CHAP 11 : FILTRAGE LINÉAIRE

Rapports de Jury :

-Pour tracer un diagramme de Bode (comportement fréquentiel), il est important que le signal d'entrée soit un signal sinusoïdal et de vérifier que ce signal reste sinusoïdal et de même fréquence en sortie (on se limite à l'étude de systèmes linéaires). Certains candidats ne semblent pas en connaître la raison.

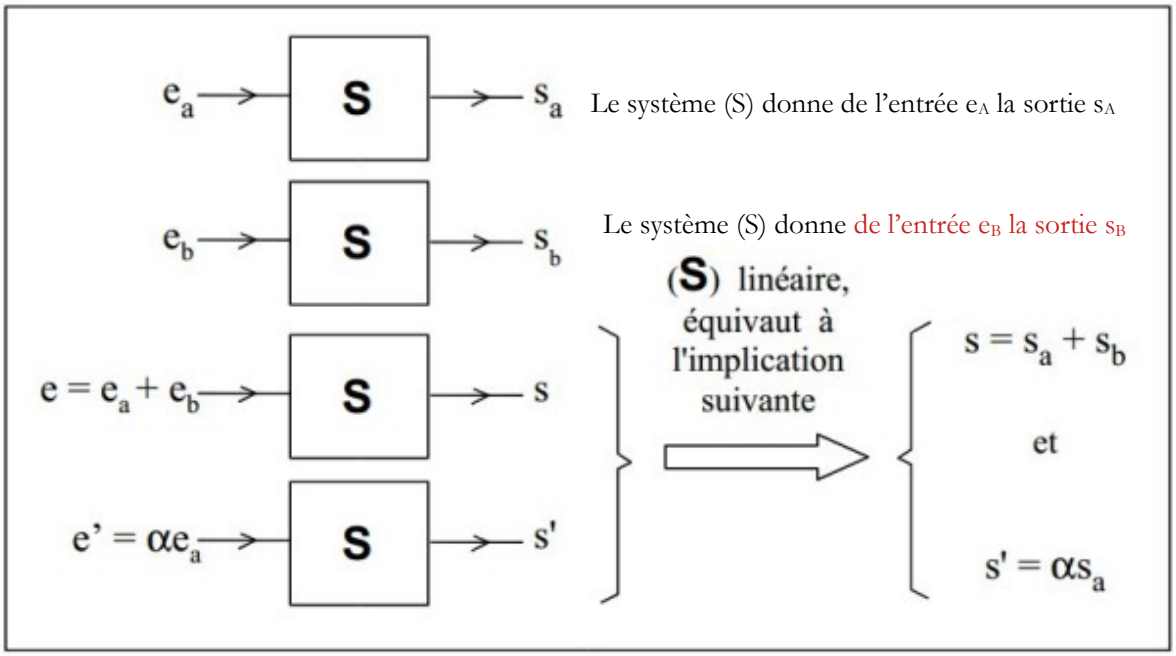
-La notion de bande-passante est mal maitrisée. Pour un filtre passe-bas, par exemple, la bande-passante va de 0 à la fréquence de coupure identifiée à −3 dB par rapport au gain en basse fréquence, et non depuis la borne moins l'infini.

-Le gain en décibels d'un système linéaire correspond au logarithme du module de la fonction de transfert (ou du rapport de l'amplitude du signal de sortie sur l'amplitude du signal d'entrée) multiplié par 20.

-La détermination de la fréquence de coupure à −3 dB est souvent mal interprétée par les candidats. Il s'agit de la fréquence telle que le gain en décibels (défini précédemment) vaut le gain en décibels max dans la bande-passante diminuée de 3 dB. En amplitude, il s'agit de trouver la fréquence telle que le gain (rapport de l'amplitude du signal de sortie sur l'amplitude du signal d'entrée) a été diminué d'un facteur racine de deux par rapport au gain max dans la bande-passante.

I étude de la réponse d'un système linéaire à un signal périodique

I.1) Notion de système linéaire



(S) est un système linéaire si :

Pour une entrée combinaison linéaire de deux entrées, $\mathbf{e(t) = \alpha e_a(t) + \beta e_B(t)}$

alors la sortie est la combinaison linéaire des deux réponses : $s(t) = \alpha s_A(t) + \beta s_B(t)$

I.2) Notion de spectre et décomposition spectral

Rappel : Le signal s(t) est dit périodique de période T si il se reproduit à l'identique après une durée minimale T : c'est à dire que $\mathbf{s(t+T) = s(t)}$

a) Notion de décomposition spectrale d'un signal

Au 19 ème siècle, Joseph Fourier montre que tout signal périodique s(t) **peut être décomposé en une somme de signaux sinusoïdaux :**

si s(t) est périodique alors $\exists (s_i, f_i, \phi_i) \in \Re^3 \, tq :$ $\quad s(t) = \sum_{i=0}^{\infty} s_i \cos(2\pi f_i t + \phi_i)$

Ou plus précisément :

$$s(t)=S_0+\underbrace{S_1\cos(2\pi f_1 t+\phi_1)}_{\text{Composante fondamentale}}+\sum_{n=2}^{\infty}\overbrace{S_n\cos(2\pi f_n t+\phi_n)}^{\text{N}^{\text{ième}}\text{ composante harmonique}}$$

Composante continue (« offset »)

Fréquence fondamentale telle que $f_1=\frac{1}{T}$ (T est la période du signal)

N^{ième} fréquence harmonique telle que $f_n=nf_1=n\frac{1}{T}$

$f_2 = 2 f_1$, $f_3 = 3 f_1$ etc...

