

# Chapitre 11 : Filtrage linéaire

## I Etude de la réponse d'un système linéaire à un signal périodique

### I.1) Notion de système linéaire

$e_A(t) \rightarrow (S) \rightarrow s_A(t)$  le système donne une sortie  $s_A$  pour une entrée  $e_A$

$e_B(t) \rightarrow (S) \rightarrow s_B(t)$   $s_0$   $e_B$

le système est linéaire si par une combinaison linéaire des entrées:  $\alpha e_A + \beta e_B = e_C$   
il donne en sortie une combinaison linéaire des sorties  $s_C(t) = \alpha s_A + \beta s_B$

### I.2) Notion de spectre et décomposition spectrale

si  $s(t)$  est périodique de période  $T$  alors  $s(t+T) = s(t)$

#### et Décomposition spectrale d'un signal

Au 19<sup>ème</sup> Joseph Fourier montre que tout signal périodique  $s(t)$  peut être décomposé en une somme de signaux sinusoidaux:

c-a-d si  $s(t)$  est  $T$  périodique  $\exists (A_i, f_i, \phi_i) \in \mathbb{R}^3 \forall i$

$$s(t) = \sum_{i=0}^{+\infty} S_i \cos(2\pi f_i t + \phi_i)$$

Plus précisément:

$$s(t) = S_0 + S_1 \cos(2\pi f_1 t + \phi_1) + \sum_{n=2}^{+\infty} S_n \cos(2\pi f_n t + \phi_n)$$

Composante continue ("offset")  $\rightarrow S_0$

Composante fondamentale  $\rightarrow S_1 \cos(2\pi f_1 t + \phi_1)$

$f_1 = \frac{1}{T}$  est la fréquence fondamentale

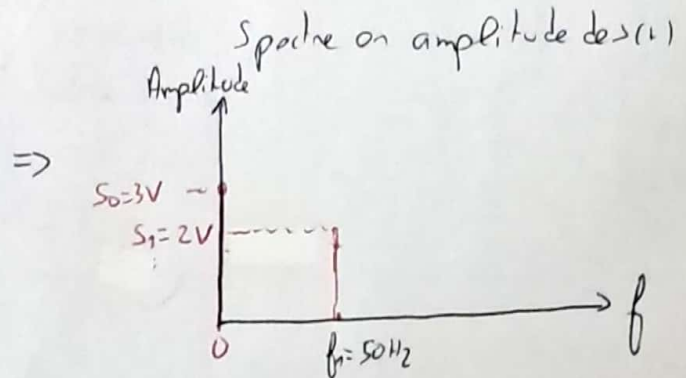
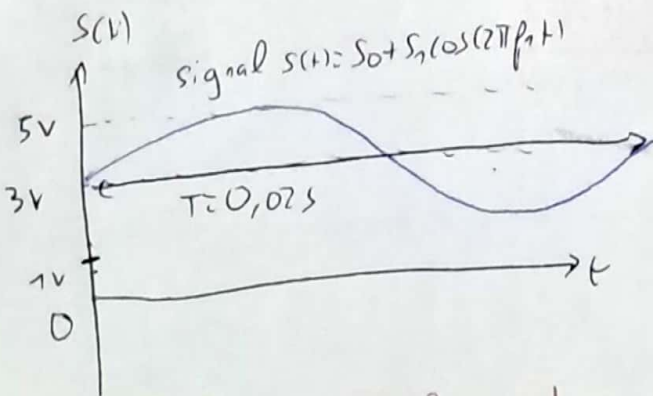
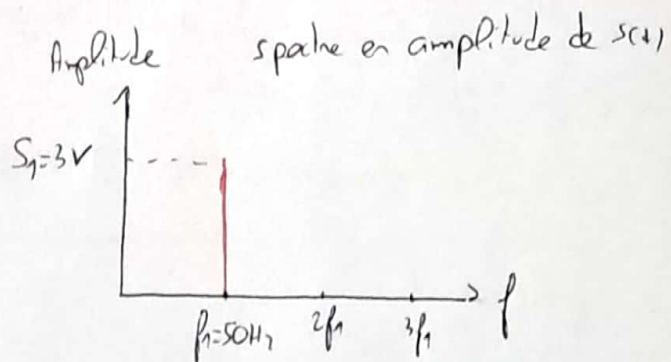
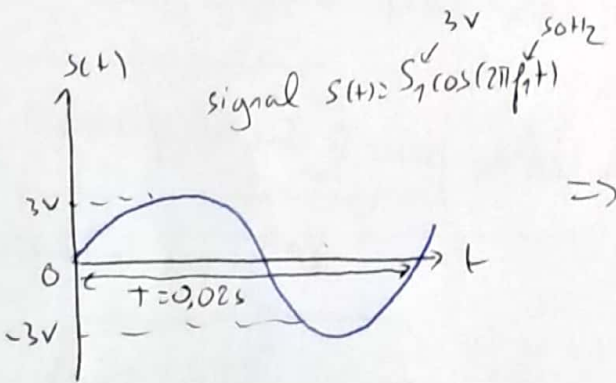
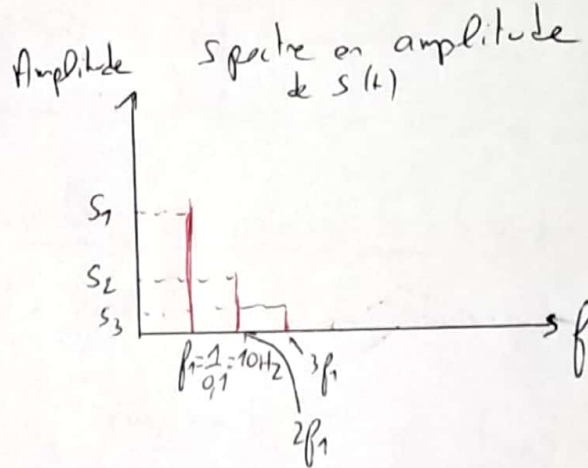
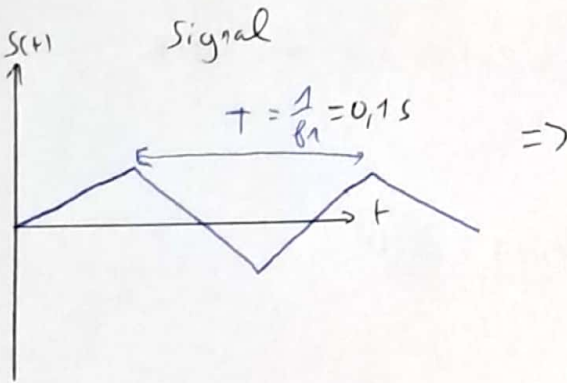
$N^{\text{ème}}$  composante harmonique  $\rightarrow S_n \cos(2\pi f_n t + \phi_n)$

