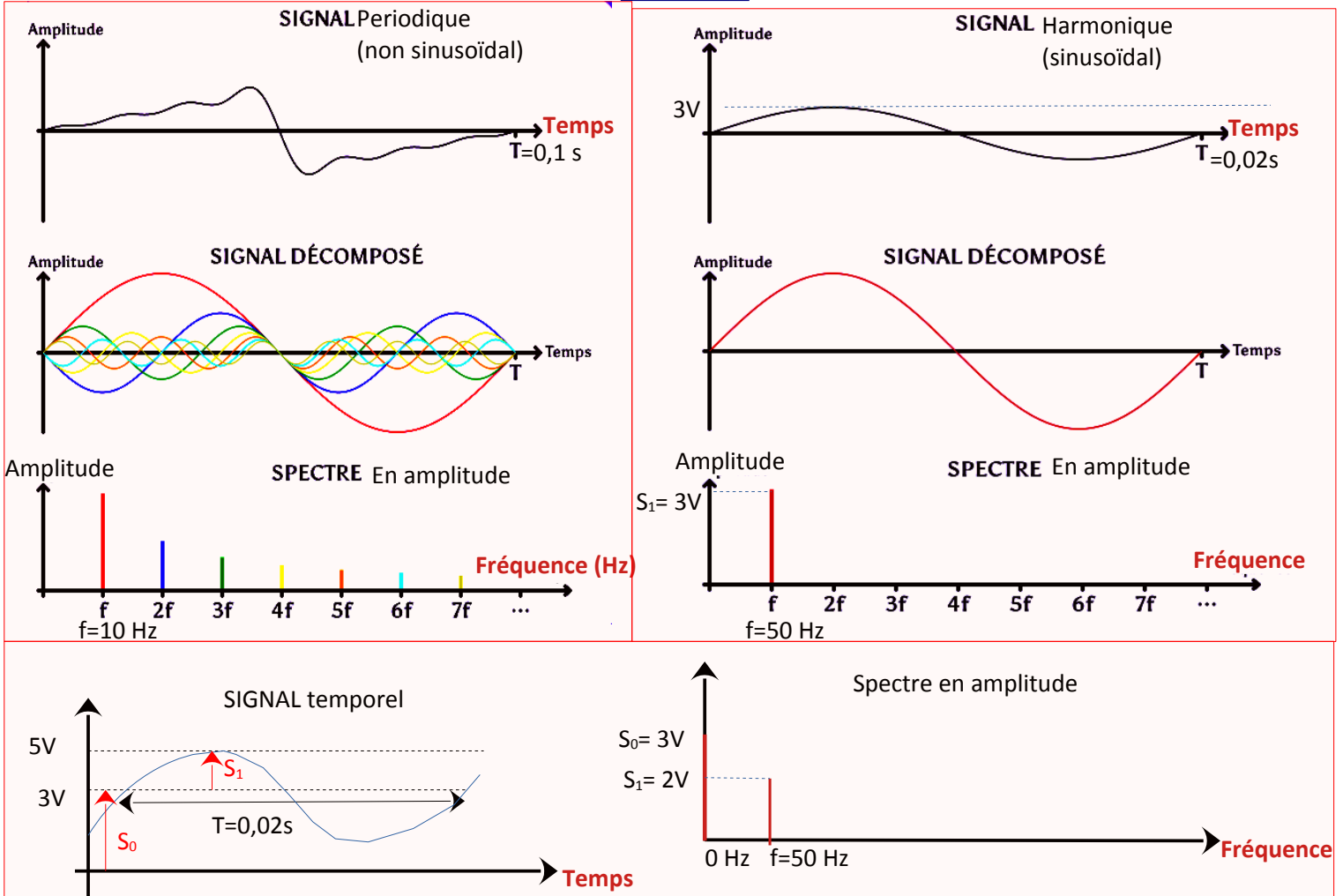
Voc : Cette écriture de $s(t)$ constitue la décomposition spectrale de $s(t)$

b) Notion de spectre

L'étude spectrale du signal $s(t)$ (ou établir le spectre de $s(t)$), consiste à :

- Donner la liste des fréquences f_i des composantes qui possèdent une amplitude S_i non nulle (les f_i sont les abscisses des « pics » dans le spectre)
- Donner la valeurs des amplitudes S_i de la fondamentale et des éventuels harmoniques ou de la composante continue (hauteur des pics sur le spectre d'amplitude)
- Donner les valeurs des phases ϕ_i (hauteur des pics sur le spectre de phase que l'on représente rarement en pratique)

[animation](#)



Rmq : Si le signal possède une composante continue, le spectre en amplitude possède un pic à 0Hz de hauteur S_0

c) Valeur moyenne (composante continue)

S_0 est la valeur moyenne du signal (ou composante continue). Le signal oscille autour de cette valeur

$$S_0 = \langle s(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt$$



Rmq voc : $\langle S(t) \rangle$ veut dire valeur moyenne du signal $s(t)$.

$$\langle A \cos(\omega t + \alpha) \rangle = 0 \quad \langle s(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T A \cos(\omega t + \alpha) dt = \frac{1}{T} (\text{Aire algébrique sous la courbe})$$

Rmq : De façon qualitative la valeur moyenne est l'aire algébrique sous la courbe divisé par T

d) valeur efficace d'un signal

Pour un signal périodique $s(t)$ la valeur efficace de ce signal est :

$$S_{\text{eff}} = \sqrt{\langle s(t)^2 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T s(t)^2 dt}$$



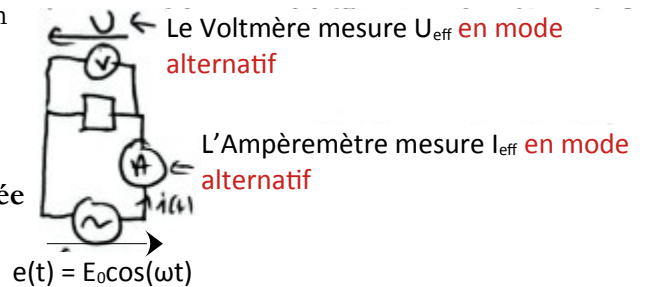
$$S_{\text{eff}} \neq \sqrt{(\langle s(t) \rangle)^2}$$

Le carré de la moyenne n'est pas la moyenne du carré !

Intérêt : Quand on utilise un multimètre pour mesure une tension alternative (c'est à dire périodique) ou une intensité alternative, la valeur affichée est la grandeur efficace associée à la tension ou à l'intensité.

Elle intervient dans le calcul de la puissance moyenne dissipée par une résistance quand les grandeurs électriques sont alternatives

$$\begin{aligned} \langle P(t) \rangle &= \langle R i(t)^2 \rangle = R \langle i(t)^2 \rangle = R I_{\text{eff}}^2 \\ \langle P(t) \rangle &= \langle \frac{U(t)^2}{R} \rangle = \frac{\langle U(t)^2 \rangle}{R} = \frac{U_{\text{eff}}^2}{R} \end{aligned}$$



Rmq : quand on dit que la valeur de la tension délivrée par EDF est de 230 V, on parle de la tension efficace en réalité...

Valeur efficace d'un signal sinusoïdal pur : $s(t) = S_1 \cos(2\pi f t + \phi)$

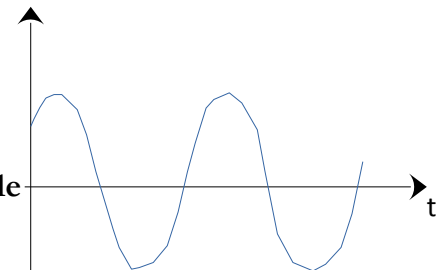
calculons $\langle s(t)^2 \rangle = \langle S_1^2 \cos^2(2\pi f t + \phi) \rangle$ or $\cos^2(2\pi f t + \phi) = \frac{1}{2}(1 + \cos(4\pi f t + 2\phi))$

$$\langle s(t)^2 \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{S_1^2}{2} (1 + \cos(4\pi f t + 2\phi)) dt$$

Or $\int_0^T \cos(4\pi f t + 2\phi) dt = 0$ car sur une période la moyenne du cos est nulle

$$\langle s(t)^2 \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T \frac{S_1^2}{2} dt \quad \text{soit} \quad \langle s(t)^2 \rangle = \frac{S_1^2}{2} \quad \text{et finalement} \quad S_{\text{eff}} = \frac{S_1}{\sqrt{2}}$$

$$S_{\text{eff}} = \frac{S_1}{\sqrt{2}}$$



e) Relation de Parseval

La puissance moyenne du signal $s(t)$ est proportionnelle au carré de sa valeur efficace. Or, chaque harmonique transporte également une puissance proportionnelle à sa valeur efficace. La relation de Parseval exprime simplement le fait que la puissance du signal est égale à la somme des puissances transportées par les différents harmoniques, ce qui en terme de valeurs efficace se traduit

$$S_{\text{eff}}^2 = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{S_i^2}{2}$$

I.3) Fonction de Transfert

a) Def



soit un signal périodique en entrée $e(t)$ auquel on associe un signal complexe $\underline{e}(\omega)$
 soit le signal périodique en sortie $s(t)$ auquel on associe le signal complexe $\underline{s}(\omega)$

On définit la fonction de transfert du filtre par la relation

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}}$$



b) Cas d'une entrée sinusoïdale

si l'entrée est sinusoïdale $e(t) = E_0 \cos(\omega t + \phi_i)$ alors $\underline{e}(\omega) = E_0 \exp(j(\omega t + \phi_i))$

Ici S_0 n'est pas la composante continue mais l'amplitude du signal (l'équivalent de S_1 de la partie précédente)

en sortie du filtre la tension est $s(t) = S_0 \cos(\omega t + \phi_s)$ alors $\underline{s}(\omega) = S_0 \exp(j(\omega t + \phi_s)) = S_0 e^{j(\omega t + \phi_s)} = \underline{S}_0 e^{j\omega t}$

Les deux notations sont utilisées en fonction des exercices

On peut faire le lien entre les amplitudes, les phases et la fonction de transfert en effet

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{S_0 \exp(j(\omega t + \phi_s))}{E_0 \exp(j(\omega t + \phi_i))} = \frac{S_0}{E_0} \exp(j(\phi_s - \phi_i))$$

On a donc

$$\underline{G}(\omega) = |\underline{H}(\omega)| = \frac{S_0}{E_0}$$

Le module de la fonction de transfert est le l'amplitude de la sortie sur l'amplitude de l'entrée
 Voc : Le module de la fonction de transfert s'appelle **le Gain du filtre**

$$\arg(\underline{H}(\omega)) = \phi_s - \phi_i$$

C'est le déphasage de la sortie par rapport à l'entrée.

Rmq : Souvent $\phi_i = 0$ et $\phi_s = \arg(\underline{H})$

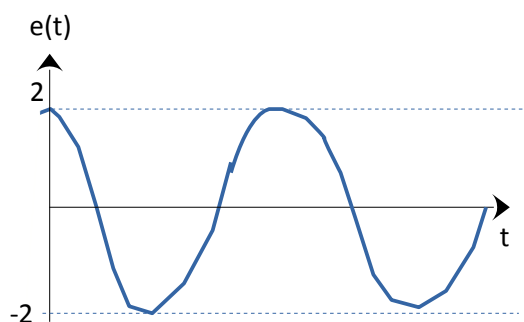
Rmq souvent on note $\phi(\omega) = \arg(\underline{H}(\omega))$

La sortie sera alors $s(t) = |\underline{H}(\omega)| E_0 \cos(\omega t + \phi(\omega) + \phi_i)$

Exemple : $e(t) = 2 \cos(\frac{2\pi}{T} t)$ (ici pas de composante continue) on pose $f_1 = \frac{1}{T}$ et $\omega_1 = \frac{2\pi}{T}$

on envoie $e(t)$ sur un filtre de fonction de transfert $\underline{H}(\omega)$ telle que $\underline{H}(\omega_1) = 0,5$ et $\arg(\underline{H}(\omega_1)) = -\frac{\pi}{2}$

