# Correction TD 11 FILTRAGE LINÉAIRE

**Exercice 2 : Valeur efficace**

**1)**

$$S_{eff}^2=\frac{1}{T}\int_0^T\left(I_1\sin(\frac{2\pi}{T}t+\varphi)+I_0\right)^2dt \qquad S_{eff}^2=\frac{1}{T}\int_0^T\left(I_1^2\sin^2(\frac{2\pi}{T}t+\varphi)dt+2I_0I_1\sin^2(\frac{2\pi}{T}t+\varphi)dt+I_0^2dt\right)$$

$$S_{eff}^2=\frac{1}{T}\int_0^T I_1^2\sin^2(\frac{2\pi}{T}t+\varphi)dt+\frac{1}{T}\int_0^T 2I_0I_1\sin(\frac{2\pi}{T}t+\varphi)dt+\frac{1}{T}\int_0^T I_0^2dt$$

Or $\frac{1}{T}\int_0^T 2I_0I_1\sin(\frac{2\pi}{T}t+\varphi)dt$ car la valeur moyenne de $\sin(\frac{2\pi}{T}t+\varphi)$ est nulle

$\frac{1}{T}\int_0^T I_0^2dt=I_0^2$ et $\int_0^T\sin^2(\frac{2\pi}{T}t+\varphi)dt=\frac{T}{2}$ finalement $S_{eff}^2=\frac{1}{T}\frac{T}{2}I_1^2+I_0^2$ soit $\boxed{S_{eff}=\sqrt{\frac{I_1^2}{2}+I_0^2}}$

2) On modélise un sèche cheveux par une résistance parcouru par une intensité i(t) avec une tension u(t) à ses bornes

la puissance moyenne dissipée est $<P(t)>=<Ri(t)^2>=RI_{eff}^2$ et comme u = Ri(t) $\boxed{<P(t)>=\frac{U_{eff}^2}{R}}$

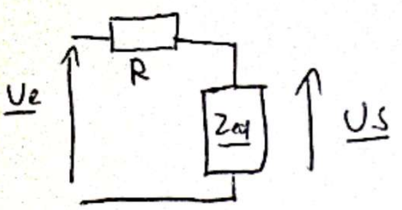
Les valeurs indiquées sur le sèche cheveux sont:
la valeur moyenne de la puissance : $<P(t)>=2{,}2\,kW$
la valeur efficace de la tension $U_{eff}=\sqrt{u(t)^2}=220\,V$ on peut en déduire R :

$<P(t)>=\frac{U_{eff}^2}{R}\Leftrightarrow R=\frac{U_{eff}^2}{<P(t)>}$ $\boxed{\text{A.N } R = 22\ \Omega}$

de plus $<P(t)>=RI_{eff}^2\Leftrightarrow I_{eff}=\sqrt{\frac{<P(t)>}{R}}$ $\boxed{\text{A.N } I_{eff} = 10\text{ A}}$ et $I_{eff}=\frac{I_{max}}{\sqrt{2}}\Rightarrow\boxed{I_{max}=14\,A}$

## Exercice 3

1)




avec $\underline{Z_{eq}} = \dfrac{\frac{1}{jC\omega} \times R}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \dfrac{R}{1+jRC\omega}$

PdT en complexe $\underline{U_s} = \dfrac{\underline{Z_{eq}}}{\underline{Z_{eq}} + R} \underline{U_e}$

$$\underline{H} = \frac{\underline{U_s}}{\underline{U_e}} = \frac{\frac{R}{1+jRC\omega}}{R + \frac{R}{1+jRC\omega}} = \frac{R}{(1+jRC\omega)\left(R + \frac{R}{1+jRC\omega}\right)}$$

$$\underline{H} = \frac{R}{R + jR^2C\omega + R} = \frac{1}{2 + jRC\omega} = \boxed{\frac{1/2}{1 + j\frac{RC\omega}{2}}}$$

Par identification avec la forme canonique $\dfrac{H_0}{1+j\frac{\omega}{\omega_c}}$

on a $H_0 = 1/2$ et $\omega_c = \dfrac{2}{RC}$ (c'est un passe-bas)

2) $|\underline{H}| = \dfrac{H_0}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2}}$

- en BF ($\omega << \omega_0$)

$|\underline{H}| \simeq H_0 = \frac{1}{2}$

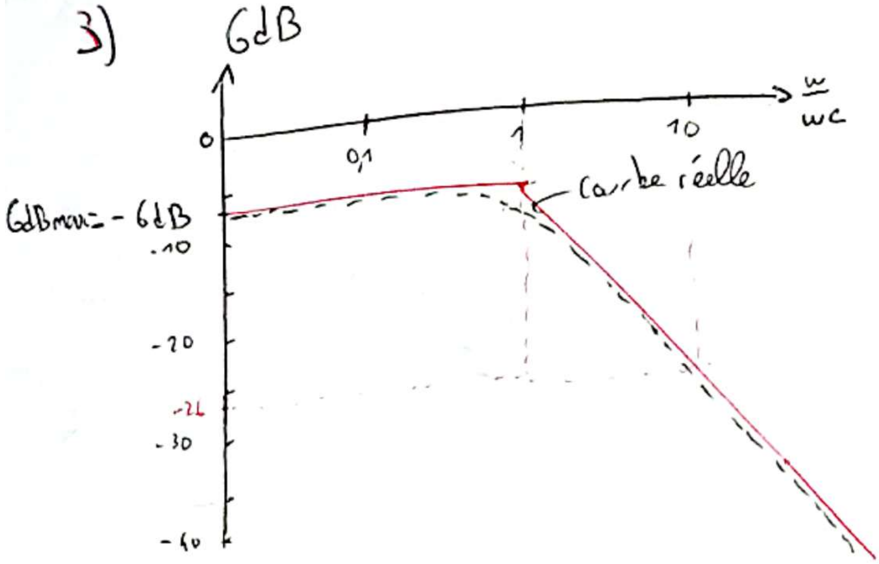
donc $G_{dB}(\omega) = 20\log\left(\frac{1}{2}\right)$

en BF la courbe de gain est asymptote à une droite horizontale $G_{dB} = -20\log(2) =$

- en HF ($\omega >> \omega_0$) $|\underline{H}| \simeq \dfrac{H_0}{\frac{\omega}{\omega_c}} \Rightarrow G_{dB}(\omega) \simeq 20\log(H_0) - 20\log\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)$

$G_{dB}(10\omega) = G_{dB}(\omega) - 20\,dB$ $\rightarrow$ droite de pente $-20\,dB/$décade en HF

3)



## Exercice 4

***Filtre 1***

**a)** on fait des schémas équivalents en haute et basse fréquence

- En basse fréquence on a **s=e**

- En haute fréquence bobine=interrupteur ouvert donc i=0 et comme s=Ri on a **s=0**

**c'est donc un filtre passe bas**

**b)** Pont diviseur de tension en notation complexe $\boxed{\underline{H}(\omega)=\frac{1}{1+j\frac{L}{R}\omega}}$

**c)**

- En H.F ( quand ω tend vers l'infini) : $\underline{H}(\omega)\approx\frac{1}{j\frac{L}{R}\omega}$ donc $|\underline{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{\omega})| \to \mathbf{0}$ quand ω tend vers l'infini .