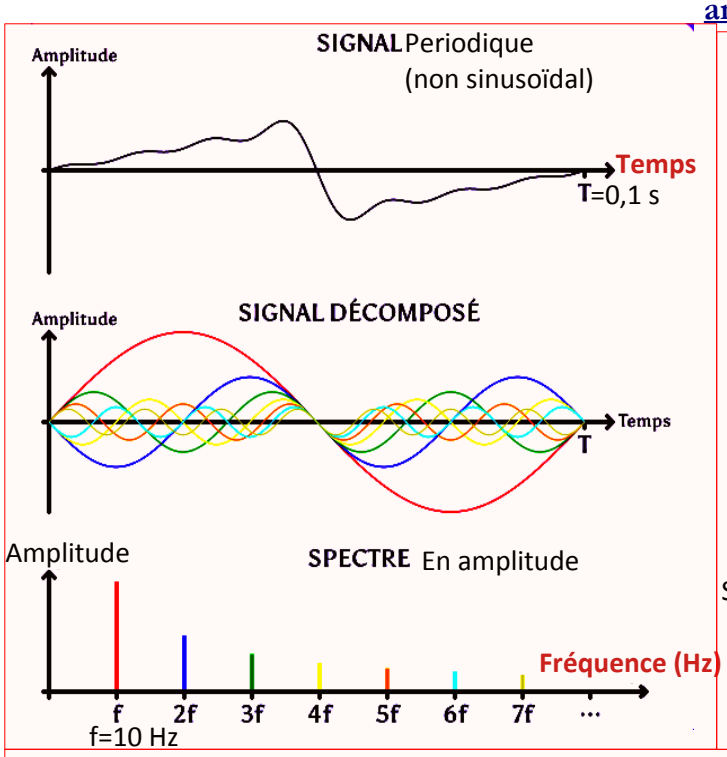
Voc : Cette écriture de s(t) constitue la décomposition spectrale de s(t)

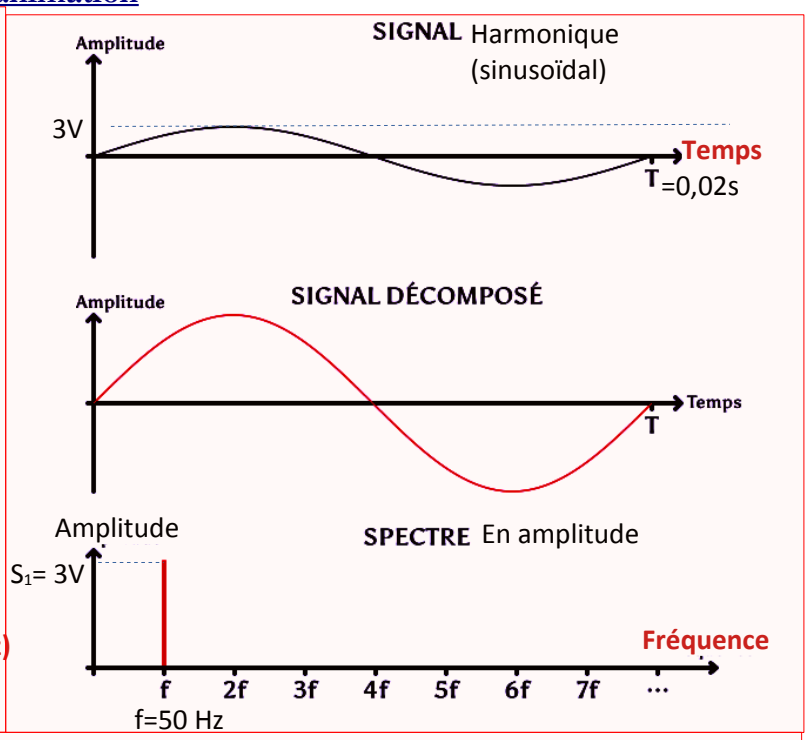
b) Notion de spectre

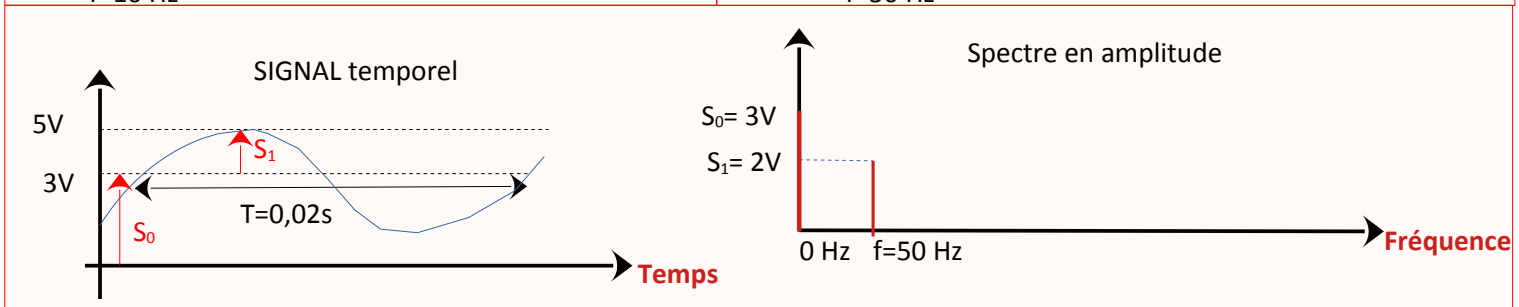
L 'étude spectrale du signal s(t) (ou établir le spectre de s(t)), consiste à :

- Donner la liste des fréquences f_i des composantes qui possèdent une amplitude S_i non nulle (les f_i sont les abscisses des « pics »» dans le spectre)
-Donner la valeurs des amplitudes S_i de la fondamentale et des éventuels harmoniques ou de la composante continue (hauteur des pics sur le spectre d'amplitude)
- Donner les valeurs des phases ϕ_i (hauteur des pics sur le spectre de phase que l'on représente rarement en pratique)

animation







Rmq : Si le signal possède une composante continue, le spectre en amplitude possède un pic à 0Hz de hauteur S_0

c) Valeur moyenne (composante continue)

S_0 est la valeur moyenne du signal (ou composante continue). Le signal oscille autour de cette valeur

$$S_0 = \langle s(t) \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T s(t)\,dt$$

Rmq voc : <S(t) > veut dire valeur moyenne du signal s(t) .