$N^{\text{ème}}$  fréquence harmonique telle que  $f_n = n \times f_1$

## b) Notion de spectre

Établir le spectre de  $s(t)$  consiste à :

- Donner la liste des fréquences  $f_i$  des composantes d'amplitude non nulle  
(Les  $f_i$  sont les abscisses des "pics" dans le spectre)
- Donner les valeurs des amplitudes  $S_i$  de la fondamentale, de la composante continue) si présentes des harmoniques  
(Les  $S_i$  sont la "hauteur" des pics dans le spectre en amplitude)
- Donner les valeurs des  $\phi_i$  (hauteur des pics dans le spectre en phase)



Rmq:  $S_1$  le signal possède une composante continue, son spectre en amplitude possède un pic à  $0 \text{ Hz}$  de hauteur  $S_0$

c)  Valeur moyenne (Composante continue)

$S_0$  est la valeur moyenne du signal

$$S_0 = \langle s(t) \rangle = \frac{df}{T} \int_0^T s(t) dt$$

$\langle A \rangle$  val. d. ne  
"valeur moyenne de A"

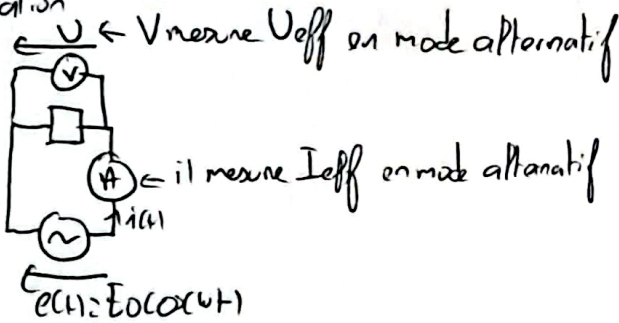
Rmq:  $\langle S_1 \cos(2\pi f_1 t + \phi_1) \rangle = 0$

d)  valeur efficace d'un signal

la valeur efficace de  $s(t)$  notée  $S_{eff}$  est:

$$S_{eff} = \sqrt{\langle s(t)^2 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T s(t)^2 dt}$$