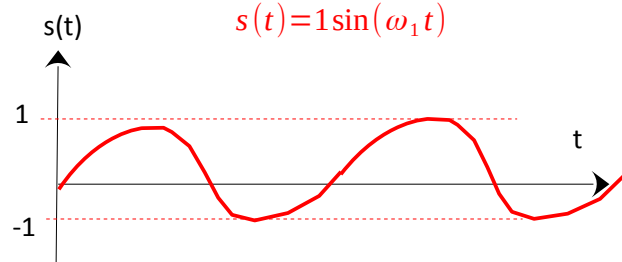
Allure temporelle de l'entrée



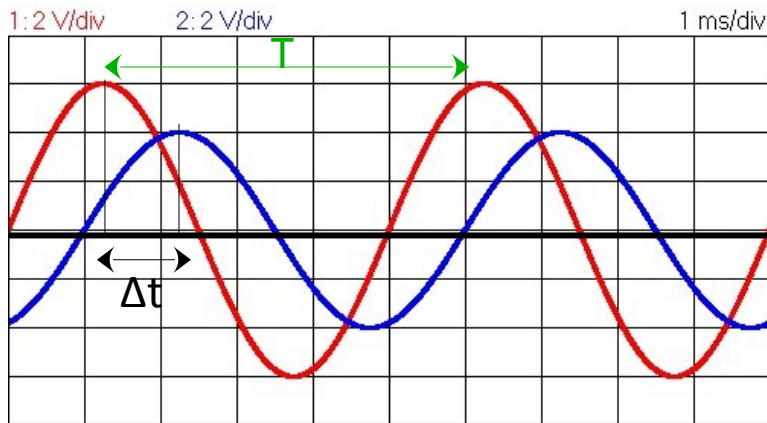
Allure temporelle de la sortie

$$s(t) = \underline{H}(\omega_1) E_0 \cos(\omega_1 t + \phi(\omega_1)) = 0,5 \times 2 \cos(\omega_1 t - \frac{\pi}{2})$$

$$s(t) = 1 \sin(\omega_1 t)$$



c) Lien entre le déphasage et le décalage temporel



$$e(t) = E_0 \cos(\omega t + \phi_i)$$

$$s(t) = S_0 \cos(\omega t + \phi_i + \Delta\phi)$$

On mesure Δt la durée entre les instants où $s(t)$ et $e(t)$ atteignent leurs max

Rmq :

Si $s(t)$ atteint son max plus tard, alors $\Delta t > 0$ et $\Delta\phi > 0$ ($s(t)$ est en retard sur $e(t)$)

Sinon, $s(t)$ est en avance sur $e(t)$

Le déphasage $\Delta\phi$ est relié au décalage temporel Δt et à la période T par la relation :

$$|\Delta\phi| = 2\pi \frac{\Delta t}{T}$$

d) Cas d'une superposition de deux signaux sinusoïdaux avec valeur moyenne

Pour l'entrée : $e(t) = E_1 \cos(2\pi f_1 t) + E_2 \cos(2\pi f_2 t) + E_0$ qu'on écrit aussi $e(t) = E_1 \cos(\omega_1 t) + E_2 \cos(\omega_2 t) + E_0$
 ω_1 ω_2 $\omega_0 = 0$

Alors la sortie sera

$$S(t) = |H(\omega_1)| E_1 \cos(\omega_1 t + \phi(\omega_1)) + |H(\omega_2)| E_2 \cos(\omega_2 t + \phi(\omega_2)) + |H(0)| E_0$$

Pour chaque composante sinusoïdale de l'entrée à la pulsation ω :

On multiplie l'amplitude de l'entrée par le module de la fonction de transfert calculée à la pulsation ω

On rajoute un déphasage égale à l'argument de la fonction de transfert calculée à la pulsation ω

I.4) Diagramme de Bode : vidéo explicative

Un diagramme de Bode est constituée de deux graphiques

- le premier représente $GdB = 20 \log(|H|)$ en fonction de ω

- Le deuxième représente $\arg(H)$ (souvent noté ϕ) en fonction de ω

Voc :

$$GdB(\omega) = 20 \log(|H(\omega)|) \text{ s'appelle le gain en décibel du filtre à la pulsation } \omega$$

$|H(\omega)|$ s'appelle le gain du filtre

- Rmq 1 : Oublier le module dans l'expression du gain en décibel est une erreur très grave !

- Rmq 2 : Quand $GdB(\omega) = 0$ alors $|H(\omega)| = 1$. Pour une entrée sinusoïdale d'amplitude E_0 l'amplitude de la sortie vaut aussi E_0 dans ce cas

Rmq 3 : si $GdB(\omega) < 0$ alors $|H(\omega)| < 1$. Pour une entrée sinusoïdale d'amplitude E_0 l'amplitude de la sortie sera plus faible plus précisément l'amplitude de la sortie sera

- Rmq 4 on peut aussi exprimer le gain en fonction du gain en décibel :

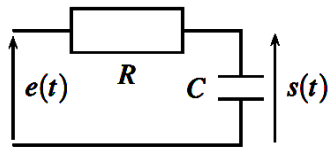
$$|H(\omega)| = 10^{\frac{GdB(\omega)}{20}}$$

II. Modèles simples de filtres passifs du premier Ordre

II.1) Filtre Passe-bas du 1^{er} ordre

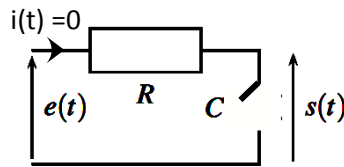
a) Exemple

1 schéma élec



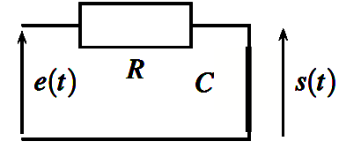
2 Prédiction du comportement

En Très basse fréquence (TBF)



$U_R = Ri = 0$ LDM : $e = U_R + s$
Donc $s = e$ en TBF

EN Très haute fréquence (THF)



$S=0$ en THF (tension aux bornes d'un fil)

Analyse : Les signaux TBF ne sont pas modifiés par le filtre (entrée=sortie)

Les signaux THF ne passent pas (sortie = 0)

Conclusion : Le filtre est un **passse-bas** (il laisse passer les BF)

3 Fonction de transfert

$$\underline{H}(\omega) = \frac{s}{e} \quad \text{PdT complexe : } s = \frac{Z_C}{Z_C + Z_R} e \quad \text{soit } \frac{s}{e} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{\frac{1}{jC\omega} + R} \Leftrightarrow \underline{H} = \frac{1}{1 + jRC\omega} = \frac{1}{1 + j\omega\tau} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

$\tau = RC$ $\omega_0 = \frac{1}{RC}$

À savoir retrouver ♥

Rmq : de manière plus générale pour filtre passe bas du premier ordre



$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$$

Gain statique (à TBF)

C'est aussi le gain max

(il n'est pas forcément égale à 2 voir ex 3 TD 11)

Pulsation de coupure à -3dB

(pas forcément égale à $1/RC$)

Parfois aussi notée ω_0

b) Diagramme de Bode en Gain

$$|\underline{H}(\omega)| = \frac{H_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}}$$

Justification des asymptotes :

– à basse fréquence (BF) $\omega < \omega_c$: $1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 \approx 1$ et $|\underline{H}(\omega)| \approx \frac{H_0}{\sqrt{1}}$

Le gain en décibel est alors $GdB(\omega) = 20 \log(|\underline{H}|) \approx 20 \log(H_0) - 20 \log(1)$

À BF la courbe de $GdB(\omega)$ tend asymptotiquement vers une droite horizontale $GdB = 20 \log(H_0)$

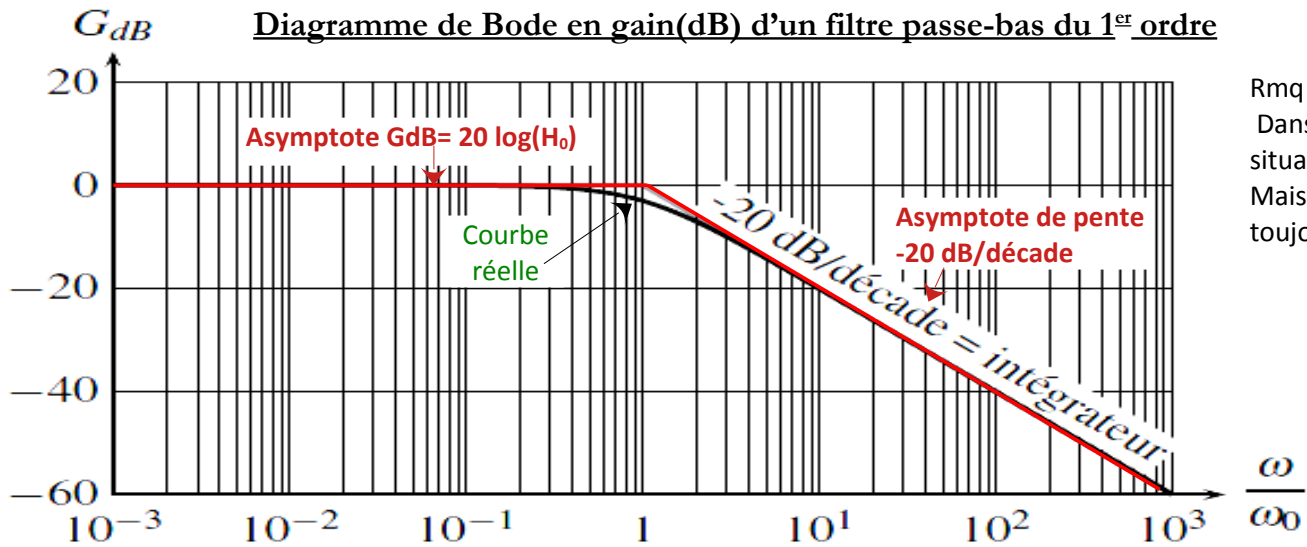
– à haute fréquence (HF) $\omega > \omega_c$: $1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 \approx \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2$ donc $|\underline{H}(\omega)| \approx \frac{H_0}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}} \approx \frac{H_0}{\frac{\omega}{\omega_c}}$

Le gain en décibel est alors $GdB(\omega) \approx 20 \log(H_0) - 20 \log\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$

Notamment $GdB(10\omega) \approx 20 \log(H_0) - 20 \log\left(10 \frac{\omega}{\omega_c}\right) = 20 \log(H_0) - 20 \log\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) - 20 \log(10)$

Et finalement $GdB(10\omega) = GdB(\omega) - 20 \text{ dB}$

À HF la courbe de $GdB(x)$ tend asymptotiquement vers une droite de pente -20 dB/décade



b) Diagramme de Bode en phase

Justification de l'allure du diagramme de $\varphi(\omega)$

$$\varphi(\omega) = \arg\left(\frac{H_0}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}\right) \quad \text{On suppose dans la suite que } H_0 \text{ est un réel positif}$$

Justification des asymptotes :

– à basse fréquence (BF) $\omega < \omega_c$: $1 + j\frac{\omega}{\omega_c} \approx 1$ et $\underline{H}(\omega) \approx \frac{H_0}{1}$

Attention ce n'est pas le module de la fonction de transfert mais la fonction de transfert elle-même que l'on simplifie

Le déphasage introduit par le filtre est alors $\varphi(\omega) = \arg(H_0) - \arg(1) = 0$

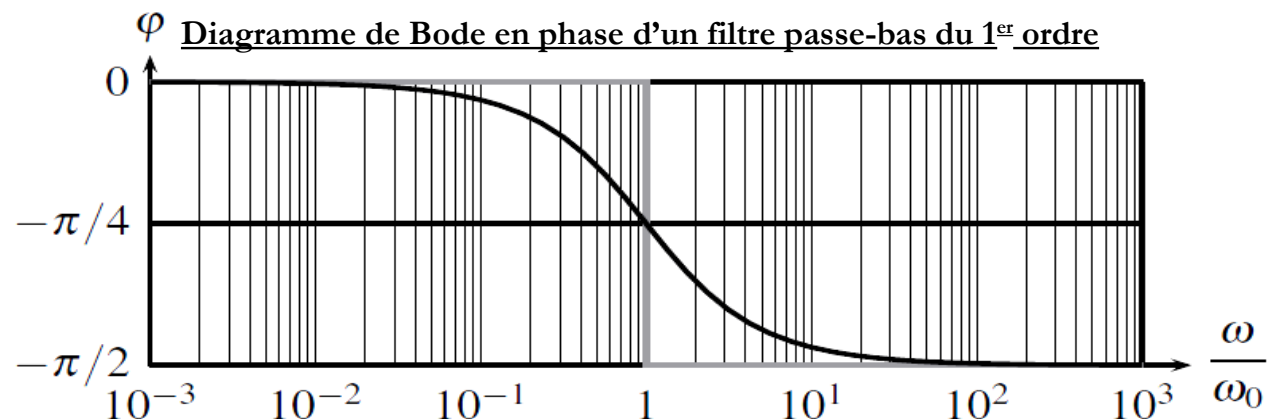
À BF la courbe de $\varphi(\omega)$ tend asymptotiquement vers une droite horizontale $\varphi = 0$

– à haute fréquence (HF) $\omega \gg \omega_c$: $1 + j\frac{\omega}{\omega_c} \approx j\frac{\omega}{\omega_c}$ donc $\underline{H}(\omega) \approx \frac{H_0}{j\frac{\omega}{\omega_c}}$

Le déphasage introduit par le filtre est alors $\varphi(\omega) = \arg(H_0) - \arg(j\frac{\omega}{\omega_c}) = 0 - \frac{\pi}{2}$

Et finalement

À HF la courbe de $\varphi(\omega)$ tend asymptotiquement vers une droite horizontale $\varphi = \frac{\pi}{2}$



c) Comportement intégrateur du filtre passe-bas à HF

On a vu qu'à HF (quand $\omega \gg \omega_c$) :

$$\underline{H}(\omega) \approx \frac{H_0}{j\frac{\omega}{\omega_c}} \Leftrightarrow \frac{s}{e} = \frac{H_0}{j\frac{\omega}{\omega_c}} \Leftrightarrow s = H_0 \omega_c \times \frac{e}{j\omega} \quad \text{or} \quad \frac{e}{j\omega} = \int e dt \quad \text{donc} \quad s = H_0 \omega_c \times \int e dt$$