<A cos(ωt+ α) > = 0

$$\langle s(t) \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T A\cos(\omega t+\alpha)\,dt = \frac{1}{T}(\text{Aire algbérique sous la courbe})$$

Rmq : De façon qualitative la valeur moyenne est l'aire algébrique sous la courbe divisé par T

d) valeur efficace d'un signal

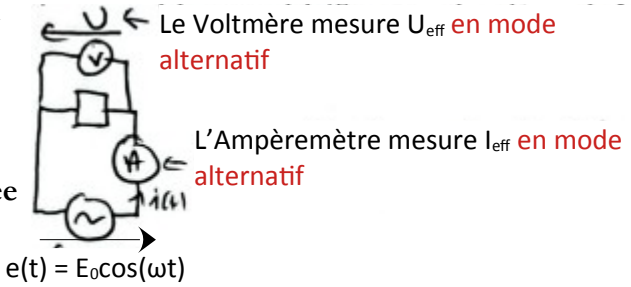
Pour un signal périodique s(t) la valeur efficace de ce signal est :

$$S_{eff} = \sqrt{\langle s(t)^2 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T s(t)^2\,dt}$$

$$S_{eff} \neq \sqrt{(\langle s(t) \rangle)^2}$$

Le carré de la moyenne n'est pas la moyenne du carrée !

Intérêt : Quand on utilise un multimètre pour mesure une tension alternative (c'est à dire périodique) ou une intensité alternative, la valeur affichée est la grandeur efficace associée à la tension ou à l'intensité.



Elle intervient dans le calcul de la puissance moyenne dissipée par une résistance quand les grandeurs électriques sont alternatives

$$\langle P(t) \rangle = \langle R\,i(t)^2 \rangle = R\langle i(t)^2 \rangle R\,I_{eff}^2$$

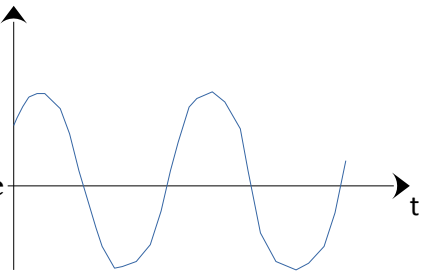
$$\langle P(t) \rangle = \langle \frac{U(t)^2}{R} \rangle = \frac{\langle U(t)^2 \rangle}{R} = \frac{U_{eff}^2}{R}$$

Rmq : quand on dit que la valeur de la tension délivrée par EDF est de 230 V, on parle de la tension efficace en réalité…

Valeur efficace d'un signal sinusoïdal pur : s(t) = S_1 cos(2 π f t + ϕ)

calculons <s(t)²> = <$S_1{}^2$ cos²(2 π f t + ϕ)> or cos²(2 π f t + ϕ) = 1/2(1+ cos(4π f t + ϕ))

$$\langle s(t)^2 \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{S_1{}^2}{2}(1+\cos(4\pi f t+\phi))\,dt$$



Or $\int_0^T \cos(4\pi f t+\phi)\,dt = 0$ **car sur une période la moyenne du cos est nulle**

$$\langle s(t)^2 \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{S_1{}^2}{2}\,dt \quad \text{soit} \quad \langle s(t)^2 \rangle = \frac{S_1{}^2}{2} \quad \text{et finalement} \quad \boxed{S_{eff} = \frac{S_1}{\sqrt{2}}}$$

e) Relation de Parseval

La puissance moyenne du signal *s(t)* est proportionnelle au carré de sa valeur efficace. Or, chaque harmonique transporte également une puissance proportionnelle à sa valeur efficace. La relation de Parseval exprime simplement le fait que la puissance du signal est égale à la somme des puissances transportées par les différents harmoniques, ce qui en terme de valeurs efficace se **traduit**

$$S_{eff}^2 = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{S_i^2}{2}$$

I.3) Fonction de Transfert

a) Def

soit un signal périodique en entrée e(t) auquel on associe un signal complexe $\underline{e}(\omega)$
soit le signal périodique en sortie s(t) auquel on associe le signal complexe $\underline{s}(\omega)$

On définit la fonction de transfert du filtre par la relation

$$\underline{H}(\omega)=\frac{\underline{s}}{\underline{e}}$$

b) Cas d'un entrée sinusoïdal

Ici S_0 n'est pas la composante continue mais l'amplitude du signal (l'équivalent de S_1 de la partie précédente)

si l'entrée est sinusoïdale e(t) = E_0 cos(ωt + ϕ_i) alors $\underline{e}(\omega)=E_0\exp(j(\omega t+\phi_i))$

en sortie du filtre la tension est s(t) = S_0 cos(ωt+ ϕ_s) alors $\underline{S}(\omega)=S_0\exp(j(\omega t+\phi_s))=S_0 e^{j(\omega t+\phi_s)}=\underline{S_0}e^{j\omega t}$

Les deux notations sont utilisées en fonction des exercices

On peut faire le lien entre les amplitudes , les phases et la fonction de transfert en effet

$$\underline{H}(\omega)=\frac{\underline{s}}{\underline{e}}=\frac{S_0\exp(j(\omega t+\phi_s))}{E_0\exp(j(\omega t+\phi_i))}=\frac{S_0}{E_0}\exp(j(\phi_S-\phi_i))$$

