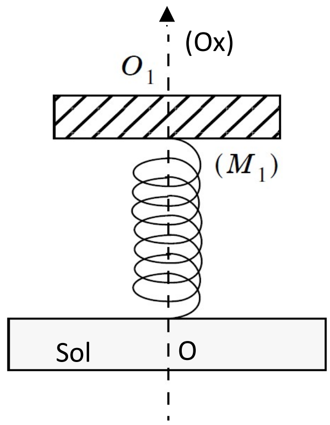
DM05 à faire en groupe de 3 pour le 20/12

Exercice 1 ! Régime transitoire mécanique (Extrait Centrale Supélec)



Un miroir M_1 de masse m=100g est fixé à un ressort qui le supporte. Le ressort, de raideur k et de masse négligeable devant m, est assujetti à se déplacer verticalement grâce à un système de guidage. L'ensemble repose sur le sol qui constitue un référentiel galiléen. Le miroir M_1 peut donc osciller verticalement le long de l'axe (Ox), on suppose que ces oscillations sont amorties par une force de frottements fluide $\vec{F_v} = -f\vec{v}$ où $\vec{v}$ est la vitesse instantanée de M_1 et f un coefficient de frottement positif. A l'équilibre, la surface réfléchissante de M_1 est dans le plan horizontal contenant O_1 (soir la figure ci-dessous). On repère la position du miroir par son élongation x par rapport à la position d'équilibre. Par définition on a donc x=0 à l'équilibre.

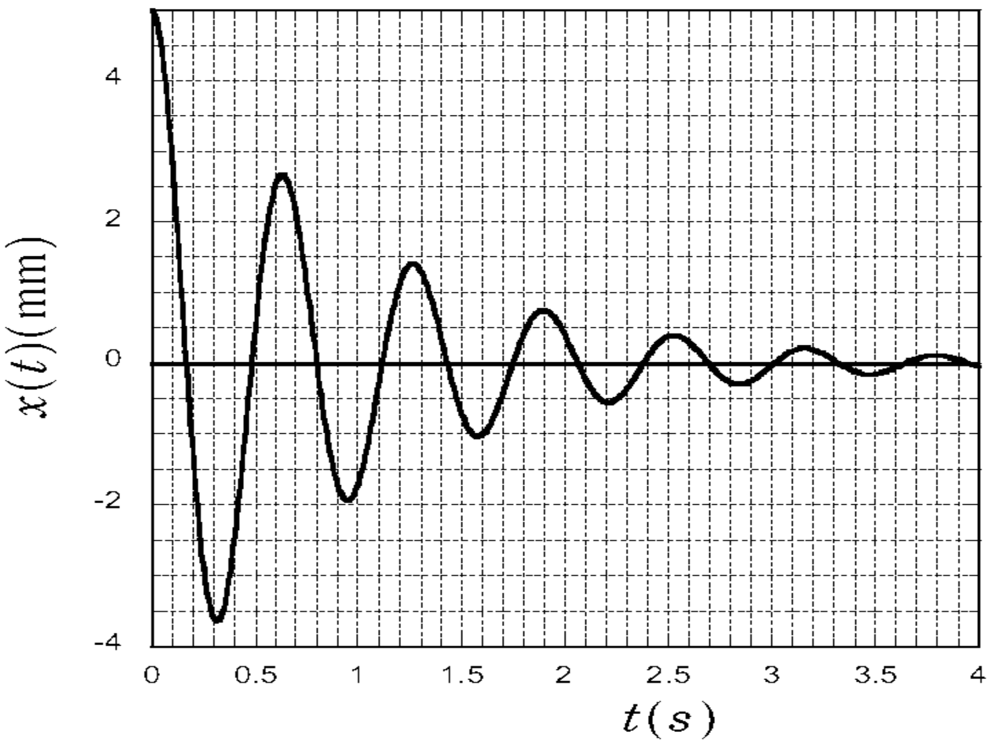
1. On suppose que le miroir M_1 est élevé d'une hauteur x_0, puis lâché sans vitesse initiale. Etablir l'équation différentielle vérifiée par x(t). On pourra poser, pour simplifier les écritures : $\lambda = \frac{f}{2m}$ et $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$.