À savoir retrouver

en repassant aux signaux réels :

$$s(t) = H_0 \omega_c \times \int e(t) dt$$

La sortie est proportionnelle à l'intégrale temporelle de l'entrée à Haute fréquence pour le passe-bas

d) Bande passante à -3dB

Déf : la bande passante à -3dB est l'intervalle de pulsation telle que

$$|\underline{H}(\omega)| \geq \frac{H_{\max}}{\sqrt{2}} \quad H_{\max} \text{ étant le gain maximal du filtre}$$



On peut aussi utiliser le gain en décibel :

$$G_{dB}(\omega) \geq G_{dB_{\max}} - 3 \text{ dB}$$

Calcul de la bande passante pour un passe bas du premier ordre :

$$|\underline{H}(\omega)| \geq \frac{H_{\max}}{\sqrt{2}} \quad \text{pour le passe bas du premier ordre} \quad |\underline{H}(\omega)| = \frac{H_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}}$$

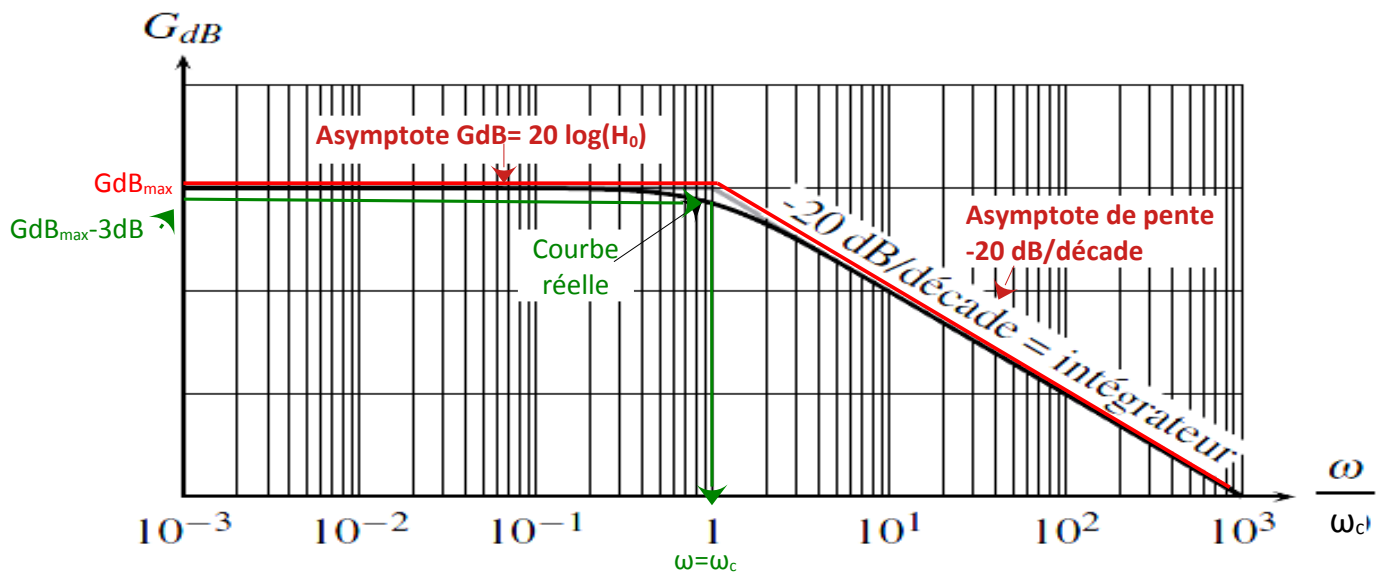
donc $H_{\max} = H_0$ ainsi dans la bande passante :

$$|\underline{H}(\omega)| \geq \frac{H_0}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{H_0}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}} \geq \frac{H_0}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2} \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow 1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 \leq 2 \Leftrightarrow \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 \leq 1 \Leftrightarrow \omega < \omega_c$$

La bande passante est donc l'intervalle $[0, \omega_c]$ pour un basse-bas du 1^{er} ordre



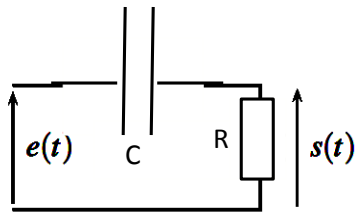
Rmq : à la limite de la bande passante $G_{dB}(\omega_c) = G_{dB_{\max}} - 3 \text{ dB}$



II.2) Filtre Passe-haut du 1^{er} ordre

a) Exemple

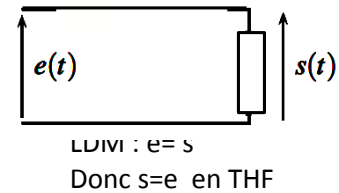
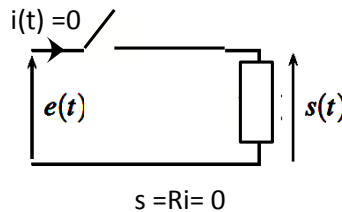
1 schéma élec



2 Prédiction du comportement

En Très basse fréquence (TBF)

En Très haute fréquence (THF)



Analyse : Les signaux THF ne sont pas modifiés par le filtre (entrée=sortie)

Les signaux TBF ne passent pas (sortie = 0)

Conclusion : Le filtre est un **passe-haut** (il laisse passer les HF)

3 Fonction de transfert

$$\underline{H}(\omega) = \frac{s}{e} \quad \text{PdT complexe : } s = \frac{Z_R}{Z_C + Z_R} e \quad \text{soit} \quad \frac{s}{e} = \frac{R}{\frac{1}{jC\omega} + R} \Leftrightarrow \underline{H} = \frac{jRC\omega}{1 + jRC\omega} = \frac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau} = \frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}}$$

$\tau = RC \quad \omega_0 = \frac{1}{RC}$

On multiplie par jRCω en haut et en bas

Rmq : de manière plus générale pour filtre passe-haut du premier ordre

Gain à THF
c'est aussi le gain max
(attention ce n'est pas le gain statique !)

$$\underline{H} = H_0 \times \frac{j\frac{\omega}{\omega_c}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$$

Pulsation de coupure à -3dB
(pas forcément 1/RC)

b) Diagramme de Bode en Gain

$$|\underline{H}(\omega)| = \frac{H_0 \frac{\omega}{\omega_c}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}}$$

Justification des asymptotes :

à basse fréquence (BF) $\omega < \omega_c$: $1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 \approx 1$ et $|\underline{H}(\omega)| \approx H_0 \frac{\omega}{\omega_c}$ on laisse $\frac{\omega}{\omega_c}$ au numérateur (on ne remplace pas par 0)

$$GdB(\omega) = 20 \log(|\underline{H}|) \approx 20 \log(H_0) + 20 \log\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$$

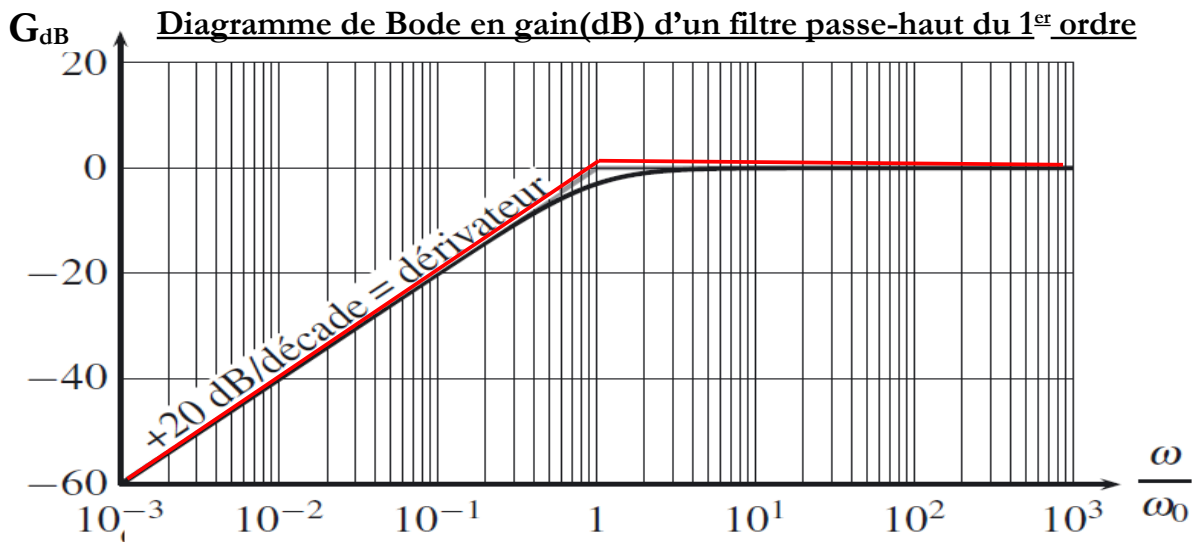
Notamment à BF $GdB(10\omega) = GdB(\omega) + 20 \text{ dB}$

À BF la courbe de $GdB(\omega)$ tend asymptotiquement vers une droite de pente + 20 dB/décade

à haute fréquence (HF) $\omega \gg \omega_c$: $1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 \approx \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2$ et $|\underline{H}(\omega)| \approx \frac{H_0 \frac{\omega}{\omega_c}}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}} \approx \frac{H_0 \frac{\omega}{\omega_c}}{\frac{\omega}{\omega_c}} \approx H_0$

$$GdB(\omega) \approx 20 \log(H_0)$$

À HF la courbe de $GdB(\omega)$ tend asymptotiquement vers une droite horizontale $GdB(\omega) \approx 20 \log(H_0)$



c) Justification de l'allure de la courbe de phase

Justification des asymptotes :

– à basse fréquence (BF) $\omega < \omega_c$: $1 + j\frac{\omega}{\omega_c} \approx 1$ et $\underline{H}(\omega) \approx \frac{H_0 j \frac{\omega}{\omega_c}}{1}$

Le déphasage introduit par le filtre est alors $\phi(\omega) = \arg(H_0 j \frac{\omega}{\omega_c}) - \arg(1) = \frac{\pi}{2}$ Si $H_0 > 0$
Et car ω et $\omega_c > 0$

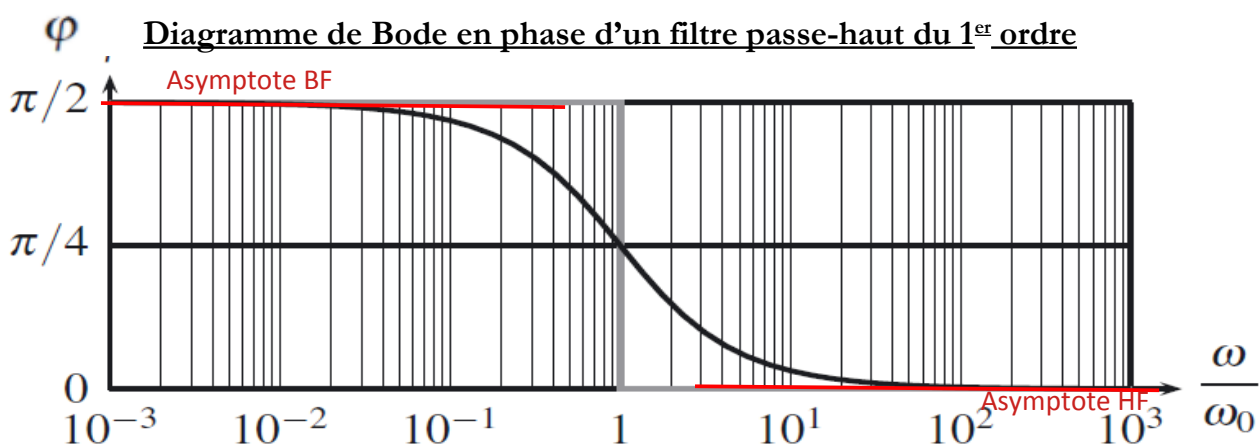
À BF la courbe de $\phi(\omega)$ tend asymptotiquement vers une droite horizontale $\phi = \frac{\pi}{2}$

– à haute fréquence (HF) $\omega > \omega_c$: $1 + j\frac{\omega}{\omega_c} \approx j\frac{\omega}{\omega_c}$ donc $\underline{H}(\omega) \approx \frac{H_0 j \frac{\omega}{\omega_c}}{j \frac{\omega}{\omega_c}} \approx H_0$

Le déphasage introduit par le filtre est alors $\phi(\omega) = \arg(H_0) = 0$ Si $H_0 > 0$