On a donc

$$G(\omega)=|\underline{H}(\omega)|=\frac{S_0}{E_0}$$

Le module de la fonction de transfert est le l'amplitude de la sortie sur l'amplitude de l'entrée
Voc : Le module de la fonction de transfert s'appelle **le Gain du filtre**

$$arg(\underline{H}(\omega))=\phi_S-\phi_i$$

C'est le déphasage de la sortie par rapport à l'entrée.
Rmq : Souvent $\phi_i=0$ et $\phi_s=arg(\underline{H})$

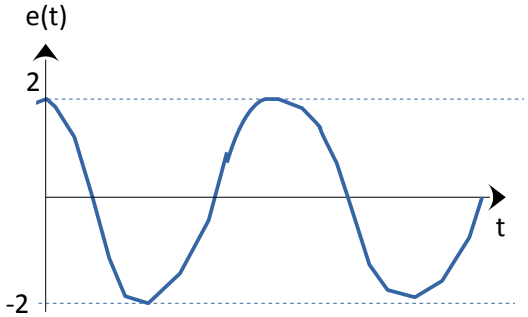
Rmq souvent on note $\phi(\omega)=arg(\underline{H}(\omega))$

La sortie sera alors s(t) = $|\underline{H}(\omega)|E_0\cos(\omega t+\phi(\omega)+\phi_i)$

Exemple : $e(t)=2\cos(\frac{2\pi}{T})$ **(ici pas de composante continue) on pose** $f_1=\frac{1}{T}$ **et** $\omega_1=\frac{2\pi}{T}$

on envoie e(t) sur un filtre de fonction de transfert $\underline{H}(\omega)$ **telle que** $\underline{H}(\omega_1)=0{,}5$ **et** $arg(\underline{H}(\omega_1))=\frac{-\pi}{2}$

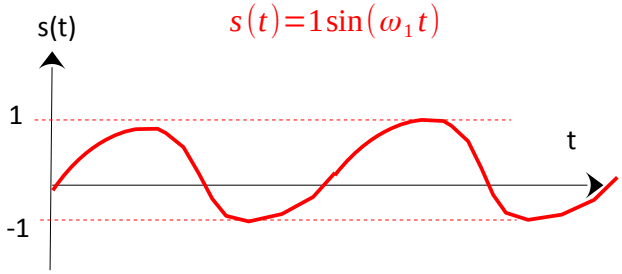
Allure temporelle de l'entrée



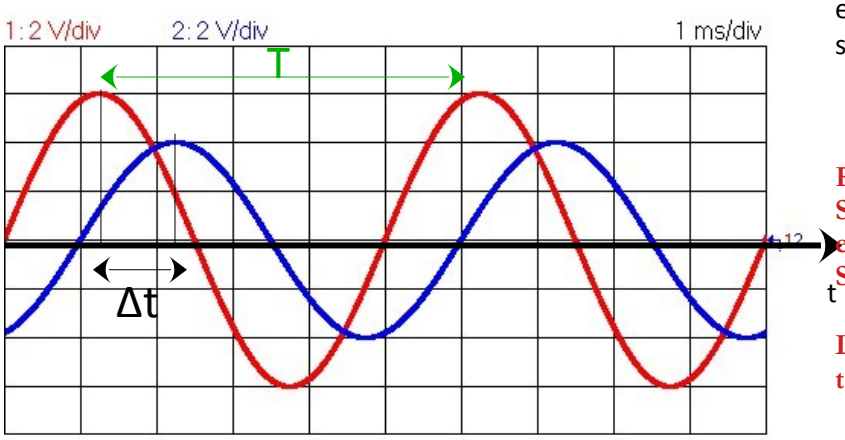
Allure temporelle de la sortie

$$s(t)=\underline{H}(\omega_1)E_0\cos(\omega_1 t+\phi(\omega-1))=0{,}5\times 2\cos(\omega_1 t-\frac{\pi}{2})$$

$$s(t)=1\sin(\omega_1 t)$$



c) Lien entre le déphasage et le décalage temporel



$e(t) = E_0 \cos(\omega t+\phi_i)$
$s(t) = S_0 \cos(\omega t+\phi_i + \Delta\phi)$

On mesure Δt la durée entre les instants où s(t) et e(t) atteignent leurs max

Rmq :
Si s(t) atteint son max plus tard, alors Δt>0 et Δφ >0 (s(t) est en retard sur e(t))
Sinon, s(t) est en avance sur e(t)

Le déphasage Δφ est relié au décalage temporel Δt et à la période T par la relation :

$$|\Delta\phi| = 2\pi\frac{\Delta t}{T}$$

d) Cas d'un superposition de deux signaux sinusoïdaux avec valeur moyenne

Pour l'entrée : $e(t)=E_1\cos(2\pi f_1 t)+E_2\cos(2pif_2 t)+E_0$ qu'on écrit aussi $e(t)=E_1\cos(\omega_1 t)+E_2\cos(\omega_2 t)+E_0$

ω_1 ω_1 $\omega_0 = 0$

Alors la sortie sera

$$S(t) = |\underline{H}(\omega_1)|E_1\cos(\omega_1 t+\phi(\omega_1))+|\underline{H}(\omega_1)|E_2\cos(\omega_2 t+\phi(\omega_2))+|\underline{H}(0)|E_0$$

Pour chaque composante sinusoïdale de l'entrée à la pulsation ω :
On multiplie l'amplitude de l'entrée par le module de la fonction de transfert calculée à la pulsation ω
On rajoute un déphasage égale à l'argument de la fonction de transfert calculée à la pulsation ω

I.4) Diagramme de Bode : vidéo explicative

Un diagramme de Bode est constituée de deux graphiques
- le premier représente $GdB=20\log(|\underline{H}|)$ **en fonction de** ω
- Le deuxième représente $arg(\underline{H})$ **(souvent noté** ϕ **) en fonction de** ω

Voc :

$GdB(\omega)=20\log(|\underline{H}(\omega)|)$ **s'appelle le gain en décibel du filtre à la pulsation ω**

$|\underline{H}(\omega)|$ **s'appelle le gain du filtre**

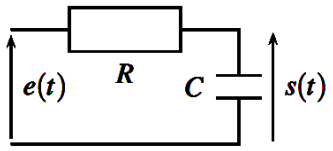
Oublier le module dans l'expression du gain en décibel est une erreur très grave !