**L'amplitude de la sortie tend vers 0 en haute fréquence**

-En B.F $\underline{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{\omega})\approx\mathbf{1}$ la sortie est égale à l'entrée en basse fréquence

**on a bien un filtre passe bas**

**d)**

Diagramme en gain

**on pose** $\omega_0=\frac{R}{L}$

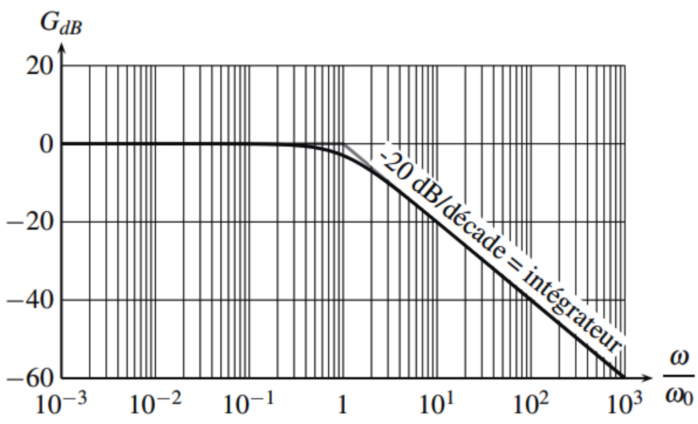


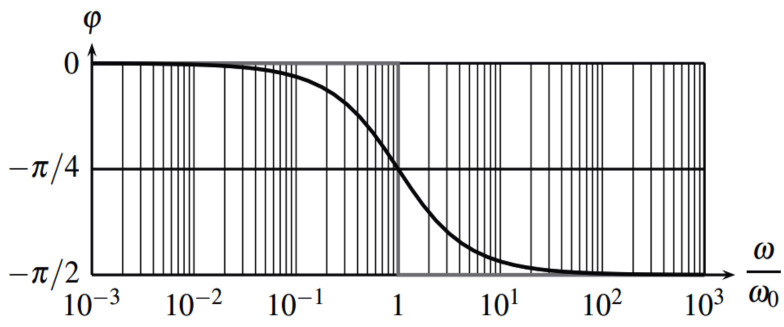

Diagramme de phase

-En B.F $\phi=arg(\underline{H})=arg(1)=\mathbf{0}$ ( car 1 est réel)

- en H.F :

Imaginaire pur de partie imaginaire négative

$$arg(\underline{H})\approx\arg\left(\frac{1}{j\frac{L}{R}\omega}\right)=arg(-j\frac{L}{R}\omega)=\frac{-\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}$$




***Filtre 2***

**a)** on fait des schémas équivalents en haute et basse fréquence et on déduit que c'est **un passe haut**

**b)** Pont diviseur de tension en notation complexe $\boxed{\underline{H}(\omega)=\frac{j\frac{L}{R}\omega}{1+j\frac{L}{R}\omega}}$

**c)**

- En H.F ( quand ω tend vers l'infini) : $\underline{H}(\omega)\approx\frac{j\frac{L}{R}\omega}{j\frac{L}{R}\omega}=1$ **la sortie est égale à l'entrée en haute fréquence**

-En BF $\underline{H}(\omega)\approx\frac{j\frac{L}{R}\omega}{1}$ ainsi $|\underline{H}(\omega)|\rightarrow 0$ **quand ω → 0 . L'amplitude de la sortie tend vers 0 en BF**

**on a bien un filtre passe haut**

**d)**

Diagramme en gain

**on pose** $\omega_0=\frac{R}{L}$

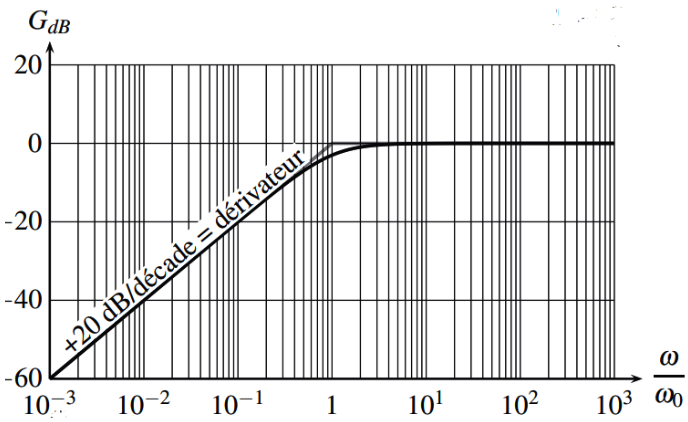
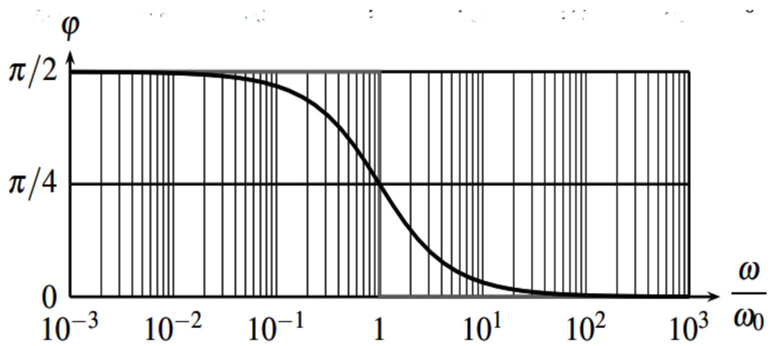



Diagramme de phase

Imaginaire pur de partie imaginaire positive

**-En B.F** $arg(\underline{H})=arg(j\frac{L}{R}\omega)=\boldsymbol{\frac{\pi}{2}}$

**-En H.F** $arg(\underline{H})\approx\arg(1)=\mathbf{0}$




## Exercice 5

Un élève a tracé sur du papier logarithmique le diagramme de Bode ci-dessous.

1) c'est un filtre passe bas car le module de la fonction de transfert diminue fortement quand la fréquence augmente . On peut voir que sur une décade le gain diminue de 20 dB , **c'est donc un filtre passe-bas du premier ordre**

2)

On a pour un passe bas du premier ordre : $\underline{H}(\omega)=\frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_0}}$

**En B.F** $\underline{H}(\omega)\approx 1$ donc :

- $GdB(\omega)=20\log|\underline{H}(\omega)|=20\log(1)=0$
  **La courbe de gain est donc asymptote à une droite d'équation GdB =0 en B.F**

- $\underline{H}(\omega)\approx 1\Rightarrow\phi(\omega)=arg((\underline{H}(\omega)))=0$

**La courbe de déphasage est donc asymptote à une droite d'équation φ = 0° en B.F**

**- en H.F :** $\underline{H}(\omega) \approx \frac{1}{j\frac{\omega}{\omega_0}}$ donc :

- $GdB(\omega) = 20\log|\underline{H}(\omega)| = 20\log\left(\frac{1}{\frac{\omega}{\omega_0}}\right) = -20\log(\frac{\omega}{\omega_0})$

**La courbe de GdB est donc asymptote à une droite (en échelle log) de pente – 20 dB /décade en HF**

( Quand on multiplie par 10 la fréquence le gain en dB diminue de 20 dB )