Interpretation



Rmq: La tension du secteur délivrée par EDF vaut 230V efficace

$I_{eff}$  intervient ds la puissance moyenne dissipée par une résistance:

$$\langle P(t) \rangle = \langle U(t) i(t) \rangle = \langle R i^2(t) \rangle = R \langle i^2(t) \rangle$$

$$\langle P(t) \rangle = R I_{eff}^2$$

Valeur efficace d'un signal sinusoïdal:

$$s(t) = S_1 \cos(2\pi f_1 t + \phi_1)$$

avec  $f_1 = \frac{1}{T}$

or  $\cos^2(a) = \frac{1 - \cos(2a)}{2}$

$$S_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T S_1^2 \cos^2(2\pi f_1 t + \phi_1) dt}$$

$$\Rightarrow S_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T S_1^2 \left[ \frac{1 - \cos(4\pi f_1 t + 2\phi_1)}{2} \right] dt}$$

$$\int_0^T \frac{1 - \cos(4\pi f_1 t + 2\phi_1)}{2} dt = \int_0^T \frac{1}{2} dt - \frac{1}{2} \int_0^T \cos(4\pi f_1 t + 2\phi_1) dt = \frac{1}{2}T - \frac{1}{2} \left[ \frac{-1}{4\pi f_1} \cos(4\pi f_1 t + 2\phi_1) \right]_0^T$$

⑤

$$\text{Pendant une } \frac{1}{T} \int_0^T S_1^2 \cos^2(2\pi f_1 t + \phi_1) dt = \frac{1}{T} \left(\frac{1}{2} T\right) S_1^2 = \frac{1}{2} \times S_1^2$$

$$\text{donc } S_{\text{eff}}^2 = \frac{1}{2} \times S_1^2 \Rightarrow \boxed{S_{\text{eff}} = \frac{S_1}{\sqrt{2}}}$$

e) Relat° de Parseval

La puissance électrique moyenne est proportionnelle à la valeur efficace de signal électrique au carré ( $P_R$ ) =  $\frac{U_{\text{eff}}^2}{R} = R I_{\text{eff}}^2$

La puissance moyenne est égale à la somme des puissances moyennes transportées par les différentes composantes harmoniques qui composent le signal:

$$\Rightarrow \boxed{S_{\text{eff}}^2 = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{S_i^2}{2}}$$

$S_i$ : l'amplitude de la  $i^{\text{ème}}$  composante harmonique de  $s(t)$

### I.3) Fonction de transfert

(2 fils en entrée, 2 fils en sortie  $\Rightarrow$  quadripôle)



tension d'entrée

$$e(t) = E_0 \cos(\omega t)$$

$$s(t) = S_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

objectif:

Trouver  $S_0$  et  $\varphi$

⚠ Ici  $S_0$  n'est pas la composante continue!

On passe en notation complexe:

$$\begin{cases} \underline{e} = \underline{E_0} e^{j\omega t} & \text{avec } \underline{E_0} = E_0 e^{j0} = E_0 \\ \underline{s} = \underline{S_0} e^{j\omega t} & \text{avec } \underline{S_0} = S_0 e^{j\varphi} \end{cases}$$

On définit la fonction de transfert  $\boxed{H = \frac{\underline{s}}{\underline{e}}}$  ♥

$$\text{A lois: } \boxed{|H| = \frac{S_0}{E_0}} \quad \heartsuit$$

le module de la fonction de transfert est le rapport de l'amplitude de la sortie sur celle de l'entrée

(par une entrée sinusoïdale seulement)

$$\text{et } \boxed{\text{Arg}(H) = \varphi} \quad \heartsuit$$

$\varphi$  représente le déphasage de la sortie par rapport à l'entrée

Si l'entrée est  $e(t) = E_1 \cos(2\pi f_1 t + \phi_1) + E_2 \cos(2\pi f_2 t + \phi_2)$