II. Modèles simples de filtres passifs du premier Ordre

II.1) Filtre Passe-bas du 1er ordre

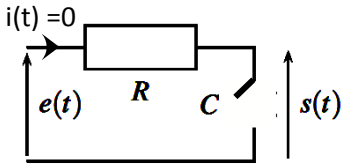
a) Exemple

1 schéma élec



2 Prévision du comportement

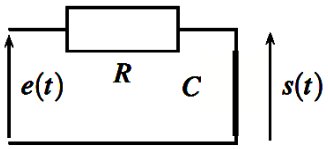
En Très basse fréquence (TBF)



$U_R = Ri = 0$ LDM : $e = U_r + s$

Donc s=e en TBF

EN Très haute fréquence(THF)



S=0 en THF (tension aux bonres d'un fil)

Analyse : Les signaux TBF ne sont pas modifiés par le filtre (entrée=sortie)
Les signaux THF ne passent pas (sortie = 0)
Conclusion : Le filtre est un passe-bas (il laisse passer les BF)

3 Fonction de transfert

$\underline{H}(\omega)=\frac{\underline{s}}{\underline{e}}$ **PdT complexe :** $\underline{s}=\frac{\underline{Z_C}}{\underline{Z_C}+\underline{Z_R}}\underline{e}$ **soit** $\frac{\underline{s}}{\underline{e}}=\frac{\frac{1}{jC\omega}}{\frac{1}{jC\omega}+R}$ $\Leftrightarrow$ $\underline{H}=\frac{1}{1+jRC\omega}=\frac{1}{1+j\omega\tau}=\frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}$

$\tau=RC$ $\omega_0=\frac{1}{RC}$

À savoir retrouver ❤

Rmq : de manière pus générale pour filtre passe bas du premier ordre

❤

$$\underline{H}=\frac{H_0}{1+j\frac{\omega}{\omega_c}}$$

Gain statique (à TBF)
C'est aussi le gain max
(il n'est pas forcement égale à 2voir ex 3 TD 11)

Pulsation de coupure à -3dB
(pas forcement égale à 1/RC)
Parfois aussi notée ω_0

b) Diagramme de Bode en Gain

$$|\underline{H}(\omega)|=\frac{H_0}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}}$$

Justification des asymptotes :

– à basse fréquence (BF) $\omega << \omega_c$: $1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2\approx 1$ et $|\underline{H}(\omega)|\approx\frac{H_0}{\sqrt{1}}$

Le gain en décibel est alors $GdB(\omega)=20\log(|\underline{H}|)\approx 20\log(H_0)-20\log(1)$ ❤

À BF la courbe de GdB(ω) tend asymptotiquement vers une droite horizontale $GdB=20\log(H_0)$

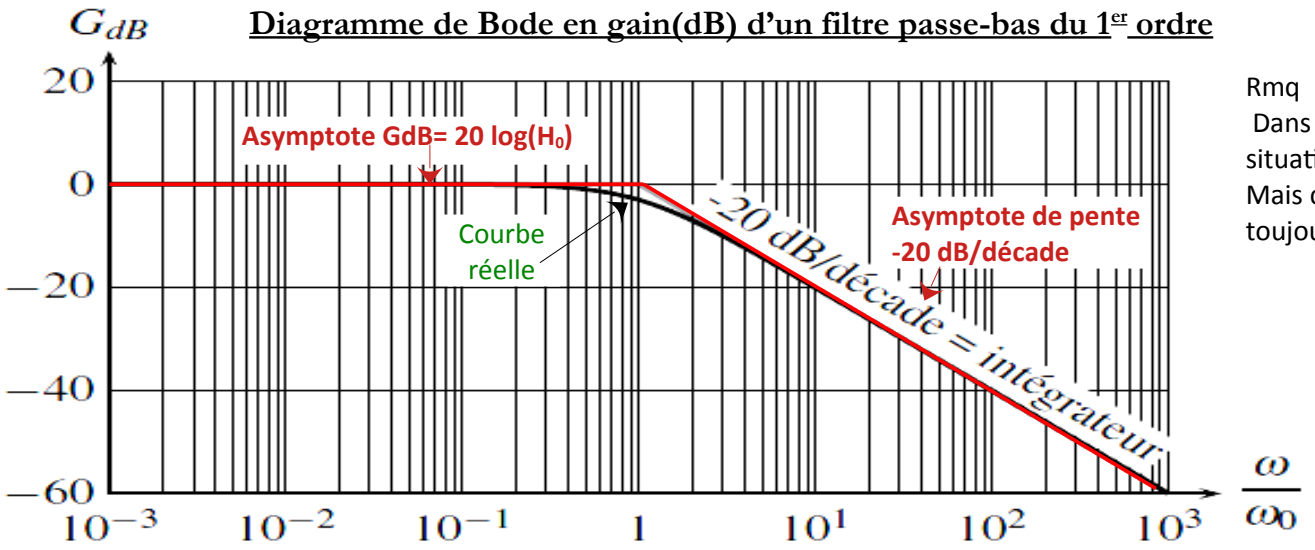
– à haute fréquence (HF) $\omega >> \omega_c$: $1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2\approx\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2$ donc $|\underline{H}(\omega)|\approx\frac{H_0}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_C}\right)^2}}\approx\frac{H_0}{\frac{\omega}{\omega_c}}$