Et finalement

À HF la courbe de $\phi(\omega)$ tend asymptotiquement vers une droite horizontale $\phi = 0$



d) Comportement dérivateur du filtre passe-haut du premier ordre à BF

On a vu qu'à BF (quand $\omega < \omega_c$) :

$$\underline{H}(\omega) \approx \frac{H_0 j \frac{\omega}{\omega_c}}{1} \Leftrightarrow \underline{s} = \frac{H_0}{\omega_c} \times j \omega \underline{e} \quad \text{or} \quad \underline{e} j \omega = \frac{d\underline{e}}{dt}$$

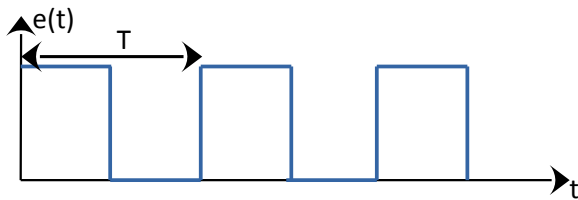
À savoir retrouver

en repassant aux signaux réels :

$$s(t) = \frac{H_0}{\omega_c} \times \frac{de(t)}{dt}$$

La sortie est proportionnelle à la dérivée temporelle de l'entrée à BF pour le passe-haut du 1^{er} ordre

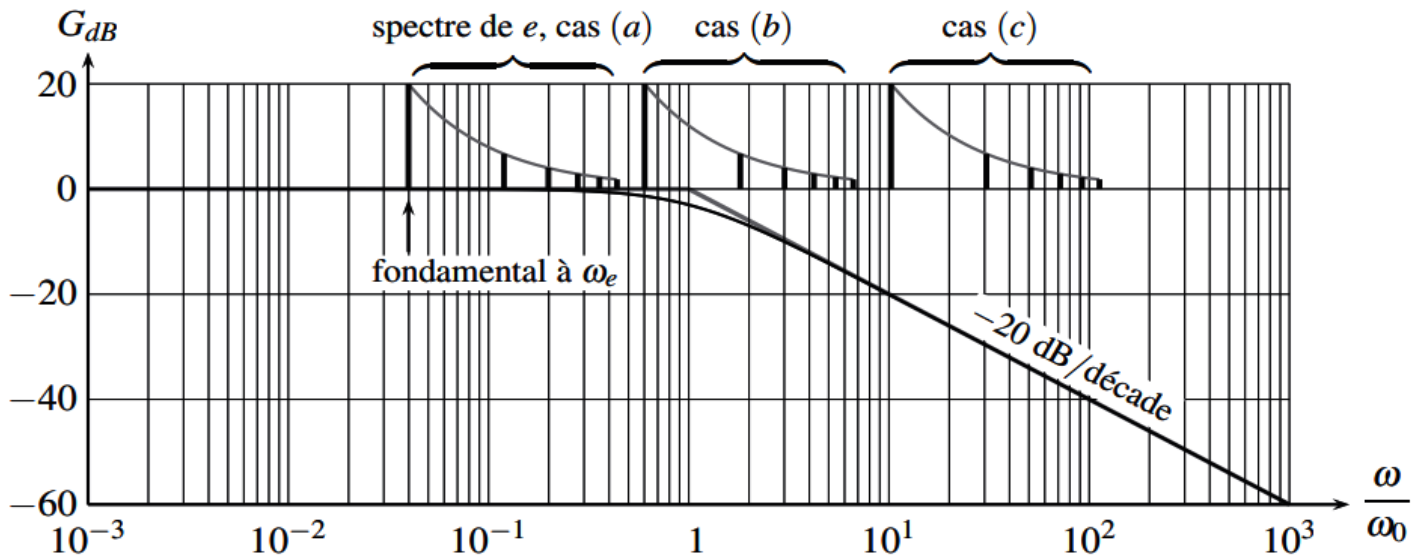
II.3) Utilisation du diagramme de Bode pour prédire l'allure de la sortie du passe bas

Signal $e(t)$:

On cherche le signal $s(t)$ en sortie d'un filtre passe-bas de fréquence propre ω_0 et on envisage 3 cas :

Cas a) : $\omega_0 T = 150$ Cas b) : $\omega_0 T = 10$ Cas c) : $\omega_0 T = 0,63$

Allure du diagramme de Bode en gain dans les 3 cas



Allure de la sortie dans les 3 cas

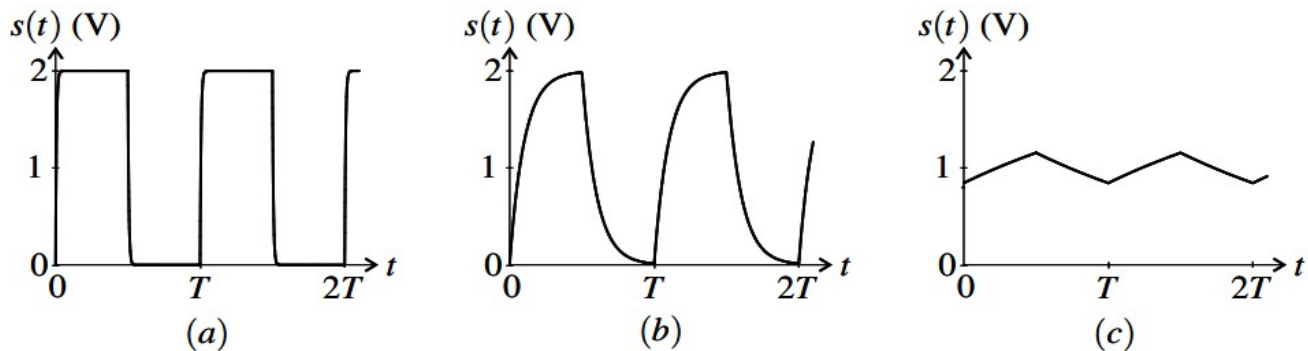


Figure 12.11 – Créneau filtré par un filtre passe-bas du premier ordre : (a)

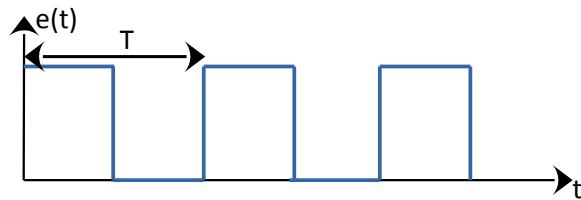
$\omega_0 T \simeq 150$, (b) $\omega_0 T = 10$, (c) $\omega_0 T = 0,63$

Cas a) : Les composantes ne sont pas filtrées (car elles sont toutes dans la zone basse fréquence où le gain vaut 1), les amplitudes des pics dans le spectre en amplitude de $s(t)$ seront identiques aux amplitudes de $e(t)$: $s(t)$ ressemblera beaucoup à $e(t)$

Cas b) : La composante fondamentale n'est pas filtrée mais les harmoniques sont filtrées le signal de sortie est différent du signal d'entrée. On observe un comportement ressemble à la charge et à la décharge d'un condensateur dans un circuit RC

Cas c) : Toutes les composantes du spectre de $e(t)$ sont filtrées (elles sont toutes dans la zone HF) . Le filtre possède un comportement intégrateur pour toute les composantes de l'entrée. La sortie est une primitive de l'entrée
(fonctions affines croissantes et décroissantes)

Utilisation du diagramme de Bode pour prédire l'allure de la sortie du passe haut

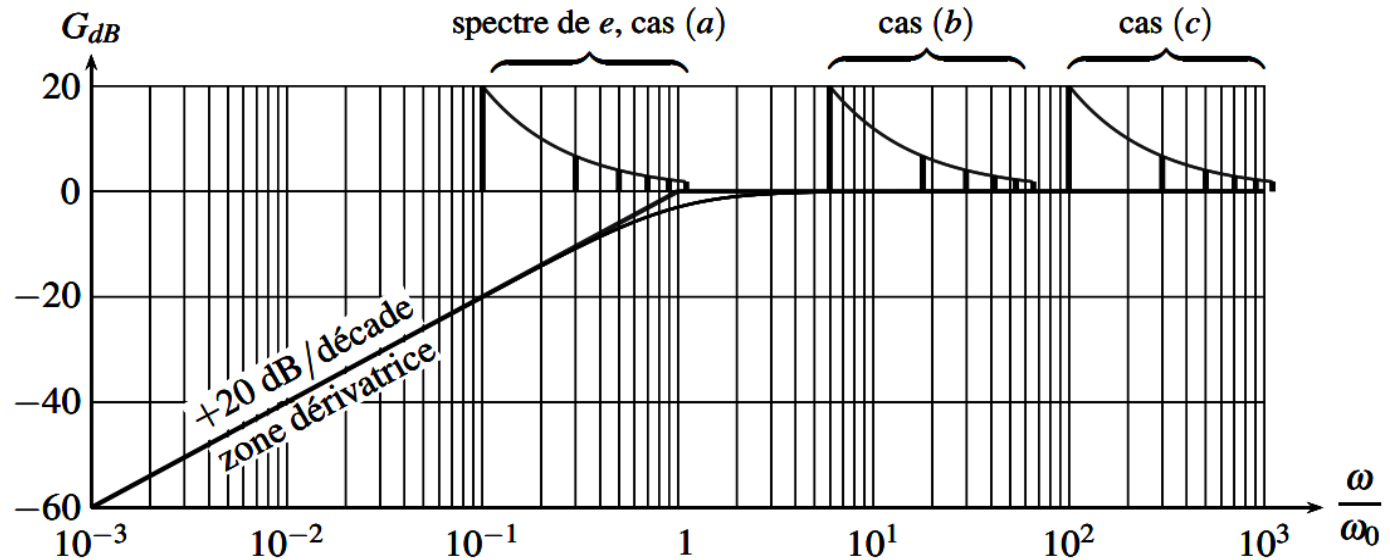
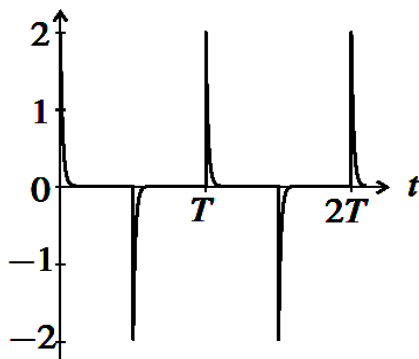
Signal $e(t)$:

On cherche le signal $s(t)$ en sortie d'un filtre passe-haut de fréquence propre ω_0 et on envisage 3 cas :

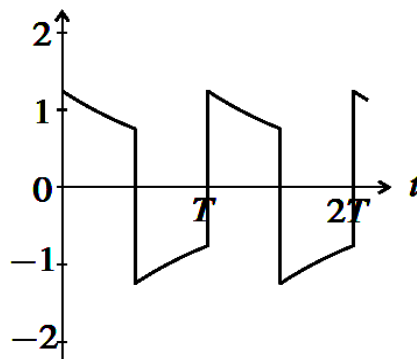
Cas a) : $\omega_0 T = 150$

Cas b) : $\omega_0 T = 10$

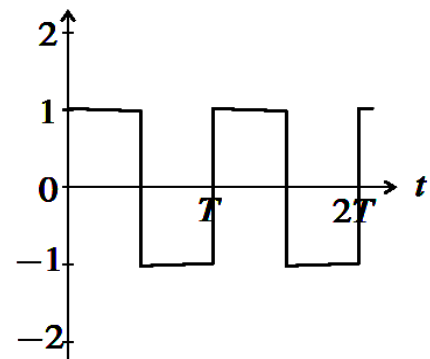
Cas c) : $\omega_0 T = 0,63$

 $s(t)$ (V)

(a)

 $s(t)$ (V)

(b)

 $s(t)$ (V)

(c)

Figure 12.13 – Créneau filtré par un filtre passe-haut du premier ordre : (a) $\omega_0 T = 63$, (b) $\omega_0 T = 1$, (c) $\omega_0 T = 0,063$

Cas c) : Les composantes ne sont pas filtrées, les amplitudes des pics dans le spectre en amplitude de $s(t)$ seront identiques aux amplitudes de $e(t)$: $s(t)$ ressemblera beaucoup à $e(t)$

Cas b) : La composante fondamentale est légèrement filtrée, les harmoniques ne sont pas filtrées, signal de sortie est différents du signal d'entrée.