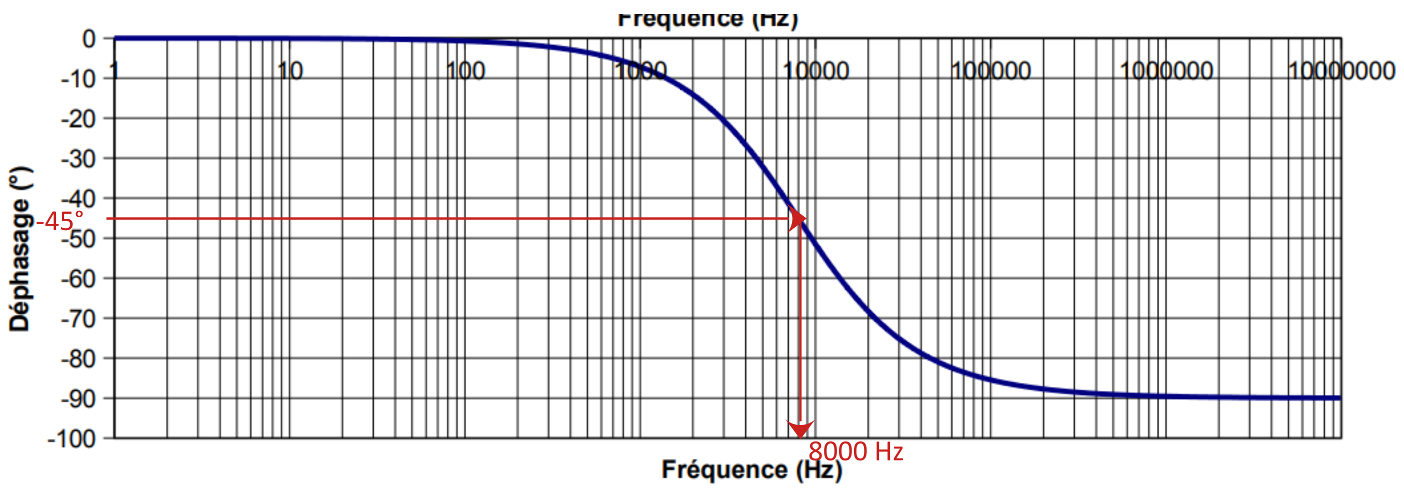
- $\underline{H}(\omega) \approx 1 \Rightarrow \phi(\omega) = arg\left(\frac{1}{j\frac{\omega}{\omega_0}}\right) = \frac{-\pi}{2}$

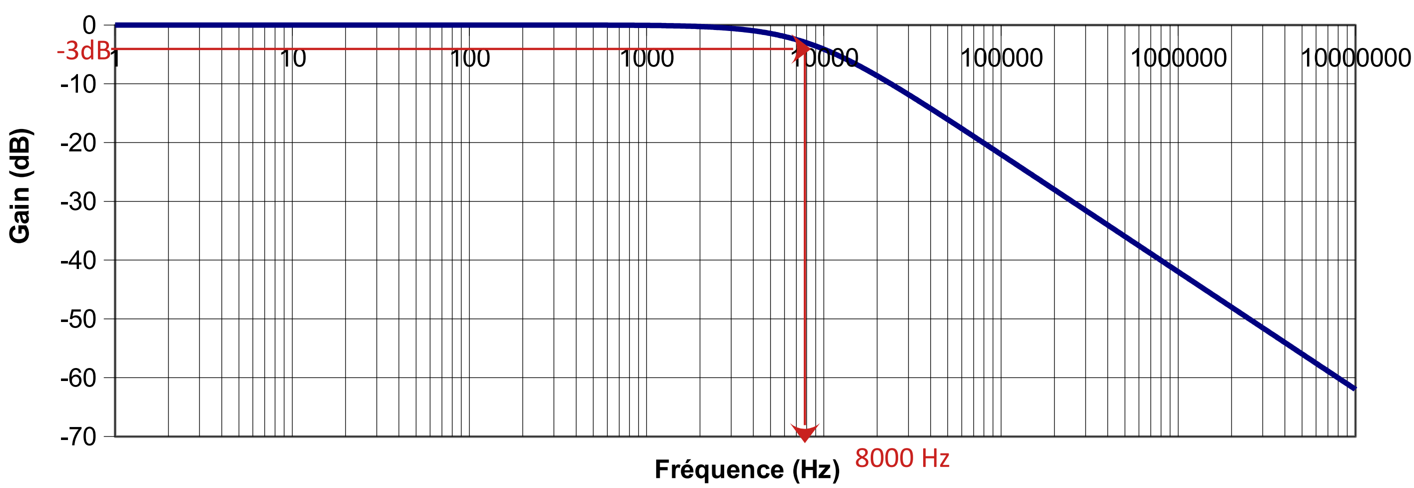
**La courbe de déphasage est donc asymptote à une droite d'équation φ = -90° en H.F**

**3)** Quand $\omega = \omega_0$ $\underline{H}(\omega = \omega_0) = \frac{1}{1+j}$ et $GdB(\omega_0) = 20\log|H(\omega_0)| = 20\log(\frac{1}{\sqrt{2}}) \approx -3$

et $\phi(\omega_0) = arg(\frac{1}{1+j}) = arg(1) - arg(1+j) = -\arctan(1) = \frac{-\pi}{4}$

on cherche donc la pulsation ( ici la fréquence) à laquelle GdB = -3 dB et pour laquelle le déphasage vaut 45° (les deux méthodes doivent donner le même résultat )



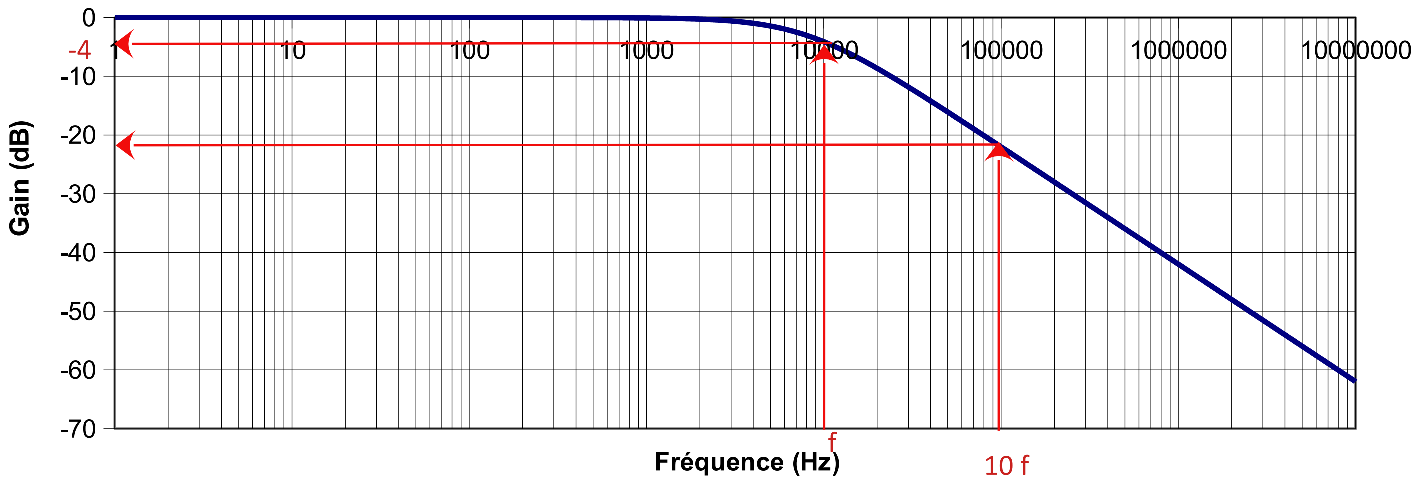

$f_0$ = 8000 Hz donc $\boxed{\omega_0 = 2\pi f_0 = 5{,}0 10^4 rad \cdot s^{-1}}$

4)