La sortie du filtre sera:

$$s(t) = |H(f_1)| E_1 \cos(2\pi f_1 t + \phi_1 + \varphi(f_1)) + |H(f_2)| E_2 \cos(2\pi f_2 t + \phi_2 + \varphi(f_2))$$

avec  $\varphi(f_1) = \arg(H(f_1))$

$\varphi(f_2) = \arg(H(f_2))$

exemple

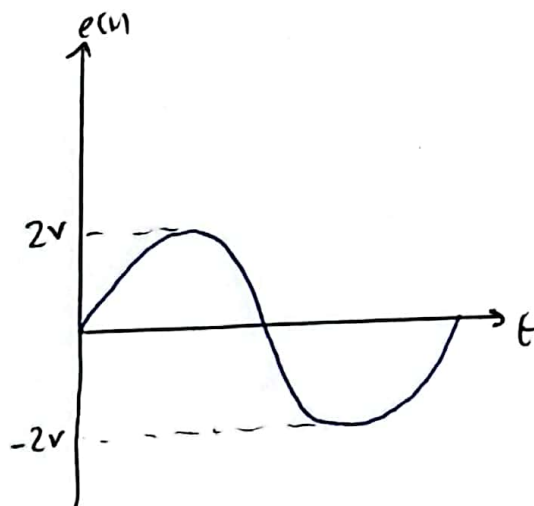
$e(t) = 2 \cos\left(\frac{2\pi}{T} t - \frac{\pi}{2}\right)$   $E_1 = 2V$  et  $\phi_1 = -\frac{\pi}{2}$   $\omega_1 = 2\pi f_1 = \frac{2\pi}{T}$

On envoie  $e(t)$  sur un filtre de fonction de transfert  $H$  telle que  $|H(f_1)| = 0,5$   
 $\arg(H(f_1)) = \frac{\pi}{4}$

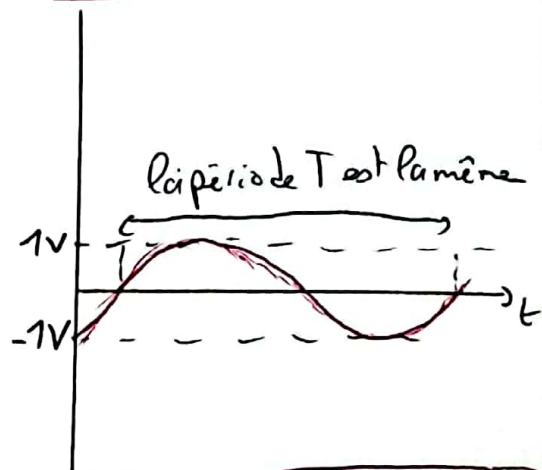
dans ce cas la sortie sera  $s(t) = 0,5 \times 2 \cos\left(\frac{2\pi}{T} t - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right)$

$$s(t) = 1 \times \cos\left(\frac{2\pi}{T} t - \frac{\pi}{4}\right)$$

allure de  $e(t)$



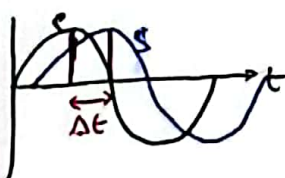
allure de  $s(t)$



lien entre  $\varphi$  et le décalage temporel  $\Delta t$

$$\Delta t \times \frac{2\pi}{T} = \varphi \Rightarrow$$

$$\Delta t = \frac{T \times \varphi}{2\pi}$$



si le déphasage de  $s(t)$  est  $\varphi$   
 $s(t)$  atteint son max  $\Delta t$   
 plus tard que  $e(t)$

Souvent on calcule  $|H|$

# I. 4) Diagramme de Bode

Un diagramme de Bode est composé de deux graphiques:

- le premier graphique représente  $|H|$  en fonction de  $\omega$
- le deuxième représente  $\varphi$  en fonction de  $\omega$

⚠ Rmq : au lieu de  $|H| = f(\omega)$  on trace très souvent en premier graphe GdB en fonction de  $\omega$

VOC: GdB est le gain en décibels

$$GdB = 20 \log(|H|)$$

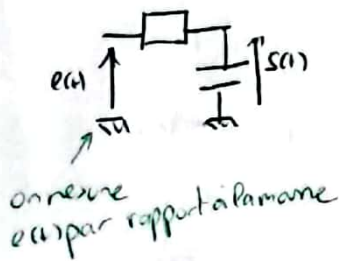
ne pas oublier le module sinon cela n'a aucun sens!