Le gain en décibel est alors $GdB(\omega)\approx 20\log(H_0)-20\log\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$

Notamment $GdB(10\omega)\approx 20\log(H_0)-20\log\left(10\frac{\omega}{\omega_c}\right)=20\log(H_0)-20\log\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)-20\log(10)$ ❤

Et finalement $GdB(10\omega)=GdB(\omega)-20\,dB$

À HF la courbe de GdB(x) tend asymptotiquement vers une droite de pente -20 dB/décade



Rmq
Dans cette situation H_0 =1
Mais ce n'est pas toujours le cas

b) Diagramme de Bode en phase

Justification de l'allure du diagramme de φ (ω)

$$\phi(\omega)=arg\left(\frac{H_0}{1+j\frac{\omega}{\omega_c}}\right)$$

On suppose dans la suite que H_0 est un réel positif

Justification des asymptotes :

– à basse fréquence (BF) $\omega << \omega_c$: $1+j\frac{\omega}{\omega_c}\approx 1$ et $\underline{H}(\omega)\approx\frac{H_0}{1}$

Attention ce n'est pas le module de la fonction de transfert mais la fonction de transfert elle-même que l'on simplifie

Le déphasage introduit par le filtre est alors $\phi(\omega)=arg(H_0)-arg(1)=0$

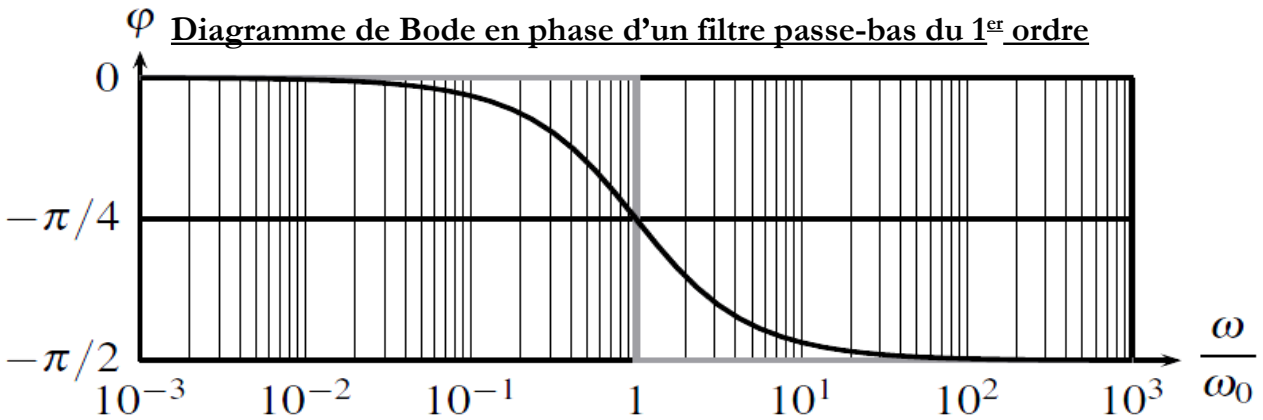
À BF la courbe de φ ω) tend asymptotiquement vers une droite horizontale $\phi=0$

– à haute fréquence (HF) $\omega >> \omega_c$: $1+j\frac{\omega}{\omega_c}\approx j\frac{\omega}{\omega_c}$ donc $\underline{H}(\omega)\approx\frac{H_0}{j\frac{\omega}{\omega_c}}$

Le déphasage introduit par le filtre est alors $\phi(\omega)=arg(H_0)-arg\left(j\frac{\omega}{\omega_c}\right)=0-\frac{\pi}{2}$

Et finalement

À HF la courbe de φ (ω) tend asymptotiquement vers une droite horizontale $\phi=\frac{\pi}{2}$



c) Comportement intégrateur du filtre passe-bas à HF

On a vu qu'à HF (quand $\omega >> \omega_c$) :

$$\underline{H}(\omega)\approx\frac{H_0}{j\frac{\omega}{\omega_c}}\Leftrightarrow\frac{\underline{s}}{\underline{e}}=\frac{H_0}{j\frac{\omega}{\omega_c}}\Leftrightarrow\underline{s}=H_0\omega_c\times\frac{\underline{e}}{j\omega}$$ **or** $$\frac{\underline{e}}{j\omega}=\int\underline{e}\,dt$$ **donc** $$\underline{s}=H_0\omega_c\times\int\underline{e}\,dt$$

À savoir retrouver

en repassant aux signaux réels :

$$s(t)=H_0\omega_c\times\int e(t)dt$$

La sortie est proportionnelle à l'intégrale temporelle de l'entrée à Haute fréquence pour le passe-bas

d) Bande passante à – 3dB

Déf : la bande passante à -3dB est l'intervalle de pulsation telle que

$$|\underline{H}(\omega)| \geq \frac{H_{max}}{\sqrt{2}}$$ **H_{max} étant le gain maximal du filtre**

On peut aussi utiliser le gain en décibel :

$$GdB(\omega) \geq GdB_{max} - 3\,dB$$

Calcul de la bande passante pour un passe bas du premier ordre :