2. La figure ci-dessous (page suivante) donne le graphe de x(t) du mouvement de M_1. En s'appuyant sur ce graphe, résoudre l'équation différentielle de la question précédente. N.B. : si la forme de la solution est connue, il n'est pas nécessaire de l'établir. On attend x(t) en fonction de λ, ω_0, x_0 et t. On pourra introduire une pseudo-pulsation ω à définir.

3. On définit le décrément logarithmique : $\delta = \frac{1}{n} \ln\left(\frac{x(t) - x_\infty}{x(t+nT) - x_\infty}\right)$

Établir une relation simple entre δ et λ.

4. Déterminer, à partir du graphe, les ordres de grandeur de ω_0, λ, f et k. Justifier.



5. Comparer les valeurs numériques de T (pseudo période) et T_0 (période propre).

6. En déduire que l'énergie mécanique $E_m(t)$ du système vérifie :

$$\frac{E_m(t) - E_m(t+T)}{E_m(t)} \approx \frac{2\pi}{Q}$$

On rappelle que pour $x \ll 1$, $\exp(x) \sim 1 + x$.

Problème 2

Le Millenium Bridge (Mines Ponts)

Pour marquer le millénaire, une nouvelle passerelle a été construite au-dessus de la Tamise à Londres pour un coût total de plus de 20 millions de Livres Sterling. Quand elle fut ouverte aux piétons on remarqua très vite qu'elle se balançait latéralement et verticalement en cas de forte affluence. Avec un grand nombre de piétons, son mouvement oblique était tel que la plupart d'entre eux s'arrêtaient et s'accrochaient aux rampes. Des images et des vidéos ont montré que ces mouvements latéraux pouvaient avoir une amplitude moyenne de 75 mm et qu'ils se produisaient avec des fréquences de l'ordre du Hertz. Le pont fut donc fermé deux jours après son ouverture au public. Dix-huit mois de recherches furent nécessaires pour résoudre le problème et faire les modifications préconisées par les ingénieurs qui furent donc finalement consultés.

L'objectif de ce problème est la modélisation d'une passerelle piétonne et la compréhension de certains problèmes posés par le Millenium Bridge de Londres.

Les vecteurs sont surmontés d'un chapeau s'ils sont unitaires $\hat{u}_x$ ou d'une flèche dans le cas général $\vec{v}$. À l'exception de j tel que $j^2 = -1$, les grandeurs complexes sont soulignées : $\underline{z}$. Un point sur une grandeur indique la dérivée par rapport au temps de cette grandeur : $\dot{x}=\dfrac{dx}{dt}$.

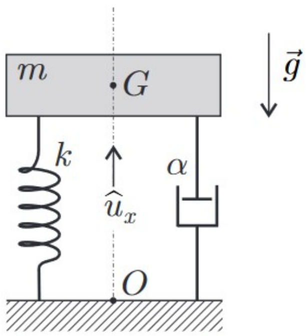


FIG. 1 – Oscillateur

Un oscillateur est constitué d'une masse m, dont le centre d'inertie G est repéré par la position x dans le référentiel galiléen (O, $\hat{u}_x$) : voir figure 1. L'origine O se situe au niveau du sol. L'oscillateur est relié à un support fixe par l'intermédiaire d'un ressort linéaire de raideur k et de longueur à vide l_0 ainsi que d'un amortisseur linéaire de viscosité α, exerçant sur m une force de frottements $\vec{F}_f=-\alpha\,\dot{x}\,\hat{u}_x$. À tout instant t, on assimile la distance OG à la longueur l (t) du ressort. L'ensemble est soumis à l'accélération de la pesanteur avec $\vec{g}=-g\,\hat{u}_x$ avec $g = 9{,}81\ \mathrm{m.s^{-2}}$.

❑ **1** – En appliquant la relation fondamentale de la dynamique établir l'équation différentielle $\ddot{X}+2\,\xi\omega_0\,\dot{X}+\omega_0^2 X=0$ dans laquelle on a introduit la fonction $X(t)=x(t)-\tilde{x}$ où $\tilde{x}$ est une constante que l'on déterminera en fonction de g, ω_0 et l_0. On précisera les expressions et significations de ω_0 et ξ.

❑ **2** – Dans le régime libre, le système est mis en vibration uniquement par des conditions initiales non nulles $X(0) = X_0 \neq 0$ et $\dot{X}=V_0\neq 0$. Déterminer les solutions du régime libre (en fonction de ω_0, ξ, X_0, V_0 et t) pour les cas $\xi = 0$ et $0 < \xi < 1$ et préciser leur comportement. Dans certains cas, le vent peut induire sur le système une force proportionnelle au vecteur vitesse que l'on écrit $\vec{F}_v=\beta\,\dot{x}\,\hat{u}_x$, avec $\beta > 0$. Quelle peut être la conséquence de ce phénomène ?