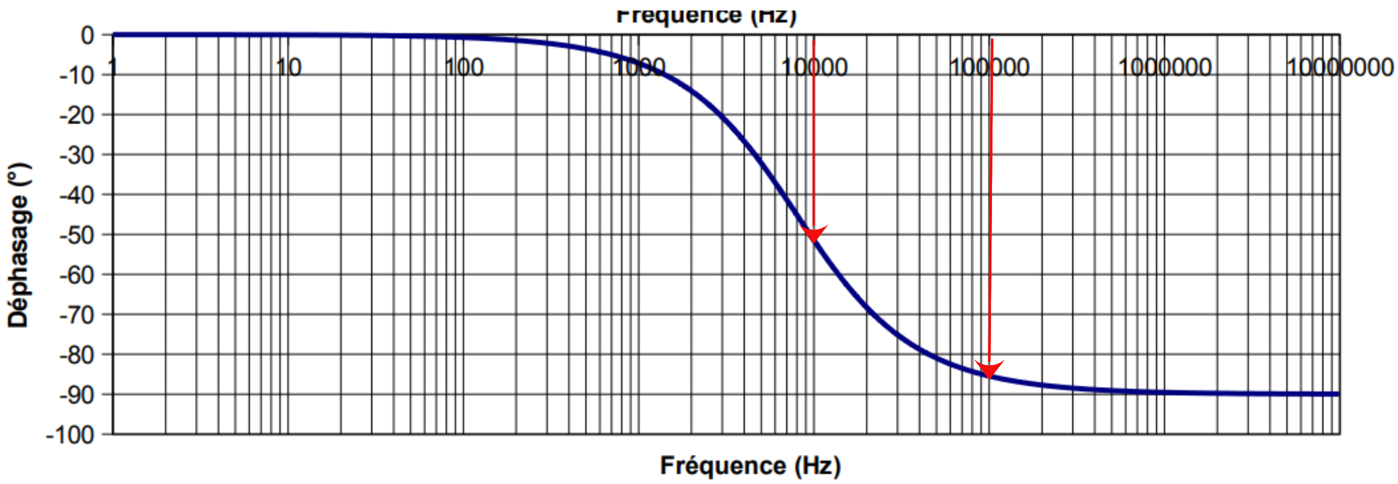
$$s(t)=|\underline{H}(f)|2\cos(f\,t+arg(\underline{H}(f)))+|\underline{H}(10f)|0{,}5\cos(10f\,t+arg(\underline{H}(10f)))$$

Par lecture graphique : $20\log(|\underline{H}|(f))=-4 \Rightarrow |\underline{H}|(f)=10^{\frac{-4}{20}}=0{,}64$

$20\log(|\underline{H}|(10f))=-22 \Rightarrow |\underline{H}|(10f)=10^{\frac{-22}{20}}=0{,}08$




enfin pour la phase



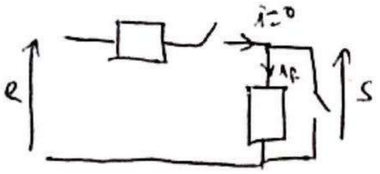

on trouve $arg(\underline{H}(10f))=-85\,°$ et $arg(\underline{H}(f))=-50\,°$

finalement $\boxed{s(t)=1{,}24\cos(2\pi f\,t-50\frac{\pi}{180})+0{,}04\cos(2\pi\,10f\,t-85\frac{\pi}{180})}$

**ex 6** Filtre de Wien

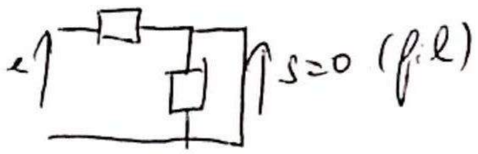
1)

schéma eq en TBF :




$\underline{s} = R i_{AB} = 0$ car $i_{AB} = 0$

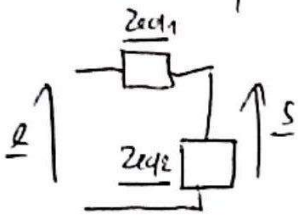
schéma eq en THF :




$\underline{s}$ est nul en THF et TBF $\Rightarrow$ c'est un filtre passe-bande

2)

schéma équivalent




PdT complexe $\quad \underline{s} = \dfrac{\underline{Z_{eq2}}}{\underline{Z_{eq1}} + \underline{Z_{eq2}}}\underline{e}$ avec $\underline{Z_{eq1}} = R + \dfrac{1}{jC\omega}$

$\underline{Z_{eq2}} = \dfrac{R \times \frac{1}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}}$

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{\dfrac{\frac{R}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}}}{R + \dfrac{1}{jC\omega} + \dfrac{R/jC\omega}{R + \frac{1}{jC\omega}}} = \frac{R/jC\omega}{\left(R + \frac{1}{jC\omega}\right)^2 + \frac{R}{jC\omega}}$$

$$\underline{H} = \frac{R}{jC\omega\left(R^2 + \frac{2R}{jC\omega} + \left(\frac{1}{jC\omega}\right)^2\right) + R}$$

$$\underline{H} = \frac{R \times 1}{R \times \left(jRC\omega + 2 + \frac{1}{jRC\omega} + 1\right)} = \frac{1}{3 + j\left(RC\omega - \frac{1}{RC\omega}\right)}$$

$$\boxed{\underline{H} = \frac{1/3}{1 + j \times \frac{1}{3}\left(RC\omega - \frac{1}{RC\omega}\right)}}$$

on pose $\boxed{H_0 = 1/3 \quad \omega_0 = \frac{1}{RC} \quad Q = \frac{1}{3}}$

On retrouve la fonction de transfert d'un passe-bande d'ordre 2

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

2) $H_{max} = |\underline{H}(\omega=\omega_0)| = H_0$ $\qquad |\underline{H}| = \dfrac{H_0}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$

analogue à la résonance en intensité

on cherche $\omega$ tel que $|\underline{H}(\omega)| = \dfrac{H_0}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \dfrac{1}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

Soit $1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 = 2 \Leftrightarrow \dfrac{\omega}{\omega_0}-\dfrac{\omega_0}{\omega} = \dfrac{1}{Q}$ ou $\dfrac{\omega}{\omega_0}-\dfrac{\omega_0}{\omega} = -\dfrac{1}{Q}$

$\times\omega$

$\Leftrightarrow \dfrac{\omega^2}{\omega_0} - \omega_0 - \dfrac{1}{Q}\omega = 0$

$\Leftrightarrow \omega^2 - \dfrac{\omega\omega_0}{Q} - \omega_0^2 = 0$ $\qquad \Rightarrow \omega^2 + \dfrac{\omega\omega_0}{Q} - \omega_0^2 = 0$