Cas a) : Toutes les composantes du spectre de $e(t)$ sont filtrées. Le filtre possède un comportement dérivateur pour toutes les fréquences. La sortie est la dérivée de l'entrée.

la dérivée (sortie) est nulle quand $e(t)$ est constante

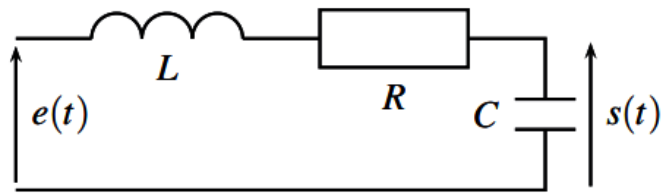
De plus la valeur de $s(t)$ est importante aux niveaux des discontinuités de $e(t)$

III Modèles simples de filtres passifs du deuxième ordre

III.1) Filtre passe-bas du 2^{ème} ordre

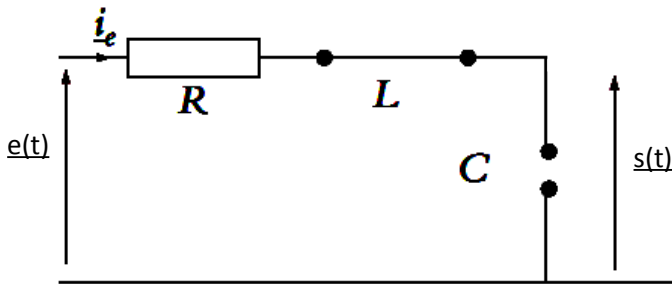
a) Exemple

schéma électrique :



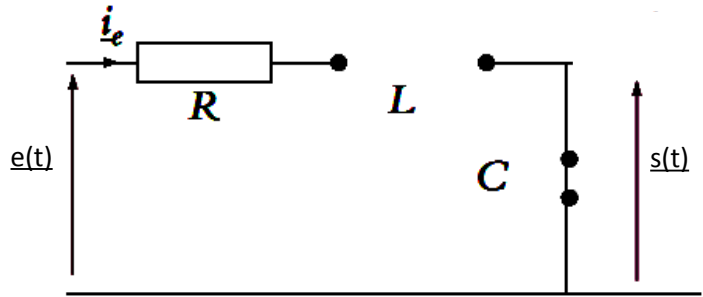
Prévision du comportement :

à TBF



$$\underline{s(t)} = \underline{e(t)}$$

à THF



$$\underline{s(t)} = 0$$

Le filtre est bien un **passe-bas**

Calcul de la fonction de transfert

Pont diviseur de tension $\underline{s} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega} + jL\omega} \underline{e}$ donc $\underline{H} = \frac{1}{jRC\omega - LC\omega^2 + 1}$

(On retrouve les bons comportements limites quand on fait tendre ω vers 0 et vers $+\infty$)

Si on utilise l'expression de la pulsation propre et du facteur de qualité du circuit RLC série : $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

On en déduit que $\frac{1}{\omega_0 Q} = R \sqrt{\frac{C}{L}} \times \sqrt{LC} = RC$ et $LC = \frac{1}{\omega_0^2}$

ainsi $\underline{H} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j \frac{\omega}{Q\omega_0}}$ si on pose $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ on a $\underline{H} = \frac{1}{1 - x^2 + j \frac{x}{Q}}$

vocabulaire à connaître : $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ est la pulsation réduite, elle est sans unité

Rmq : en pratique pour les filtres passe-bas le numérateur n'est pas forcément égale à 1
il faudra retenir la forme canonique du filtre passe-bas du deuxième ordre sous la forme suivante :

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j \frac{\omega}{Q\omega_0}} \quad \text{ou encore} \quad \underline{H} = \frac{H_0}{1 - x^2 + j \frac{x}{Q}} \quad \text{ou} \quad \underline{H} = \frac{-j \frac{Q}{x}}{1 + jQ \left(x - \frac{1}{x}\right)} H_0$$

Remarque (notation) :

Dans le cas des filtres du premier ordre, la pulsation de coupure ω_c à - 3dB est égale à la pulsation propre
alors que dans le cas des filtres du second ordre, la pulsation propre ω_0 n'est pas égale à la pulsation de coupure !!

Comme pour les filtres du premier ordre, si on réalise un circuit différent du circuit R, L, C série et qu'il se comporte en passe-bas, **la forme canonique sera inchangée** mais les expressions de H_0 , ω_0 et Q seront possiblement différentes de celles du circuit R, L, C série.

b) Diagramme de Bode

Si on utilise la variable réduite x :

$$\text{gain en décibels } GdB(\omega) = 20 \log(|H|) = 20 \log \left(\frac{H_0}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}} \right)$$

$$\text{déphasage entre l'entrée et la sortie : } \phi(\omega) = \arg(H) = \arg(H_0) - \arg\left(1 - x^2 + \frac{jx}{Q}\right)$$

Comportements asymptotiques à hautes et basses fréquences pour la courbe de gain en décibels

- à HF $\omega \gg \omega_0$ ($x \gg 1$) $(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2} \approx x^4$ (car $x^2 \gg 1$ donc $x^4 \gg x^2/Q^2$)

ainsi $GdB(x) = 20 \log(|H|) = 20 \log(H_0) - 20 \log(\sqrt{x^4})$

Dans le cas étudié ici $H_0 = 1$ donc $GdB(x) = 20 \log(|H|) = 0 - 20 \log(x^2) = -40 \log(x)$

À HF la courbe de $GdB(x)$ tend asymptotiquement vers une droite de pente -40 dB/décade

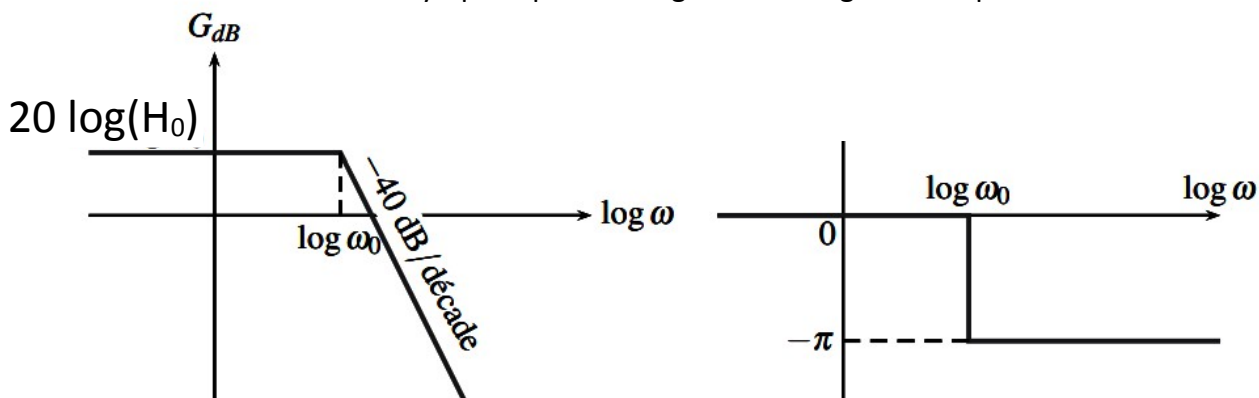
- en basse fréquence $\omega \ll \omega_0$ ($x \ll 1$) $(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2} \approx 1$

$GdB(x) = 20 \log(|H|) = 20 \log(H_0)$ dans le cas étudié ici $H_0 = 1$ donc pour $\omega \ll \omega_0$

À BF la courbe de $GdB(x)$ tend asymptotiquement vers une droite horizontale d'eq $GdB(x)=0$

Pour la phase (démo chapitre RSF résonance en élancement le circuit RLC)

Allures asymptotique des diagrammes en gain et en phase



- Comme pour l'étude de la tension aux bornes du condensateur, on peut établir qu'il y a une résonance

$$\text{si } Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

si $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$ on a toujours $G_{dB}(x) \leq 0$ pour tout ω

L'intérêt d'un filtre passe-bas est **d'atténuer les hautes fréquences** ;

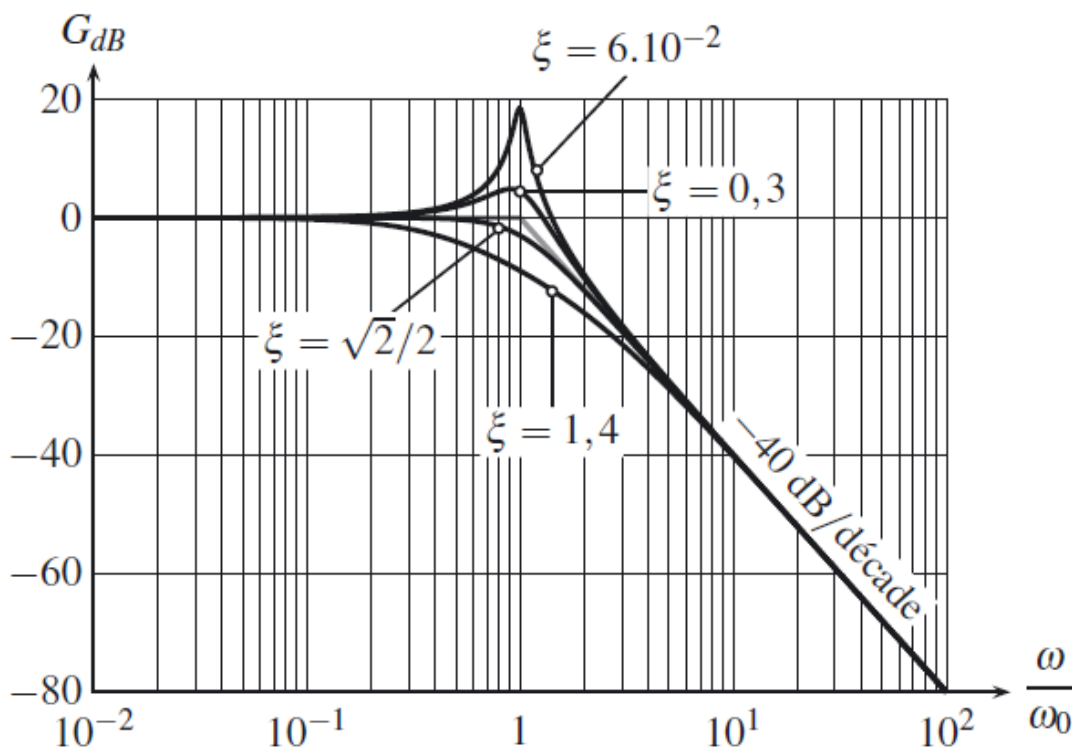
or s'il y a résonance, on voit sur la figure que la courbe réelle **rejoint moins rapidement l'asymptote**.

On s'arrange donc en général pour que le facteur de qualité Q soit inférieur à $1/\sqrt{2}$.

Dans ce cas, **les signaux de hautes fréquences sont mieux atténués** qu'avec un filtre du premier ordre puisque **la pente de l'asymptote est -40 dB/déc au lieu de -20 dB/déc c'est-à-dire que si la fréquence est multipliée par 10, l'amplitude du signal est divisée par 100 pour un passe-bas du deuxième ordre (au lieu de 10 pour un passe-bas du premier ordre)**

- Pas de comportement intégrateur à hautes fréquences (double intégration)*

Allure de la Courbe de gain en dB pour un passe bas du deuxième ordre



c) Bande passante à -3 dB

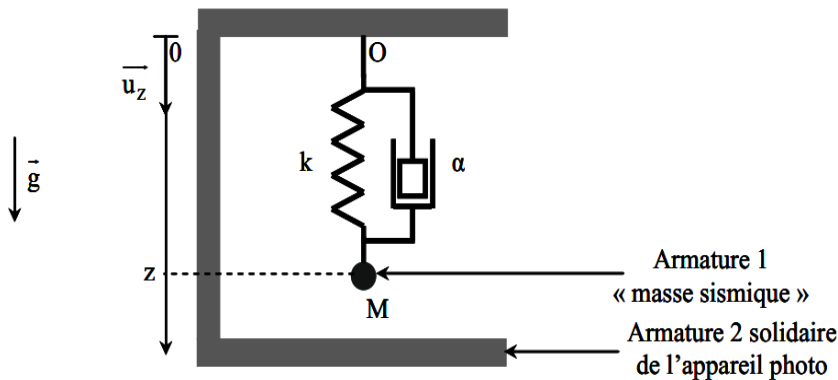
Pour ce filtre comme pour tous les filtres, on peut déterminer la bande passante $\Delta\omega$ à -3 dB comme l'intervalle de pulsation $[\omega_1, \omega_2]$

$$\begin{aligned} \text{Tel que } |H(\omega)| &\geq \frac{|H_{\max}|}{\sqrt{2}} \quad \text{si } \omega \in [\omega_1, \omega_2] \\ \text{ou } G_{dB}(\omega) &\geq G_{dB_{\max}} - 20 \log(\sqrt{2}) \quad \text{soit } G_{dB}(\omega) \geq G_{dB_{\max}} - 3 \text{ dB} \end{aligned}$$

on peut donc chercher sur la courbe l'intervalle de pulsation pour lequel cette condition est vérifiée et déterminer les pulsations qui délimitent la bande passante (voir chapitre précédent)

III.2) Exemple mécanique de filtre passe-bas du 2ème ordre : accéléromètre d'un téléphone

a) Modélisation de l'accéléromètre



L'armature 2 et le point O sont solidaire du téléphone (on lui associe un référentiel R_1)