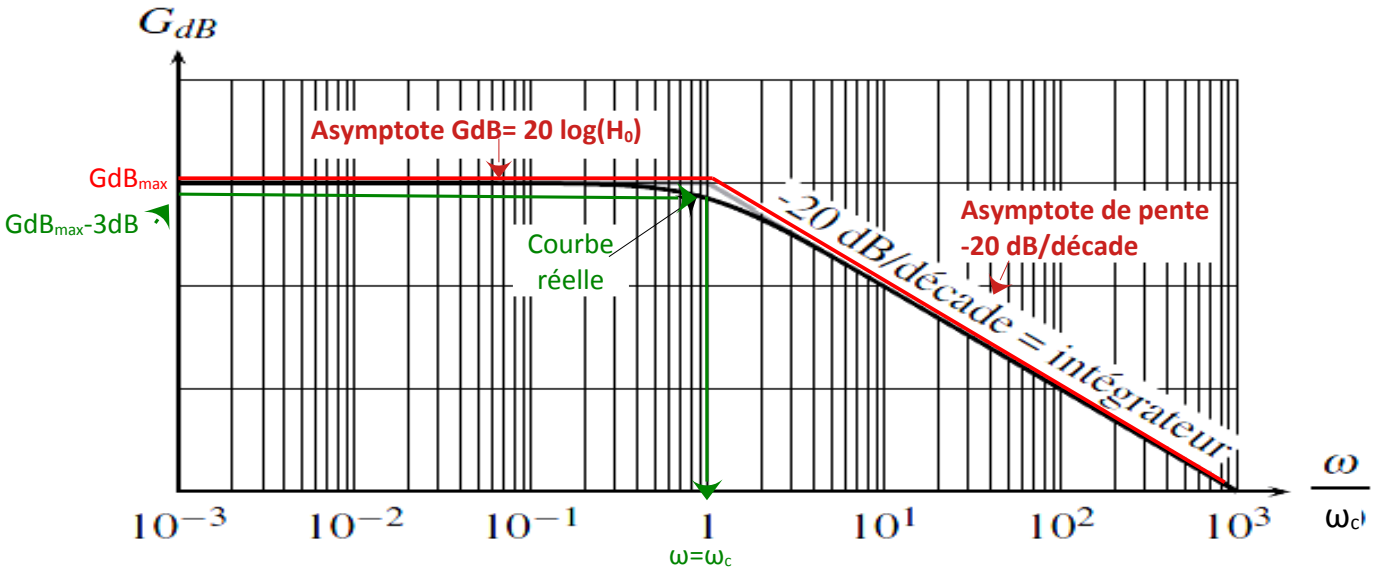
$|\underline{H}(\omega)| \geq \frac{H_{max}}{\sqrt{2}}$ **pour le passe bas du premier ordre** $|\underline{H}(\omega)| = \frac{H_0}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}}$

donc $H_{max} = H_0$ ainsi dans la bande passante :

$$|\underline{H}(\omega)| \geq \frac{H_0}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{H_0}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}} \geq \frac{H_0}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2} \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow 1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 \leq 2 \Leftrightarrow \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 \leq 1 \Leftrightarrow \omega < \omega_c$$

La bande passante est donc l'intervalle $[0, \omega_c]$ pour un basse-bas du 1er ordre

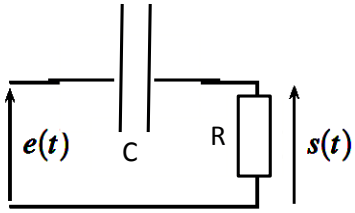
Rmq : à la limite de la bande passante $GdB(\omega_c) = GdB_{max} - 3dB$



II.1) Filtre Passe-bas du 1er ordre

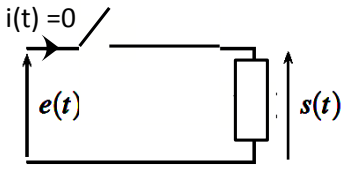
a) Exemple

1 schéma élec

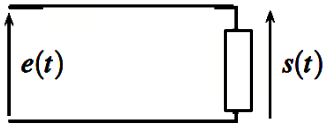


2 Prévision du comportement

En Très basse fréquence (TBF) EN Très haute fréquence(THF)



s =Ri= 0



LDM : e= s
Donc s=e en THF

Analyse : Les signaux THF ne sont pas modifiés par le filtre (entrée=sortie)
Les signaux TBF ne passent pas (sortie = 0)
Conclusion : Le filtre est un passe-haut (il laisse passer les HF)

3 Fonction de transfert

$\underline{H}(\omega)=\frac{\underline{s}}{\underline{e}}$ PdT complexe : soit $\underline{s}=\frac{\underline{Z_R}}{\underline{Z_C}+\underline{Z_R}}\underline{e}$ $\frac{\underline{s}}{\underline{e}}=\frac{R}{\frac{1}{jC\omega}+R}$ $\Leftrightarrow \underline{H}=\frac{jRC\omega}{1+jRC\omega}=\frac{j\omega\tau}{1+j\omega\tau}=\frac{j\frac{\omega}{\omega_0}}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}$

On multiplie par jRCω en haut et en bas

$\tau=RC$ $\omega_0=\frac{1}{RC}$

Rmq : de manière pus générale pour filtre passe-haut du premier ordre

Gain à THF
c'est aussi le gain max
(attention ce n'est pas le gain statique !)