4 racines au total et seulement 2 positives :

$\omega_2 = \dfrac{+\omega_0}{2Q} + \dfrac{\sqrt{\frac{\omega_0^2}{Q^2}+4\omega_0^2}}{2}$ et $\omega_1 = \dfrac{-\omega_0}{2Q} + \dfrac{\sqrt{\frac{\omega_0^2}{Q^2}+4\omega_0^2}}{2}$

largeur de bande $\boxed{\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \dfrac{\omega_0}{Q}}$

allure asymptotique de $G_{dB}(\omega)$ :

à BF $\dfrac{\omega}{\omega_0} \ll 1$ $\qquad \underline{H} \simeq \dfrac{H_0}{jQ\left(\frac{\omega_0}{\omega}\right)} \Rightarrow G_{dB}(\omega) = 20\log(|\underline{H}|) \simeq 20\log(H_0) + \boxed{20\log(\omega)} - 20\log(Q\omega_0)$

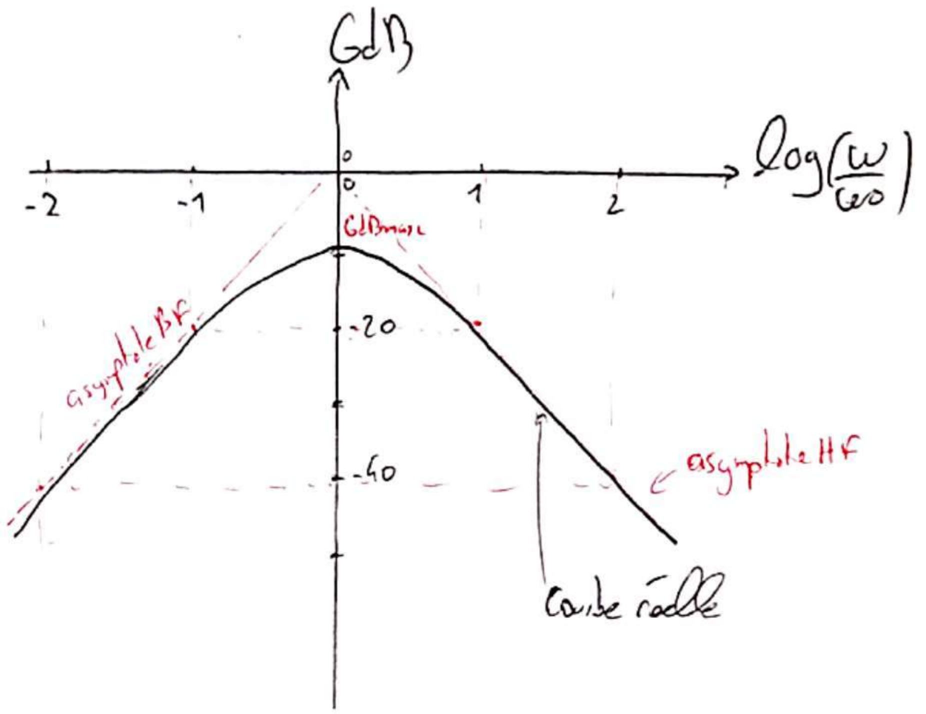
pente +20dB/décade

à HF $\dfrac{\omega}{\omega_0} \gg 1$ $\qquad \underline{H} \simeq \dfrac{H_0}{jQ\frac{\omega}{\omega_0}} \Rightarrow G_{dB}(\omega) \simeq 20\log(H_0) - 20\log\left(\dfrac{Q}{\omega_0}\right) \boxed{-20\log(\omega)}$

pente -20dB par décade à HF

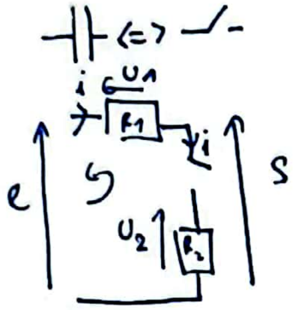
et $G_{dB\,max} = 20\log\left(\underbrace{\dfrac{1}{3}}_{H_0}\right) = -9{,}5\text{ dB}$

Les asymptote se coupent quand $\omega = \omega_0$ et elles valent alors $20\log\left(\dfrac{H_0}{Q}\right) = 20\log(1) = 0$


GdB
log(ω/ω0)
-2
-1
0
1
2
GdBmax
-20
-40
asymptote BF
asymptote HF
Courbe réelle

# Exercice 7

en TBF



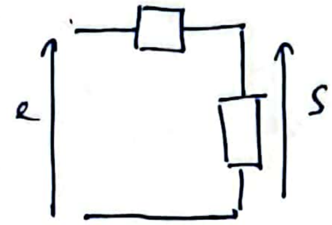

LdM : $e = U_1 + s$

ici : $U_1 = R_1 i$

avec $i = 0 \Rightarrow U_1 = 0$

$\boxed{e = s}$

en THF

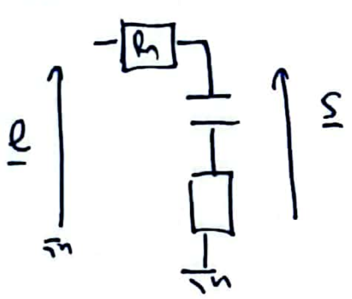



PdT :

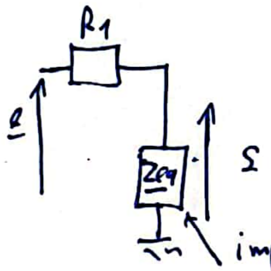
$$\boxed{s = \frac{R_1}{R_1 + R_2} e}$$

Ni un passe haut ni un passe bas

2)




$\Leftrightarrow$




$$\underline{Z_{eq}} = \underline{Z_C} + R_2 = \frac{1}{jC\omega} + R_2$$

impédance équivalente $\underline{Z_{eq}} = \dfrac{1 + jR_2C\omega}{jC\omega}$

$R_1$ et $\underline{Z_{eq}}$ en série $\Rightarrow$ Pont diviseur de tension

$$\underline{s} = \frac{\underline{Z_{eq}}}{R_1 + \underline{Z_{eq}}} \underline{e}$$

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{\dfrac{1 + jR_2C\omega}{jC\omega}}{R_1 + \dfrac{1 + jR_2C\omega}{jC\omega}} = \frac{1 + jR_2C\omega}{jR_1C\omega + 1 + jR_2C\omega} = \frac{1 + jR_2C\omega}{1 + j(R_1+R_2)C\omega}$$

$$\boxed{\underline{H} = \frac{1 + j\omega\tau}{1 + j\omega\tau'}}$$

avec $\tau = R_2 C$ et $\tau' = (R_1 + R_2) C$

Rmq : $\dfrac{1}{R_2C} > \dfrac{1}{(R_1+R_2)C}$ $(R_1 > 0, R_2 > 0)$

3) • en BF : $\left(\omega \ll \dfrac{1}{\tau'} \ll \dfrac{1}{\tau}\right)$ : $\underline{H} \simeq 1 \rightarrow \underline{G_{dB} = 20 \log 1 = 0}$