## II Modèles simples de filtres passifs du premier ordre

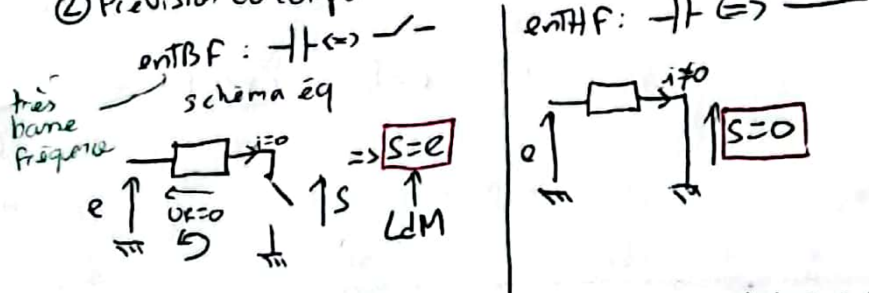
### II.1) filtre passe bas du 1<sup>er</sup> ordre

a) Exemple

① schéma



② Prédiction du comportement sans calculs



Analyse : les signaux TBF ne sont pas modifiés (entrée = sortie)

• Les signaux THF ne passent pas

Conclusion: le filtre est appelé passe-bas (il laisse passer les basses fréquences)

basse ok mais basse devant quoi?

③ Fonction de transfert

$$H = \frac{s}{R + s} \quad \text{PdT (en RSF)} : s = \frac{Z_c}{Z_r + Z_c} e \quad \text{donc } H = \frac{s}{R + s} = \frac{Z_c}{Z_r + Z_c} = \frac{1/j\omega C}{R + 1/j\omega C}$$

$$H = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{1 + j\omega \tau} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0}} \quad \text{avec } \omega_0 = \frac{1}{RC} \quad \tau = RC$$

$\omega_0$  est appelé pulsation de coupure (ou bande passante)

b) Diagramme de Bode  
 Voir allure sur le poly

caractéristique de GdB(w):  $GdB = 20 \log(|H|)$  or  $|H| = \left| \frac{1}{1+j\frac{w}{w_0}} \right| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{w}{w_0}\right)^2}}$

$$GdB = 20 \log \left( \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{w}{w_0}\right)^2}} \right)$$

• À BF  $w \ll w_0 \Rightarrow GdB \approx 20 \log(1) = 0$  logique  $|H| = \frac{|s|}{|s|} = 1 \Rightarrow s$  et  $e$  sont identiques

• À HF  $w \gg w_0 \Rightarrow GdB \approx 20 \log \left( \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{w}{w_0}\right)^2}} \right) \approx -20 \log \left( \frac{w}{w_0} \right)$   
 $\log\left(\frac{1}{a}\right) = -\log(a)$

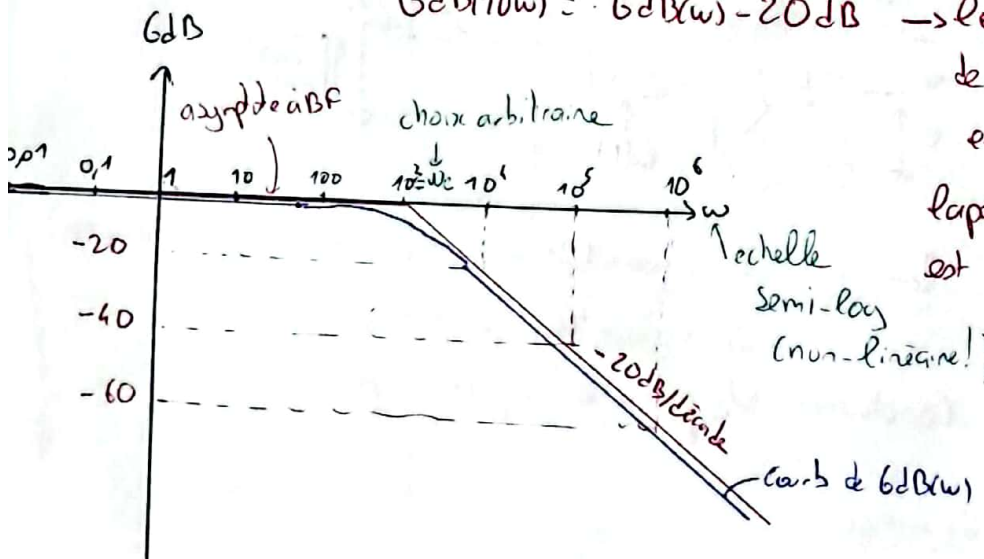
Rmq: à HF comment diminue GdB sur une décade? (1 décade: passage de w à 10\*w)

$$GdB(10w) = -20 \log \left( \frac{10w}{w_0} \right) = -20 \log(10) - 20 \log \left( \frac{w}{w_0} \right)$$