$\underline{H}=H_0\times\frac{j\frac{\omega}{\omega_c}}{1+j\frac{\omega}{\omega_c}}$

Pulsation de coupure à -3dB
(pas forcement 1/RC)

b) Diagramme de Bode en Gain

$$|\underline{H}(\omega)|=\frac{H_0\frac{\omega}{\omega_c}}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}}$$

Justification des asymptotes :

à basse fréquence (BF) $\omega << \omega_c$: $1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2\approx 1$ et $|\underline{H}(\omega)|\approx H_0\frac{\frac{\omega}{\omega_c}}{\sqrt{1}}$ on laisse $\frac{\omega}{\omega_c}$ au numérateur(pas0)

$$GdB(\omega)=20\log(|\underline{H}|)\approx 20\log(H_0)+20\log\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$$

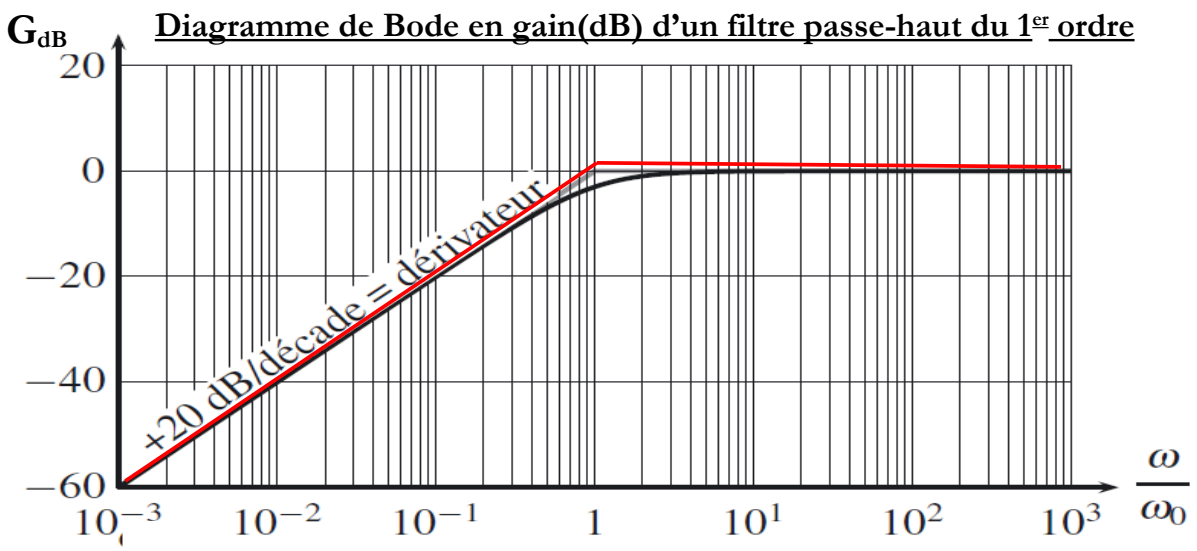
Notamment à BF $GdB(10\omega)=Gdb(\omega)+20dB$

À BF la courbe de GdB(ω) tend asymptotiquement vers une droite de pente + 20 dB/décade

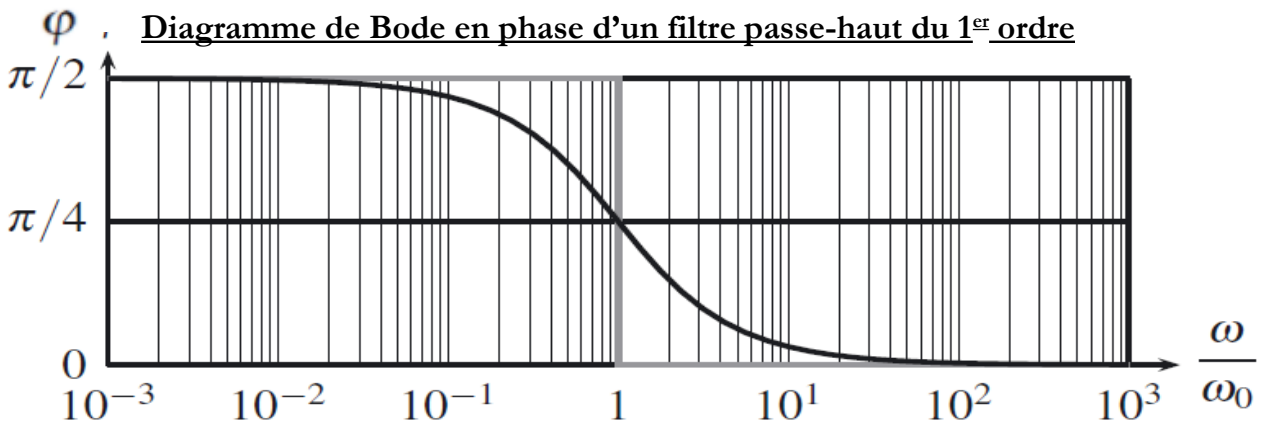
à haute fréquence (HF) $\omega >> \omega_c$ $1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2\approx\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2$ et $|\underline{H}(\omega)|\approx\frac{H_0\frac{\omega}{\omega_c}}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_C}\right)^2}}\approx\frac{H_0\frac{\omega}{\omega_c}}{\frac{\omega}{\omega_c}}\approx H_0$

$$GdB(\omega)\approx 20\log(H_0)$$

À HF la courbe de GdB(ω) tend asymptotiquement vers une droite horizontale $GdB(\omega)\approx 20\log(H_0)$



Justification de l'allure de la courbe de phase



c) Comportement dérivateur du filtre passe-haut du premier ordre à BF

On a vu qu'à BF (quand $\omega << \omega_c$) :

$$\underline{H}(\omega) \approx \frac{H_0 j \frac{\omega}{\omega_c}}{1} \Leftrightarrow \underline{s} = \frac{H_0}{\omega_c} \times j\omega \underline{e} \quad \text{or} \quad \underline{e}\, j\omega = \frac{d\underline{e}}{dt}$$

À savoir retrouver

en repassant aux signaux réels :

$$s(t) = \frac{H_0}{\omega_c} \times \frac{de(t)}{dt}$$

La sortie est proportionnelle à la dérivée temporelle dede l'entrée à BF pour le passe-hayt 1er ordre