• en moyenne fréquence $\dfrac{1}{\tau'} \ll \omega \ll \dfrac{1}{\tau}$ : $1 + j\omega\tau' \simeq j\omega\tau'$ et $1 + j\omega\tau \simeq 1$

On suppose que $\tau'$ et $\tau$ sont très différents

$$\underline{H} \simeq \frac{1}{j\omega\tau'} \Rightarrow |\underline{H}| = \frac{1}{\omega\tau'}$$

$G_{dB}(\omega) = 20\log\left(\frac{1}{\omega\tau'}\right) = \underline{-20\log(\omega\tau')}$ $\left(\text{Pour } \frac{1}{\tau'} \ll \omega \ll \frac{1}{\tau}\right)$

$G_{dB}(10\omega) = -20dB + G_{dB}(\omega)$

la courbe

$G_{dB}(\omega)$ possède une asymptote de pente $-20dB/$décade

dans la gamme de pulsation $\frac{1}{\tau'} \ll \omega \frac{1}{\tau}$

en HF : $\omega \gg \frac{1}{\tau} \gg \frac{1}{\tau'}$ : $\underline{H} \simeq \frac{j\omega\tau}{j\omega\tau'} = \frac{\tau}{\tau'} \Rightarrow |\underline{H}| = \frac{\tau}{\tau'}$

$G_{dB}(\omega) = 20\log\left(\frac{\tau}{\tau'}\right)$ ← droite horizontale d'équation $G_{dB} = 20\log\left(\frac{\tau}{\tau'}\right)$

les cassures se trouve en $\omega_1 = \frac{1}{\tau'}$ et $\omega_2 = \frac{1}{\tau}$

Pour la phase

- BF $\underline{H} = 1 \rightarrow \underline{\varphi = \arg(0) = 0}$
- Moyenne F $\underline{H} \simeq \frac{1}{j\omega\tau'} = -j \times \frac{1}{\omega\tau'} \Rightarrow \varphi = \arg\left(-j\frac{1}{\omega\tau'}\right) \boxed{= -\frac{\pi}{2}}$

Nombre imaginaire pur avec Partie imaginaire négative

Plus précisement $\varphi = \arg(1 + j\omega\tau) - \arg(1 + j\omega\tau')$
$= \arctan(\omega\tau) - \arctan(\omega\tau')$

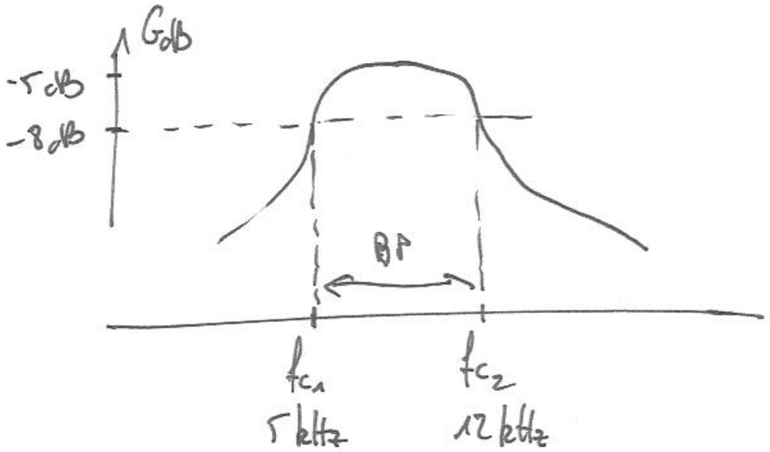
- HF $\underline{H} \simeq \frac{\tau}{\tau'}$ $\underline{\arg(\underline{H}) = 0}$

# Ex 8

1) $G_{dB}^{MAX} = -5\,dB$ (lecture graphique)

2) BP : ensemble des $f$ tel que $G_{dB} \geq G_{dB}^{MAX} - 3dB$

c.à.d $G_{dB} \geq -8dB$




$$\boxed{BP = [5\,kHz\ ;\ 12\,kHz]}$$

3) BF : $+60\,dB/dec$

HF : $-60\,dB/dec$

4) ⓐ $f = 0{,}6\,kHz$, $G_{dB} = -73\,dB$, $G = 2{,}2 \cdot 10^{-4}$ $\left(= 10^{G_{dB}/20}\right)$

$S_m = G\,E_m \simeq 0$.

ⓑ $E_m = 10\,V$, $\omega = 6280\,rad/s$, $f = \frac{\omega}{2\pi} = 1{,}00\,kHz$

$G_{dB} = -59\,dB$, $G = 1{,}1 \cdot 10^{-3} \rightarrow S_m \simeq 0$.

ⓒ $f = \frac{\omega}{2\pi} = 9{,}0\,kHz$ $G_{dB} = -5\,dB$, $G = 0{,}56$

$S_m = G\,E_m = 0{,}56 \times 10 = 5{,}6\,V$.

ⓓ $e_4(t) = 2\cos(2\pi\, 10 \cdot 10^3 t) + 20\cos(2\pi \cdot 30 \cdot 10^3 t)$ (V)

$f = 10\,kHz$ $G_{dB} = -6\,dB$ | $f = 30\,kHz$ $G_{dB} = -38\,dB$

$S_1 = 2 \times 10^{-6/20} = 1\,V$ | $S_2 = 20 \times 10^{-38/20} = 0{,}25\,V$

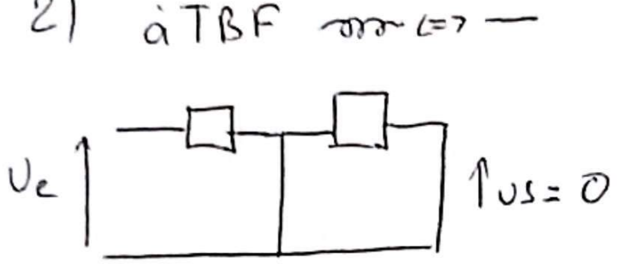
ⓔ Seul le fondamental passe ($9\,kHz \in BP$ ; $3 \times 9 = 27\,kHz \notin BP$).

$\rightarrow$ signal de sortie sinusoïdal à 9 kHz d'amplitude qqes volts.

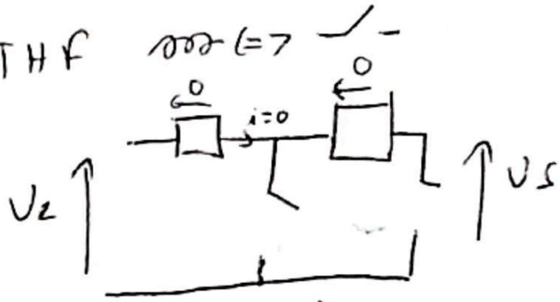
## Ex 9

1) On peut utiliser un <u>passe-bas</u> de fréquence de coupure environ 4 KHz pour récupérer les signaux téléphoniques et un filtre <u>passe-haut</u> de fréquence de coupure environ 25 KHz pour les signaux informatiques.