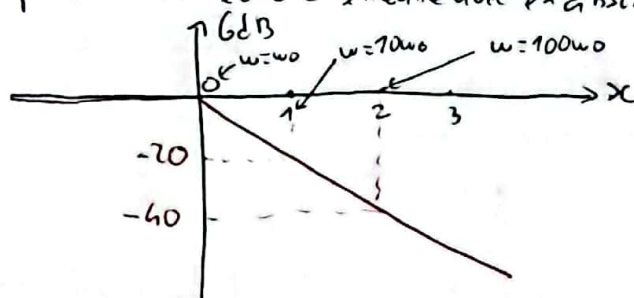
$\log(a \cdot b) = \log a + \log b$

$GdB(10w) = GdB(w) - 20dB \rightarrow$  le gain diminue de 20dB par décade en HF par un pôle bas

la pente de GdB(w) à HF est de -20 dB/décade

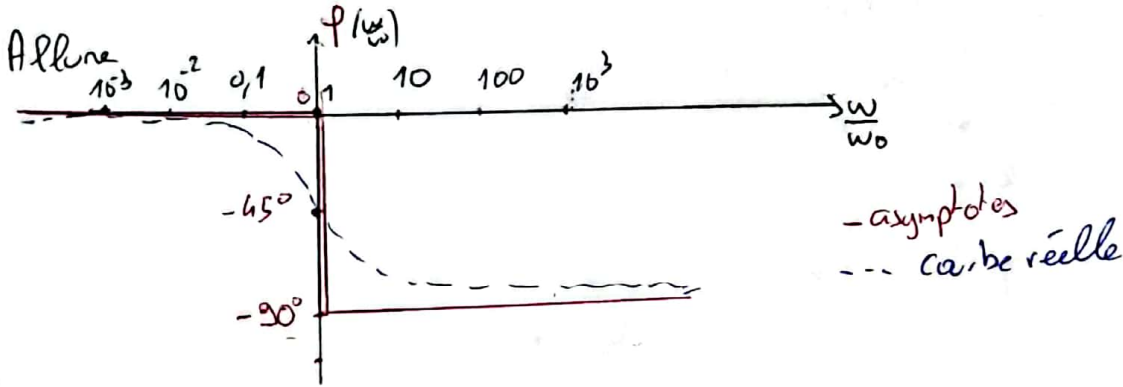


On peut aussi représenter en échelle linéaire avec en abscisse  $x = \log \left( \frac{w}{w_0} \right)$



Preuve de l'allure de la phase  $f(\omega) = \arg(H) = \arg\left(\frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}\right) = -\arg\left(1+j\frac{\omega}{\omega_0}\right) \Rightarrow \boxed{f(\omega) = -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}$

- à BF  $\omega \ll \omega_0 \Rightarrow \frac{\omega}{\omega_0} \rightarrow 0 \Rightarrow \arctan(0) = 0 \Rightarrow \boxed{f(\omega) \approx 0 \text{ à BF}}$
- à HF  $\omega \gg \omega_0 \Rightarrow \frac{\omega}{\omega_0} \rightarrow +\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \boxed{f(\omega) \approx -\frac{\pi}{2} \text{ à HF}}$
- à  $\omega = \omega_0 \Rightarrow \arctan(1) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow \boxed{f(\omega = \omega_0) = -\frac{\pi}{4}}$



c) Bande passante à -3dB on cherche l'intervalle de  $\omega$  tel que

$$\boxed{|H| \geq \frac{H_{max}}{\sqrt{2}}}$$

ici:  $H_{max} = 1$  (pour  $\omega = \omega_0$ )

$$|H(\omega)| \geq \frac{H_{max}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1+(\frac{\omega}{\omega_0})^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow 1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \leq 2$$

passage à l'inverse  
chgt du  
sens  
de l'inégalité.

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \leq 1 \Leftrightarrow \boxed{\omega \leq \omega_0}$$

$[0, \omega_0]$  est appelé bande passante à -3dB du filtre passe bas

Rmq:  $|H(\omega_0)| = \frac{1}{\sqrt{1+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow G_{dB}(\omega_0) = 20 \log\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -3dB$

le gain à la limite de la bande passante est égale au gain maximal (ici 0dB) -3dB

d) Comportement intégrateur du filtre en HF

$$H = \frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}} \text{ en HF } (\omega \gg \omega_0) \quad H(\omega) \approx \frac{1}{j\frac{\omega}{\omega_0}} = \omega_0 \times \frac{1}{j\omega}$$

or  $H = \frac{s}{s}$  donc  $\frac{s}{s} = \omega_0 \times \frac{1}{j\omega} \Leftrightarrow s = \omega_0 \times \frac{1}{j\omega} \Rightarrow \int e^{st} dt$