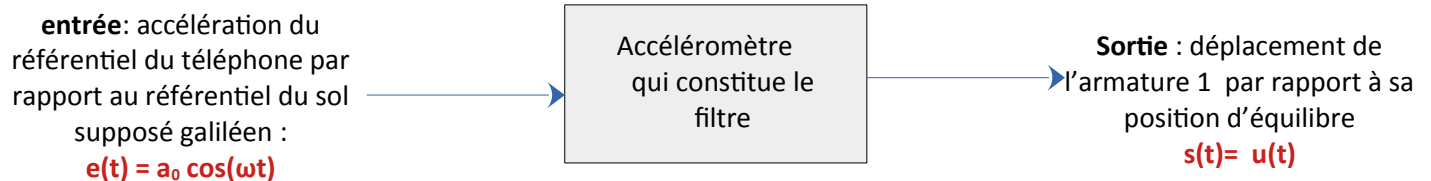
Le point O d'accroche du ressort relié à l'armature 1 subit l'accélération du téléphone par rapport au référentiel du sol R_0 supposé galiléen :

$$\vec{a}_O(t)_{R_0} = \vec{a}_{R_1/R_0} = a_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z$$

Sous l'effet de cette accélération, l'armature 1 va se mettre à osciller et un capteur interne va mesurer le déplacement par rapport à la position d'équilibre $u(t) = z(t) - z_{eq}$ dans le référentiel du téléphone noté R_1

$$z_{eq} = l_0 + \frac{mg}{k}$$

Modélisation de l'accéléromètre sous forme de fonction de transfert :



Rmq : ici les grandeurs en entrée et en sortie n'ont pas la même dimension

$$\text{on a donc } \underline{H}(\omega) = \frac{u(t)}{e(t)} = \frac{u(t)}{a_0 e^{j\omega t}}$$

b) Détermination de la fonction de transfert

- l'accélération du point M dans le référentiel du téléphone est donc $\vec{a}_M(t)_{R_1} = \ddot{u} \vec{u}_z = \ddot{z}(t) \vec{u}_z$

- de même la vitesse de M dans le référentiel du téléphone est $\vec{v}_M(t)_{R_1} = \dot{u}(t) \vec{u}_z = \dot{z}(t) \vec{u}_z$

système étudié : { armature 1 } référentiel : Référentiel du sol (galiléen)

Bilan des forces :

force de frottement fluide $\vec{F}_l = -\alpha \dot{z} \vec{u}_z$, force de rappel $\vec{F} = -(z - l_0) \vec{u}_z$, poids $\vec{P} = mg \vec{u}_z$

Principe fondamental de la dynamique appliqué à l'armature 1 dans le référentiel galiléen R_0 (du sol mais pas du téléphone!).

$$m \vec{a}_M(t)_{R_0} = \vec{F}_l + \vec{F} + \vec{P}$$

or d'après la formule de composition des accélérations $\vec{a}_M(t)_{R_0} = \vec{a}_M(t)_{R_1} + \vec{a}_{R_1/R_0} = \ddot{u} \vec{u}_z + a_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z$

en projetant le PFD sur (Oz) : $m \ddot{u} + m a_0 \cos(\omega t) = -k(z(t) - z_{eq}) - \alpha \dot{u}(t)$

$$\ddot{u} + \frac{k}{m} u(t) + \frac{\alpha}{m} \dot{u}(t) = -a_0 \cos(\omega t)$$

soit

$$\ddot{u} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = -a_0 \cos(\omega t)$$

(Le système étudié est bien linéaire car l'entrée et la sortie sont reliées par une équation différentielle linéaire)

Comme l'entrée est sinusoïdale, on peut passer aux notation complexes :

$$\underline{u}(\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega \frac{\omega_0}{Q}) = -a_0 e^{j\omega t} \Rightarrow \underline{H}(\omega) = \frac{-1}{\omega_0^2} \frac{1}{1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2 + j \frac{1}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}}$$

Conséquence :

Pour que l'accéléromètre se comporte correctement

(c-a-d $u(t)$ proportionnel à l'accélération $a_0(t)$ et indépendant de la fréquence d'excitation)

il faut que la pulsation de l'accélération soit dans la bande passante de l'accéléromètre.

Ainsi, **il vaut mieux que la pulsation de coupure ω_0 soit élevée pour que accéléromètre se comporte correctement pour une large gamme de fréquences**

pour $\omega \gg \omega_0$ l'amplitude de $u(t)$ est faible car la sortie est atténuée à HF pour un filtre passe-bas



Small, Low Power, 3-Axis $\pm 3g$ iMEMS® Accelerometer

ADXL330

FEATURES

3-axis sensing

Small, low-profile package

4 mm × 4 mm × 1.45 mm LFCSP

Low power

180 μA at $V_s = 1.8 V$ (typical)

Single-supply operation

1.8 V to 3.6 V

10,000 g shock survival

Excellent temperature stability

BW adjustment with a single capacitor per axis

RoHS/WEEE lead-free compliant

APPLICATIONS

Cost-sensitive, low power, motion- and tilt-sensing applications

Mobile devices

Gaming systems

Disk drive protection

Image stabilization

Sports and health devices

GENERAL DESCRIPTION

The ADXL330 is a small, thin, low power, complete 3-axis accelerometer with signal conditioned voltage outputs, all on a single monolithic IC. The product measures acceleration with a minimum full-scale range of $\pm 3g$. It can measure the static acceleration of gravity in tilt-sensing applications, as well as dynamic acceleration resulting from motion, shock, or vibration.

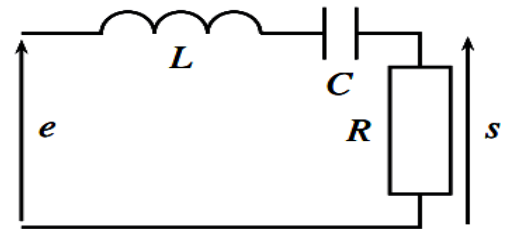
The user selects the bandwidth of the accelerometer using the C_x , C_y , and C_z capacitors at the X_{OUT} , Y_{OUT} , and Z_{OUT} pins. Bandwidths can be selected to suit the application, with a range of 0.5 Hz to 1600 Hz for X and Y axes, and a range of 0.5 Hz to 550 Hz for the Z axis.

Bande passante

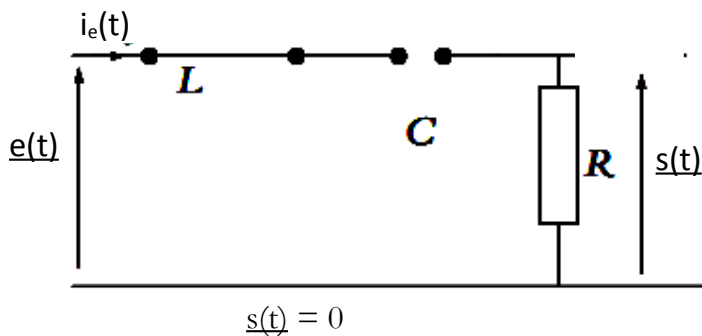
The ADXL330 is available in a small, low profile, 4 mm × 4 mm × 1.45 mm, 16-lead, plastic lead frame chip scale package (LFCSP_LQ).

III.3) Passe-bande du deuxième ordre (à connaître)

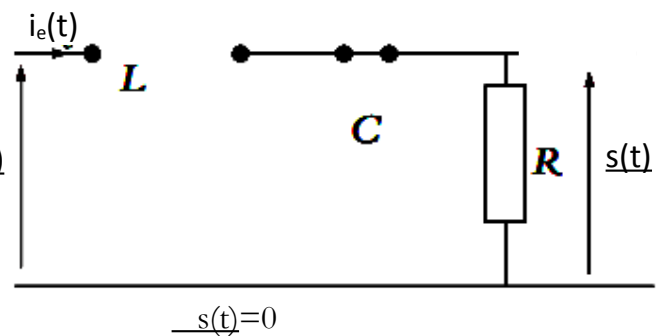
a) exemple



Prévision du comportement
à TBF ($\omega \rightarrow 0$)



à THF ($\omega \rightarrow \infty$)



Un passe-bande atténue fortement le signal à très haute et très basse fréquence mais peu (ou pas) sur une bande passante centrée sur la fréquence propre du circuit RLC

fonction de transfert (à savoir retrouver)

Pont diviseur de tension complexe :
$$\underline{s} = \frac{R}{R + \frac{1}{jC\omega} + jL\omega} \underline{e} \quad \underline{H} = \frac{1}{1 + j\left(\frac{L}{R}\omega - \frac{1}{RC\omega}\right)}$$

On retrouve les bons comportements limites quand on fait tendre ω vers 0 et vers $+\infty$

Si on utilise l'expression de la pulsation propre et du facteur de qualité du circuit RLC série : $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$ b On en déduit que $\omega_0 Q = \frac{1}{RC}$ et $\frac{L}{R} = \frac{Q}{\omega_0}$
ainsi

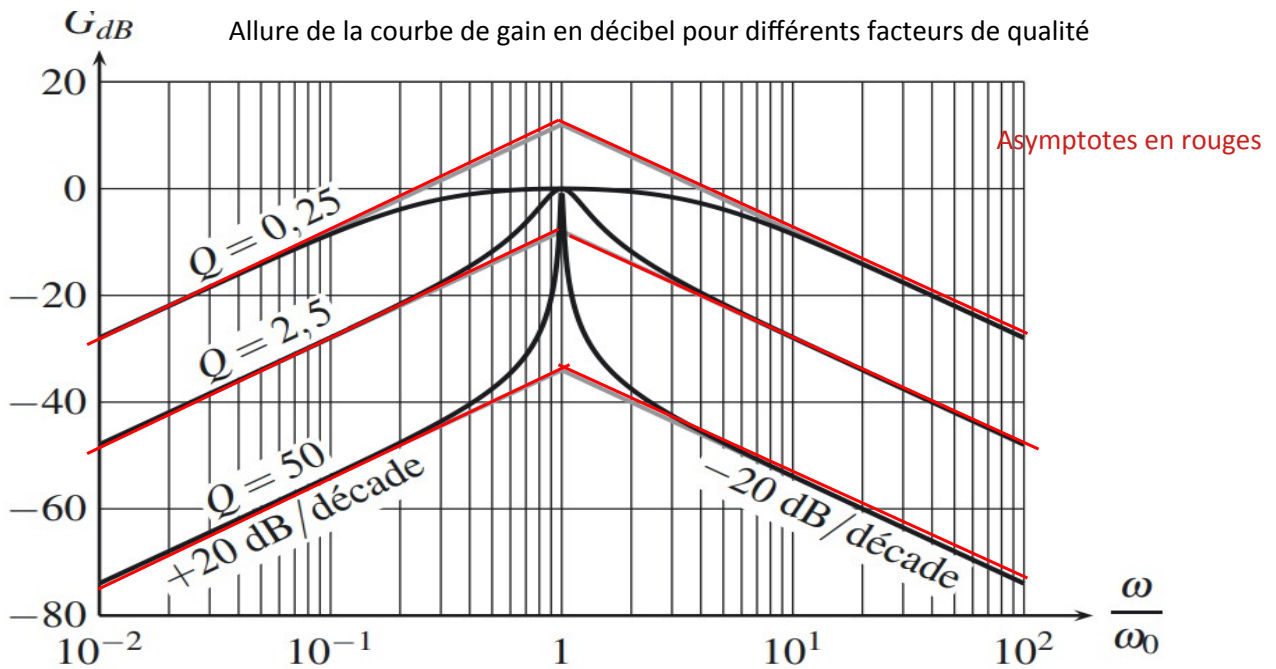
$$\underline{H} = \frac{1}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} \quad \text{si on pose } x = \frac{\omega}{\omega_0} \quad \underline{H} = \frac{1}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}$$

À savoir
retrouver

forme canonique générale de la fonction de transfert :

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)} \quad \text{ou encore} \quad \underline{H} = \frac{j \frac{x}{Q} H_0}{1 - x^2 + j \frac{x}{Q}} \quad \text{avec } H_0 \text{ une constante}$$

b) Diagramme de Bode

Gain en décibelJustification des asymptotes

en BF $\underline{H} = \frac{H_0}{1+jQ(x-\frac{1}{x})} \approx \frac{H_0}{jQx} \Rightarrow GdB(x) = 20 \log(H_0 \frac{x}{Q}) = 20 \log(\frac{H_0}{Q}) + 20 \log(x)$

(la courbe réelle du gain en décibels tend asymptotiquement vers une droite de pente +20 dB/décade à BF)

en HF $\underline{H} = \frac{H_0}{1+jQ(x-\frac{1}{x})} \approx \frac{H_0}{jQx} \Rightarrow GdB(x) = 20 \log(\frac{H_0}{Qx}) = 20 \log(\frac{H_0}{Q}) - 20 \log(x)$