2) à TBF




à THF

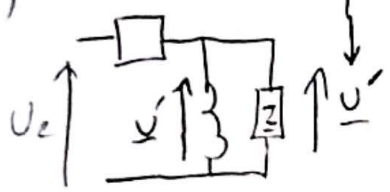


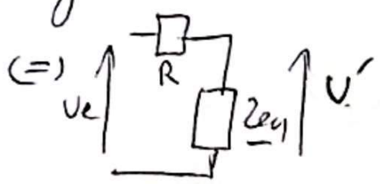

$U_s = U_e$

le filtre est donc un <u>passe-haut</u> utile pour récupérer <u>les signaux informatiques</u>

3) ⚠ $\boxed{\text{pas égale à Us !}}$

avec $\underline{Z} = jL\omega + R$



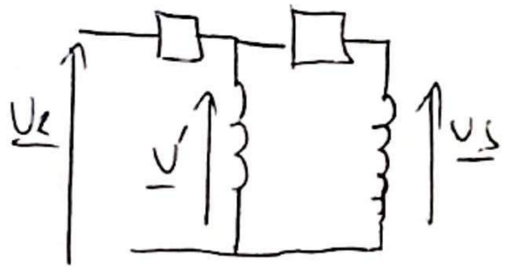

avec $\underline{Z_{eq}} = \dfrac{(jL\omega+R)jL\omega}{2jL\omega+R}$

PdT (impédances en série) $\underline{U'} = \dfrac{\underline{Z_{eq}}}{\underline{Z_{eq}}+R}\,\underline{U_e}$

donc $\dfrac{\underline{U'}}{\underline{U_e}} = \dfrac{(jL\omega+R)jL\omega}{(2jL\omega+R)\left(R + \dfrac{jL\omega(jL\omega+R)}{2jL\omega+R}\right)} = \dfrac{(jL\omega+R)jL\omega}{2jLR\omega + R^2 + jL\omega(jL\omega+R)}$

Ce n'est pas $\underline{H}$

$$\frac{\underline{U'}}{\underline{U_e}} = \frac{(jL\omega+R)jL\omega}{R^2+3jLR\omega-L^2\omega^2} = \frac{\left(j\frac{L}{R}\omega+1\right)j\frac{L}{R}\omega}{1+3j\frac{L}{R}\omega-\left(\frac{L}{R}\omega\right)^2} \quad (1)$$



on a aussi avec un autre PdT

$$\underline{U_s} = \frac{jL\omega}{jL\omega + R}\,\underline{U'}$$

donc $\underline{U_s} = \dfrac{jL\omega}{jL\omega + R}\,\underline{U'}$ (1)

en utilisant (1)

$$\underline{U_s} = \frac{jL\omega}{jL\omega+R}\,\frac{(j\frac{L}{R}\omega+1)\,j\frac{L}{R}\omega}{(1+3j\frac{L}{R}\omega-(\frac{L}{R}\omega)^2}\,\underline{U_e}$$

$$\underline{H} = \frac{\underline{U_s}}{\underline{U_e}} = \frac{j\frac{L}{R}\omega}{\cancel{j\frac{L\omega}{R}+\frac{R}{R}}}\,\frac{\cancel{(j\frac{L}{R}\omega+1)}\,j\frac{L}{R}\omega}{(1+j3\frac{L}{R}\omega-(\frac{L}{R}\omega)^2}$$

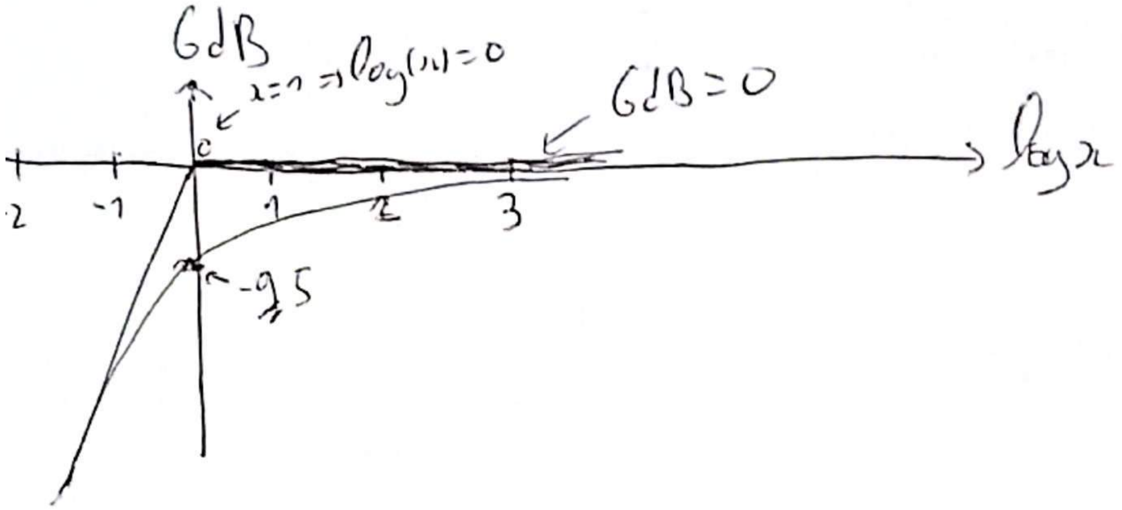
$$\boxed{\underline{H} = \frac{-\left(\frac{L}{R}\omega\right)^2}{1+j3\frac{L}{R}\omega-\left(\frac{L}{R}\omega\right)^2}}$$

$$\boxed{\omega_0 = \frac{R}{L} \qquad x = \frac{\omega}{\omega_0}}$$

4) $x \gg 1$, $\underline{H} \to 1$, $G_{dB} \simeq 0$ et $\varphi \simeq 0$

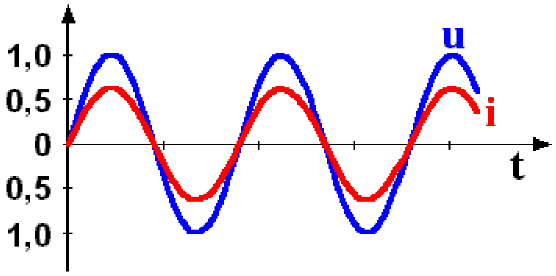
$x \ll 1$ $\underline{H} \simeq -x^2 \Rightarrow G_{dB} = 20\log(|-x^2|)$ et $\varphi = +\pi$

$G_{dB}(x=1) = 20\log\left(\left|\frac{1}{3}\right|\right) = -9{,}5\,dB$ $\quad G_{dB} = 40\log x$ | pente +40dB/décade



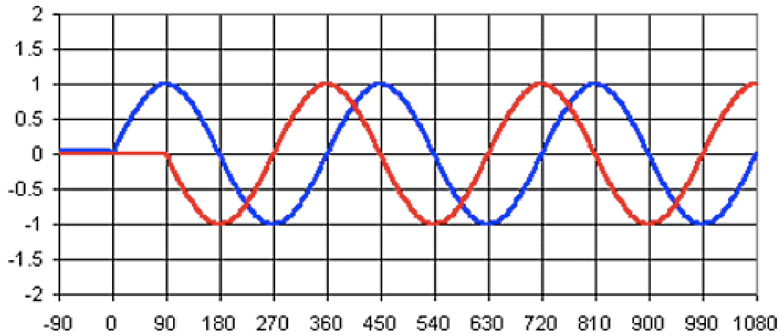

5) $f_0 = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{R}{2\pi L} \Rightarrow \boxed{L = \frac{R}{2\pi f_0}}$ A.N $\underline{L = 1,6\,mH}$

