

PROGRAMME DE COLLES N° 12

Semaine du 16/12/2024 au 20/12/2024

👉 *Primitives et intégrales, équations différentielles* 👈

Format de la colle :

- Automatismes de calcul (env. 10 min) : quelques items simples parmi les thèmes de la liste (actualisée chaque semaine) en page 2.
- Restitution du cours (env. 15 min) : définition et/ou théorème des chapitres au programme, puis démonstrations, exemples ou exercices exigibles listés plus bas.
- Exercice(s) libre(s) (env 30 min).

— Chapitre 8 : Calculs de primitives et d'intégrales —

Révisions du programme précédent.

— Chapitre 9 : Équations différentielles —

Tout le chapitre.

1 Définition, exemples, généralités

2 Équations différentielles linéaires d'ordre 1

- 2.1 Solutions homogènes de l'équation normalisée
- 2.2 Solutions particulières pour une EDL_1 normalisée : variation de la constante, partie réelle ou imaginaire pour des coefficients réels, cas des coefficients constants et d'un second membre exponentiel
- 2.3 Solutions avec condition initiale
- 2.4 Recherche de solution globale : exemples de raccordement de solutions

3 Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants

- 3.1 Résolution de l'équation homogène : cas de coefficients complexes, puis réels
- 3.2 Solutions particulières pour certains seconds membres : polynomial, exponentiel, trigonométrique
- 3.3 Solution avec conditions initiales

Démonstrations, exemples ou exercices exigibles comme questions de cours

- Chapitre 8. Proposition 6 : intégrale d'une fonction paire ou impaire sur un segment centré en 0, intégrales $\int_a^{a+T} f(t) dt$ et $\int_{a+T}^{b+T} f(t) dt$ pour une fonction T -périodique.
- Chapitre 9. Proposition 2 : solutions de $y' + a(x)y = 0$.
- Chapitre 9. Exemple 8.2 : résoudre $(1 - t)y' - y = t$ sur \mathbb{R} (avec recollement en 1).

Automatismes de calcul

On donne quelques exemples de capacité attendue pour chaque thème.

[Le cahier de calcul](#) fournit également une excellente source d'entraînement/inspiration.

- **Logique, raisonnement**

Exemples : montrer que $x^2 + y^2 \geq 2xy$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, savoir écrire en langage symbolique qu'une suite est majorée, qu'une fonction est 2π -périodique et savoir nier ces assertions.

- **Trigonométrie.**

Exemples : formule $\cos(2a)$, résolution de $\sin a = \sin b$, $\cos(2x + 1) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos x = \sin x$.

- **Inégalités : résoudre/prouver des inégalités simples**

Exemples : résoudre $x|x| \leq 3x+2$, montrer que $|\sin(nx)| \leq n|\sin x|$ pour tous $n \in \mathbb{N}$, $x \in \mathbb{R}$, encadrer rapidement $x \mapsto \frac{\cos x + 2}{x^2 + 4}$ sur $[0; 1]$.

- **Calcul élémentaire de nombres complexes** (module, argument, linéarisation, angle moitié, racines carrées, n -ièmes).

Exemples : calculer la forme exponentielle de $\sqrt{3} - 3i$, les racines carrées de $3 - 4i$, linéarisation de $\cos^3 x$, résolution de $z^n = 1$ dans \mathbb{C} .

- **Calcul algébrique** (fractions, simplification d'expressions, sommes et produits usuels, coefficients binomiaux, formule du binôme, etc).

Exemples : donner la formule pour $\sum_{k=1}^n q^k$, calculer $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k$, écrire $\prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k+1}$ avec des factorielles.

- **Définition, dérivée ou primitive d'une fonction usuelle.**

Exemples : définir Arctan , simplifier $\text{Arccos}(\cos(7))$, théorème de dérivation de $g \circ f$, dérivée de $x \mapsto f(-x)$, donner une primitive de $x \mapsto \frac{x}{2x+1}$, de $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$, de $x \mapsto \frac{x^2+x}{x^2+1}$, ensemble de définition, de dérivabilité et dérivée de $x \mapsto \text{Arccos}\left(\frac{x}{x+1}\right)$.

- **Techniques élémentaires de calcul intégral, IPP ou changement de variable simple.**

Exemples : $\int^x \cos t e^{2t} dt$, $\int_0^1 t e^t dt$, $\int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt$ en posant $t = \sin x$.

- **Équations différentielles.**

Exemple : résoudre $xy' + y = x$ sur \mathbb{R}_+^* .