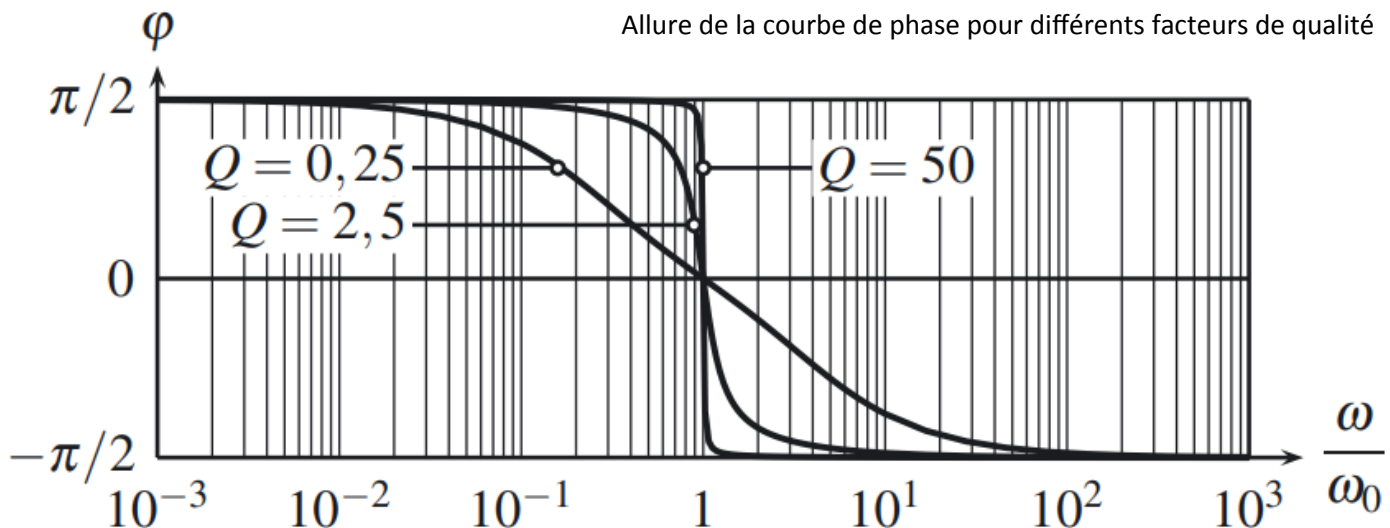
(la courbe réelle tend asymptotiquement vers une droite de pente -20 dB/décade à HF)

On peut aussi remarquer que les asymptotes se croisent en $\omega = \omega_0$



Pour le déphase $\varphi(\omega)$ entre l'entrée et la sortie, voir résonance en intensité du chap 10

Allure de la courbe de phase pour différents facteurs de qualité



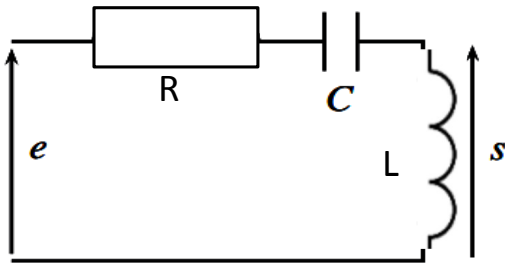
c) Bande passante à - 3dB

On a déjà déterminé dans le chapitre précédent la bande passante dans ce cas (**résonance en intensité**)
 $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$ donc la bande passante est l'intervalle centrée sur ω_0 : $[\omega_0 - \frac{\omega_0}{2Q}, \omega_0 + \frac{\omega_0}{2Q}]$

Rmq : quand **Q est important**, l'atténuation est faible sur une bande passante **étroite** (résonance aiguë),
on parle alors de filtre sélectif, il peut supprimer les hautes et les basses fréquences autour de la fréquence propre.

III.4) Filtre passe-haut du deuxième ordre

a) Exemple électrique



Fonction de transfert

$$H = \frac{-x^2}{1-x^2+j\frac{x}{Q}} H_0$$

$$H = \frac{jQx}{1+jQ\left(x-\frac{1}{x}\right)} H_0$$

Diagramme de Bode en Gain

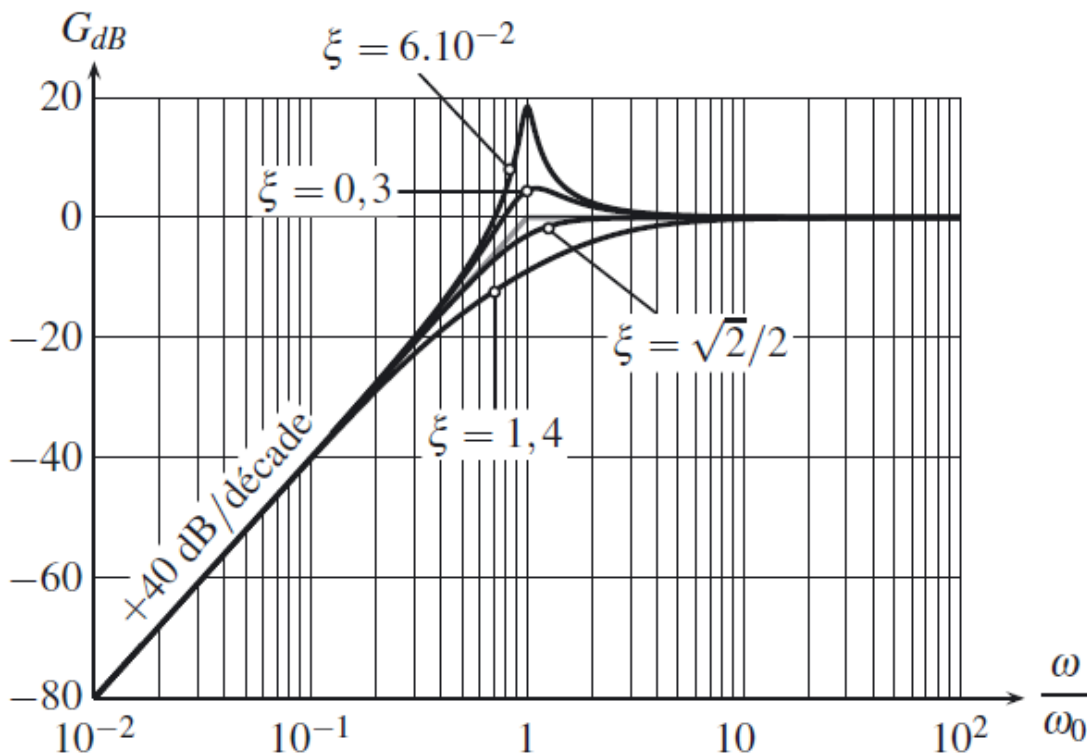
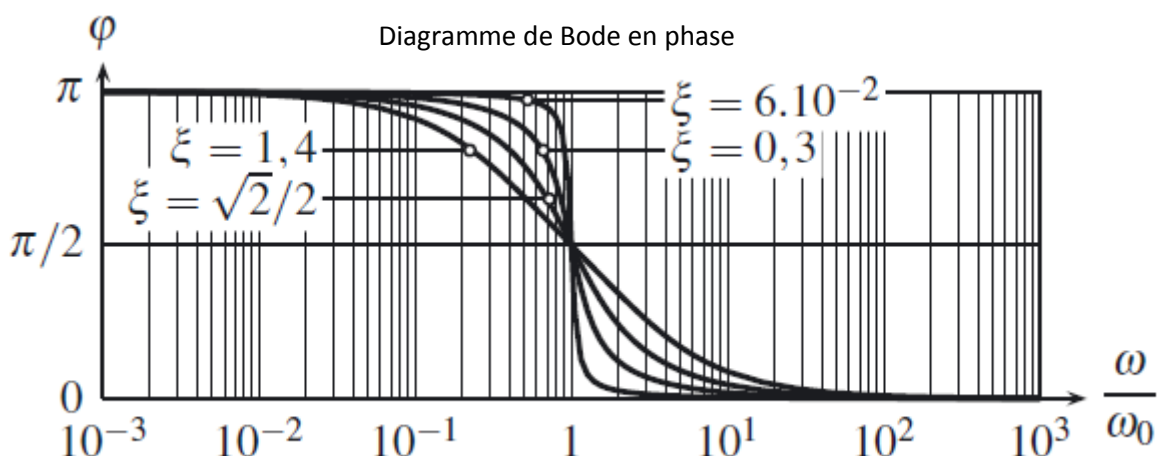
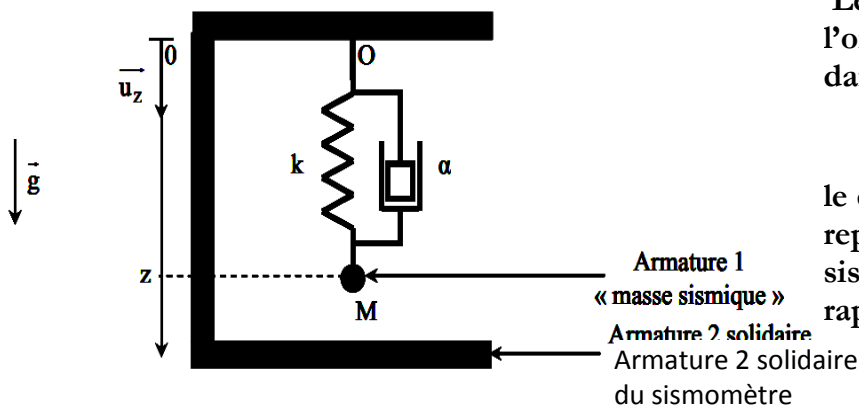


Diagramme de Bode en phase



b) exemple mécanique : le sismomètre

système étudié : Même système mécanique qu'au III.2 (mêmes forces en présence)



Le séisme provoque le déplacement de l'origine O du référentiel du sismomètre R_1 dans le référentiel du sol R_0 :

$$Z_O(t)_{R_0} = Z_0 \cos(\omega t)$$

le déplacement sinusoïdal de l'origine du repère entraîne le mouvement de la « masse sismique » dans le réf R_1 du sismomètre par rapport à sa position d'équilibre

entrée: déplacement sinusoïdal $Z_0(t)$ de l'origine du référentiel du sismomètre par rapport au référentiel du sol galiléen

sismomètre
qui constitue le
filtre

Sortie : déplacement de l'armature 1 par rapport à sa position d'équilibre dans le référentiel du sismomètre

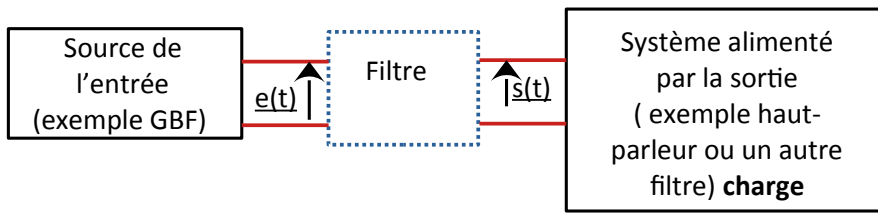
$$s(t) = u(t)$$

(remarque : par rapport au cas du 3.2 $\vec{a}_O(t)_{R_0} = \vec{a}_{R_1/R_0} = \ddot{Z}_0(t) \vec{e}_z = -\omega^2 Z_0(t) \vec{e}_z$ $\underline{H}(\omega) = \frac{s(t)}{Z_0(t)}$

III.5) Influence de l'environnement du filtre sur la fonction de transfert

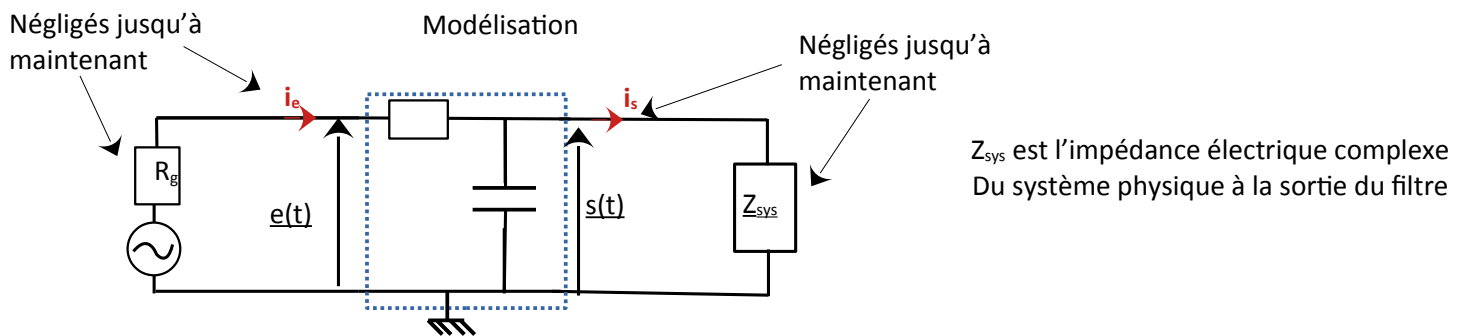
a) Validité des calculs effectués

Jusqu'à maintenant on a négligé l'environnement du filtre :



Rmq voc

4 fils « partent » du filtre
(deux en entrée et deux en sortie)
Le filtre est donc un **quadripôles**



Le pont diviseur de tension pour trouver la fonction de transfert n'est en réalité pas applicable ! (les dipôles du filtre ne sont en réalité pas en série)

Problématique : Dans quels cas les calculs effectués jusqu'à maintenant sont applicables ?

b) Impédance d'entrée et de sortie du filtre

Pour caractériser le comportement du filtre vis à vis du reste du circuit (**indépendamment de sa structure réelle, qui peut être inconnue**) on peut **modéliser** :

- Ses bornes d'entrée comme un dipôle passif d'impédance Z_e , appelée **impédance d'entrée** telle que $e(t) = Z_e i_e$

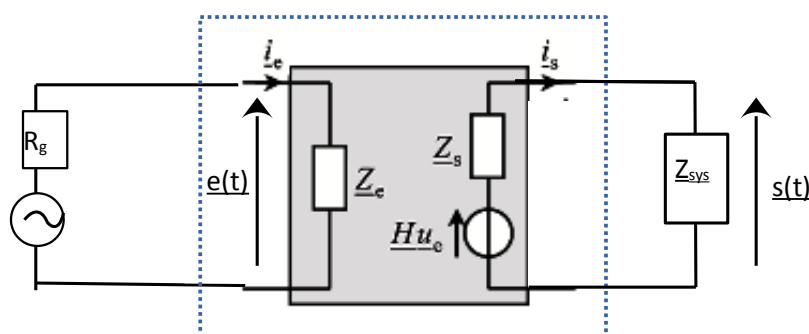
- Ses bornes de sortie comme un générateur idéal de $F_{em} = H x u_e$ en série avec une **impédance de sortie** Z_s

Rmq importante :

pour la F_{em} , H est déterminée **sans prendre en compte ce qui est relié à la suite du filtre**.
cela correspond à $i_s = 0$ et c'est ce que nous avons fait jusqu'à maintenant.