## Exercice 10



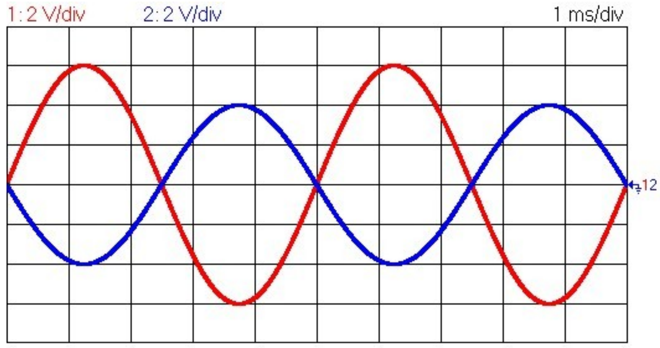

ϕ=0

Les signaux sont en phase



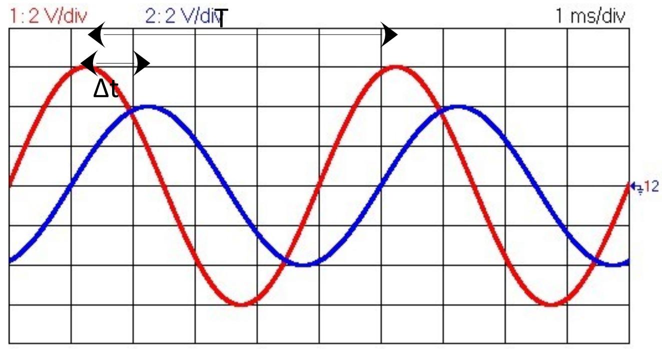

|ϕ|=π/2

Les signaux sont en quadrature de phase et le signal rouge est en avance sur le bleu




|ϕ|=π

Les signaux sont en opposition de phase




$$|\Phi| = 2\pi\frac{\Delta t}{T} = 2\pi\frac{(1\,ms)}{5\,ms} = 2\frac{\pi}{5}$$

2)

$\boxed{1}$ Commençons par étudier la tension $v_1$.

▷ Elle est symétrique par rapport à l'axe des temps donc $\langle v_1 \rangle = 0{,}0\,\mathrm{V}$.

▷ Sa valeur maximale vaut environ 1,3 V, donc **$v_1$ a pour amplitude 1,3 V**.

▷ La courbe coupe l'axe des temps dans le sens montant pour $t = -4{,}1\,\mathrm{ms}$, puis $-1{,}1\,\mathrm{ms}$, puis $1{,}9\,\mathrm{ms}$, ... On en déduit que **le période de la tension $v_1$ vaut $T_1 = 3{,}0\,\mathrm{ms}$**. Évidemment, on peut aussi regarder la position de minima, des maxima, etc.

▷ Par conséquent, **sa fréquence vaut $f_1 = 1/T_1 = 3{,}3 \cdot 10^2\,\mathrm{Hz}$**.

Procédons de même pour la tension $v_2$.

▷ La tension $v_2$ est comprise entre $-0{,}6\,\mathrm{V}$ et $1\,\mathrm{V}$. Comme elle est harmonique, sa moyenne s'en déduit directement et vaut $\langle v_2 \rangle = 0{,}2\,\mathrm{V}$.

▷ À partir de la lecture de la valeur maximale 1,0 V (ou minimale !), on en déduit que **l'amplitude vaut 0,8 V**.

▷ La période et la fréquence valent à nouveau **$T_2 = 3{,}0\,\mathrm{ms}$ et $f_2 = 3{,}3 \cdot 10^2\,\mathrm{Hz}$**

Les deux tensions ont la même fréquence, **elles sont donc synchrones** par définition.

> *Une difficulté dans les questions de ce type est de donner aux valeurs numériques une précision raisonnable : ici il n'est pas possible de faire mieux que 0,1 ms et 0,1 V. Par conséquent, certaines valeurs n'ont qu'un seul chiffre significatif alors que d'autres en ont deux. Il ne faut pas pour autant oublier les « ,0 » lorsque c'est pertinent.*
>
> *En outre, vous ne devez surtout pas oublier de donner des unités correctes à toutes les valeurs !*

$\boxed{2}$ La tension $v_2$ atteint son maximum avant $v_1$ : **$v_2$ est en avance de phase sur $v_1$**. Pour mesurer le décalage temporel $\Delta t$, le plus simple est de regarder les instants où les courbes atteignent deux maxima les plus proches, par exemple en 2,6 ms pour $v_1$ et 1,6 ms pour $v_2$. Ainsi,

$$\boxed{\Delta t_{21} = -1{,}0\,\mathrm{ms}} \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\Delta\varphi_{21} = +2\pi f\,|\Delta t_{21}| = \frac{2\pi}{3}}$$

> *Un autre point de repère, a priori un peu plus précis, consiste à repérer les instants où les tensions atteignent leur valeur moyenne avec une pente de même signe. Attention, c'est le passage par la valeur moyenne qui importe, pas celui par l'axe des temps. Pour éviter cet écueil, les méthode utilisant les maxima est plus fiable.*
>
> *Attention au signe tant du décalage temporel que du déphasage. On étudie $v_2$ par rapport à $v_1$ et c'est $v_2$ qui passe par son maximum le premier, le décalage temporel est négatif mais le déphasage est positif. On peut voir ici l'intérêt de retenir la relation avec des valeurs absolues mais de contrôler le signe à la main par lecture du chronogramme !*

$\boxed{3}$ La dépendance en temps des deux tensions est de la forme $\cos(2\pi f\,t + \varphi_i)$, avec $i = 1$ ou 2. On cherche ici les deux phases $\varphi_i$. Pour cela, l'idée est de se ramener à une mesure sur le chronogramme qui s'apparente à une mesure de déphasage par rapport à une tension de référence fictive, qu'on notera 0. Le déphasage de la tension $i$ par rapport à la tension 0 vaut

$$\Delta\varphi_{i0} = \varphi_i - \varphi_0$$

et il est égal à $\varphi_i$ si $\varphi_0 = 0$. Cette tension de référence est donc du type $A_0\cos(\omega t)$. Le point de repère à considérer pour définir correctement le décalage temporel est le maximum de cette fonction, qui se trouve en $t = 0$. Pour connaître les phases initiales, il suffit donc de lire sur le chronogramme l'instant le plus proche de $t = 0$ où les tensions atteignent leurs valeurs maximales. On lit respectivement $t_1 = -0{,}4\,\mathrm{ms}$ et $t_2 = -1{,}4\,\mathrm{ms}$. Ainsi,

$$\boxed{\begin{cases} \varphi_1 = -2\pi f(t_1 - 0) = 0{,}7\,\mathrm{rad} \\ \varphi_2 = -2\pi f(t_2 - 0) = 2{,}9\,\mathrm{rad} \end{cases}}$$

Là encore, les signes peuvent être contrôlés à la main : les deux tensions atteignent leur plus proche maximum avant $t = 0$, et sont donc en avance de phase par rapport à la tension fictive de référence.