ds le domaine réel:  $\boxed{S(t) = \omega_0 \int e^{i\omega t} dt}$

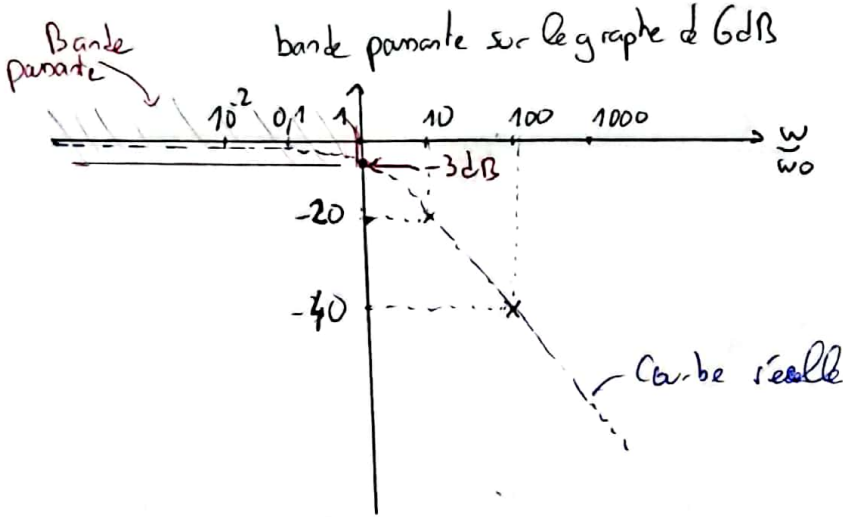
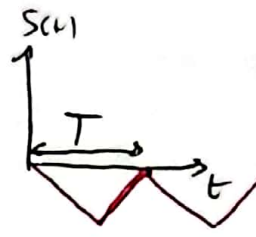
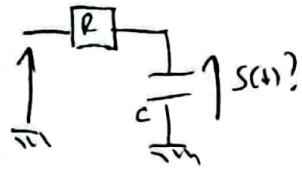
La sortie est l'intégrale de l'entrée. Pour un filtre passe bas utilisé à haute fréquence devant  $\omega_0$  ( $\omega \gg \omega_0$ )



exemple

on suppose  $T \ll RC \Leftrightarrow \frac{2\pi}{T} = \omega \gg \omega_0$

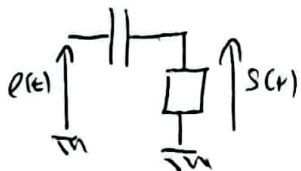
si  $e(t) = a \rightarrow s(t) = at + C_0$   
 si  $e(t) = -a \rightarrow s(t) = -at + C_1$



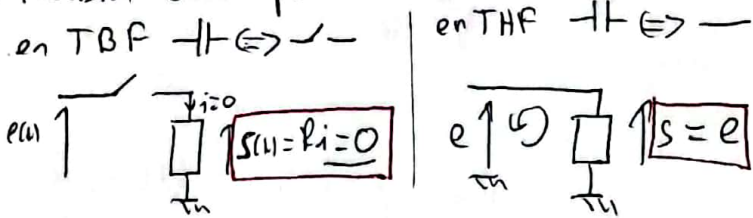
## II.2) Filtere passe haut du premier ordre

a) Exemple

① schéma



② Prèvision du comportement :



Analyse : le filtre laisse passer les signaux à très haute fréquence ( $s=e$ ) mais pas à basse fréquence ( $s=0$ )  
 $\Rightarrow$  le filtre est un passe-haut

③ fonction de transfert

$$H = \frac{s}{e} \quad \text{P/T (en R/SF)} \quad \Rightarrow \quad \frac{Ze}{Ze+ZC}$$

$$\Leftrightarrow \frac{s}{e} = \frac{R \cdot j\omega}{R+1/j\omega} \Rightarrow H = \frac{jRC\omega}{1+jRC\omega} = \frac{j \frac{\omega}{\omega_c}}{1+j \frac{\omega}{\omega_c}}$$

b) Diagramme de Bode

$$\text{Gain : } G_{dB}(\omega) = 20 \log \left( \left| \frac{j \frac{\omega}{\omega_c}}{1+j \frac{\omega}{\omega_c}} \right| \right) = 20 \log \left( \frac{\frac{\omega}{\omega_c}}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}} \right)$$