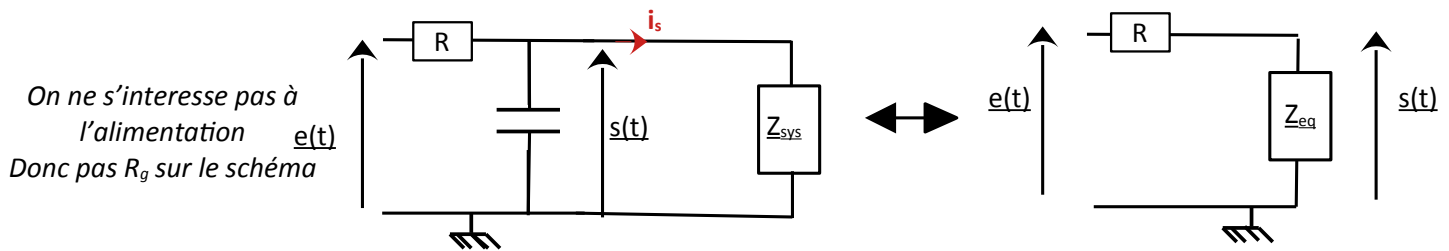
Voc : on dit dans ce que cas H est la fonction de transfert en boucle ouverte)

Modélisation du filtre en prenant en compte les impédances de sortie et d'entrée :



Rmq : l'entrée est considérée en convention récepteur et la sortie en convention générateur

c) Expression de $\frac{s}{e}$ en fonction Z_s et Z_{sys} et de \underline{H} (fonction de transfert en boucle ouverte)



On considérant une impédance équivalente $Z_{eq} = \frac{Z_c \times Z_{sys}}{Z_c + Z_{sys}}$ sur le premier schéma

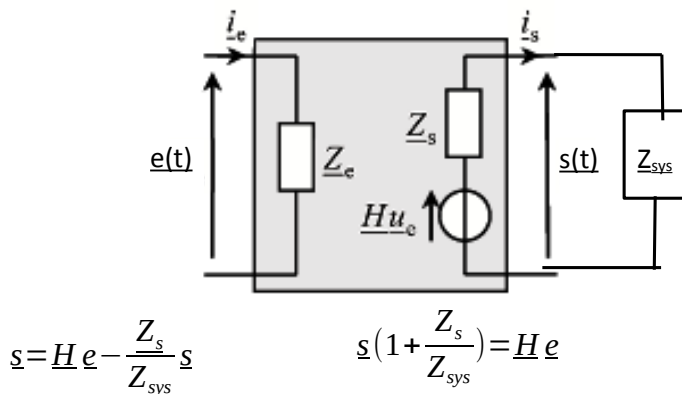
on a alors en utilisant le pont diviseur de tension

$$\frac{s(t)}{e(t)} = \frac{\frac{Z_{sys} \times Z_c}{Z_c + Z_{sys}}}{R + \frac{Z_c \times Z_{sys}}{Z_c + Z_{sys}}}$$

c'est différent de la fonction de transfert en boucle ouverte !

Rmq : On retrouve la fonction de transfert en boucle ouverte si $Z_{sys} \gg Z_c$

Modélisation prenant en compte l'impédance de sortie :



Relation tension courant en complexe pour le dipôle en aval du filtre (d'impédance Z_{sys})

$s = \underline{H} e - \underline{Z}_s i_s$

Convention générateur en sortie

si $i_s = 0$ $\underline{H} = \frac{Z_c}{Z_c + Z_R}$ *Fonction de transfert en boucle ouverte*

$$s = \underline{H} e - \frac{Z_s}{Z_{sys}} s$$

$$s \left(1 + \frac{Z_s}{Z_{sys}}\right) = \underline{H} e$$

$$\frac{s}{e} = \left(1 + \frac{Z_s}{Z_{sys}}\right) \underline{H} = \underline{H} \frac{Z_{sys}}{Z_s + Z_{sys}}$$

si on veut retrouver la fonction de transfert \underline{H} il faut que l'impédance de sortie du filtre soit très faible devant les autres impédances en présence (notamment Z_{sys})

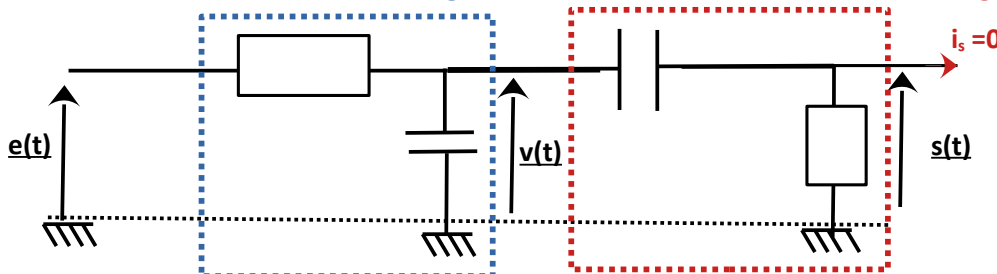
Pour que cela fonctionne pour n'importe quelle valeur de Z_{sys} il faut que le module de l'impédance de sortie Z_s soit très faible (tend vers 0)

d) Mises en cascades de filtres

Q : Si on place un autre filtre derrière le premier quelle-est la fonction de transfert totale \underline{H}_{tot} ?

Filtre 1 de fonction de transfert $\underline{H}_1(\omega)$ en l'absence de charge

Filtre 2 de fonction de transfert $\underline{H}_2(\omega)$ en l'absence de charge



On aimerait avoir : $\underline{H}_{tot}(\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{\underline{s}}{\underline{v}} \times \frac{\underline{v}}{\underline{e}} = \underline{H}_2(\omega) \times \underline{H}_1(\omega)$

Si on considère que l'impédance de sortie du deuxième filtre est nulle, on peut relier \underline{s} à \underline{v}

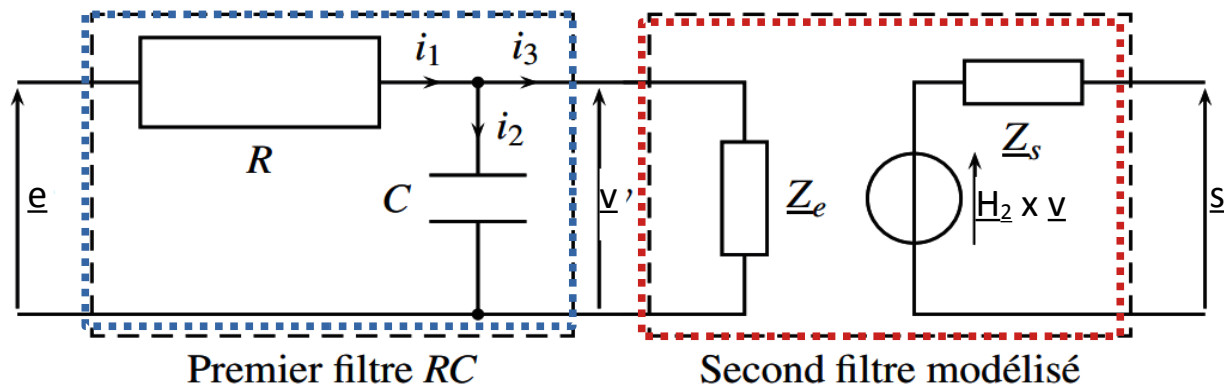
En utilisant un pont diviseur de tension :

$$\underline{s} = \frac{R}{R + \frac{1}{jC\omega}} \underline{v}$$

On ne peut pas utiliser directement la formule du pdt pour relier $\underline{v}(t)$ à $\underline{e}(t)$ car les dipôles considérés ne sont pas en série !!

Pb : Dans quel cas est-ce possible ?

on peut modéliser le deuxième filtre par son impédance d'entrée :



$$\underline{Z}_e = R + \frac{1}{jC\omega}$$

Pour pouvoir négliger la présence du deuxième filtre il faudrait que i_3 soit nulle

Or par définition de l'impédance d'entrée du second filtre, $\underline{v} = \underline{Z}_e i_3$,

donc i_3 tend vers 0 si \underline{Z}_e devient infinie.

À cette condition, le second filtre ne charge plus le premier.

À retenir : pour pouvoir négliger l'action du deuxième filtre sur le premier filtre, il faut que l'impédance d'entrée du deuxième filtre tende vers + l'infini

on peut alors appliquer la formule du pont diviseur de tension pour le premier filtre :

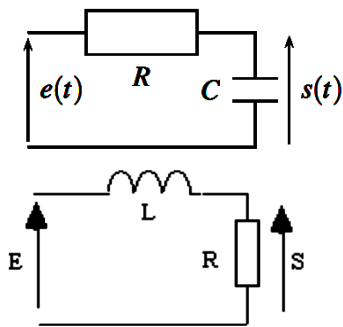
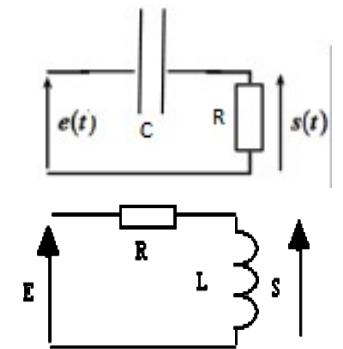
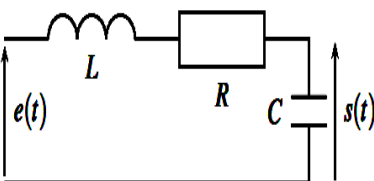
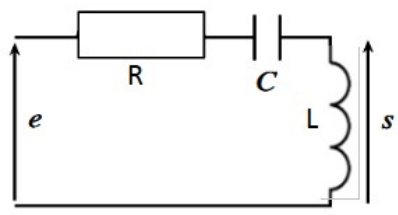
$$\underline{v} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}} \underline{e} \Rightarrow \frac{\underline{v}}{\underline{e}} = \underline{H}_1(\omega)$$

De plus si $\underline{Z}_s = 0$ alors $\underline{s}(t) = \underline{H}_2(\omega) \times \underline{v}$ (loi des mailles sur la sortie)

finalement avec ces conditions : $\frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{\underline{s}}{\underline{v}} \times \frac{\underline{v}}{\underline{e}} = \underline{H}_2(\omega) \times \underline{H}_1(\omega)$

À retenir : La fonction de transfert d'une mise en cascade de filtres d'impédances d'entrées très grandes, voire infinies, et d'impédances de sorties très faibles, voire nulles, est le produit des fonctions de transfert de chaque filtre.

Bilan

Nature du filtre	Fonction de transfert sous forme canonique	Exemple de filtre simple
Filtre passe-bas 1 ^{er} ordre	$\underline{H} = \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}} H_0$	
Filtre passe-haut 1 ^{er} ordre	$\underline{H} = \frac{j \frac{\omega}{\omega_c}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}} H_0$	
Filtre passe-bas 2 ^{ème} ordre	$\underline{H} = \frac{1}{1 - x^2 + j \frac{x}{Q}} H_0$ $\underline{H} = \frac{-j \frac{Q}{x}}{1 + jQ \left(x - \frac{1}{x} \right)} H_0$	
Filtre passe-haut 2 ^{ème} ordre	$\underline{H} = \frac{-x^2}{1 - x^2 + j \frac{x}{Q}} H_0$ $\underline{H} = \frac{jQx}{1 + jQ \left(x - \frac{1}{x} \right)} H_0$	
Filtre passe-bande 2 ^{ème} ordre	$\underline{H} = \frac{jx}{Q} H_0$ $\underline{H} = \frac{1}{1 + jQ \left(x - \frac{1}{x} \right)} H_0$	