④

• en HF  $\omega \gg \omega_c$   $\cdot 1 \ll \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 \Rightarrow \frac{\frac{\omega}{\omega_c}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}} \approx \frac{\frac{\omega}{\omega_c}}{\sqrt{\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}} \approx 1$

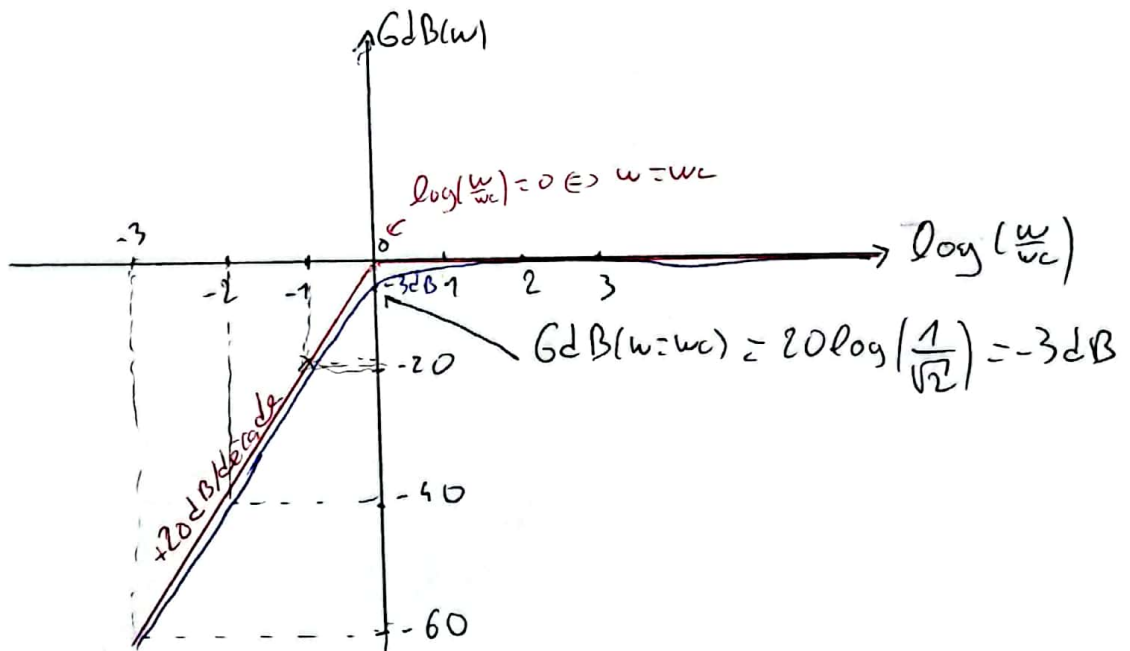
$\Rightarrow \underline{GdB(\omega) \approx 20 \log(1) = 0}$

La courbe réelle de  $GdB(\omega)$  est asymptote en HF à la droite d'équation  $GdB = 0$

• en BF  $\omega \ll \omega_c$

$GdB(\omega) \approx 20 \log\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right) \Rightarrow GdB(\omega) = 20 \log(\omega) - 20 \log(\omega_c)$   
 donc  $GdB(10\omega) = \underline{GdB(\omega) + 20dB}$

La courbe réelle de  $GdB(\omega)$  est asymptote en BF à une droite de pente  $+20dB/décade$



c) Comportement en BF:  $H(\omega) \approx j \frac{\omega}{\omega_c} \Leftrightarrow \frac{s}{\omega_c} = j \frac{\omega}{\omega_c}$

$$s = \frac{1}{\omega_c} \times \underbrace{j\omega e^{-j\omega t}}_{\frac{d}{dt} e^{-j\omega t}} \Leftrightarrow s = \frac{1}{\omega_c} \frac{d}{dt} e^{-j\omega t}$$

ds le domaine réel, si  $s(t)$  est périodique

$$s(t) = \frac{1}{\omega_c} \frac{d}{dt} e^{j\omega t}$$

La sortie est la dérivée de l'entrée en BF  $\omega \ll \omega_c$

c) Bande passante

$|H(\omega)| \geq \frac{H_{max}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{\omega/\omega_c}{\sqrt{1 + (\omega/\omega_c)^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$

$(\omega/\omega_c)^2 \geq \frac{1 + (\omega/\omega_c)^2}{2} \Rightarrow \left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2 \geq \frac{1}{2} \Rightarrow \omega \geq \omega_c$  est l'intervalle  $[\omega_c, +\infty[$

Pour la bande passante à -3dB