Différents cas peuvent être examinés pour l'excitation (ou forçage) $F(t)$ de l'oscillateur étudié lors des deux premières questions. Nous nous placerons dans l'optique d'une passerelle piétonne. L'action de la marche d'un piéton est caractérisée par un contact continu sur la surface du sol puisque le second pied touche le sol avant que le premier ne le quitte. La force engendrée comprend une composante verticale et une composante horizontale non prise en compte dans ce problème.

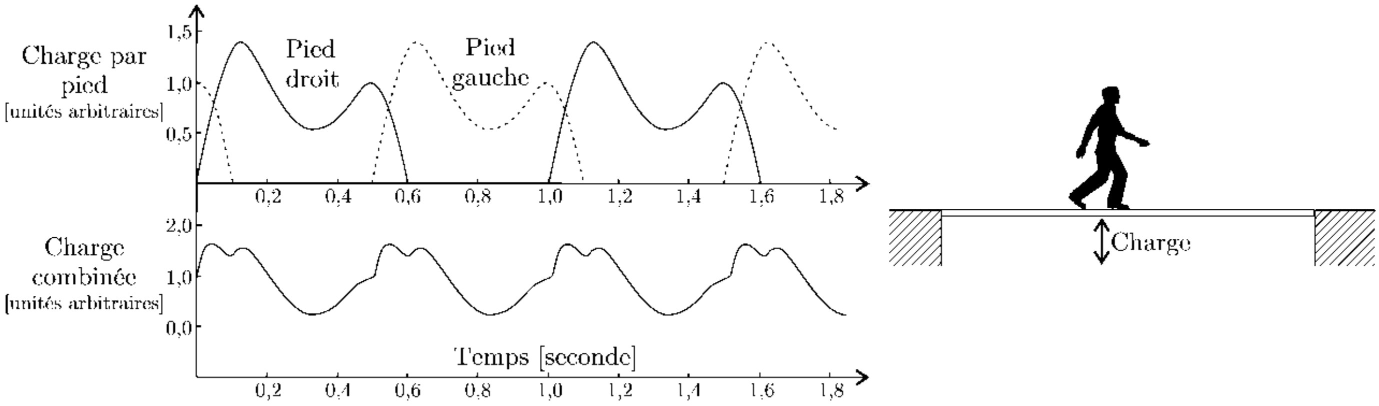


FIGURE 2 – Forçage d'une passerelle par la marche d'un piéton.

Dans le cadre d'un modèle simplifié, nous représenterons cette force, appelée charge, par un vecteur périodique $\vec{F}(t)=\vec{F}_0+\vec{F}_1\cos(2\pi ft)$. Le vecteur $\vec{F}_0$ correspond à la force statique, c'est-à-dire au poids du piéton, la fréquence f correspond à celle d'une marche normale. Nous considérerons que $\vec{F}_1=0{,}4\vec{F}_0$ .Ces deux vecteurs seront supposés constants et orientés comme $-\hat{u}_x$. On note $F_0=\|\vec{F}_0\|$ le module de la force statique, $Y = X + F_0/m\omega_0^2$ la réponse en déplacement de l'oscillateur et $\underline{Y} = \underline{Y_m}e^{j\omega t}$ sa représentation complexe.

❑ **3** – Montrer que, sous le forçage piéton, l'équation de l'oscillateur en Y est :

$$\ddot{Y}+2\xi\omega_0\dot{Y}+\omega_0^2 Y=\frac{-F_1}{m}\cos(2\pi ft)$$

Exprimer $\underline{Y_m}$ en fonction de F_1, m, ξ, ω_0 et $\Omega = \omega/\omega_0$, avec $\omega=2\pi f$.

❑ **4** – Sous quelle condition (à établir) portant sur ξ un phénomène de résonance peut-il se produire ? Pour quelle pulsation ω_r obtient-on alors ce phénomène ? Donner l'expression de la valeur maximale de Y_m à la résonance dans la limite ξ^2<<1.

❑ **5** – En se plaçant dans l'hypothèse ξ^2<<1 et à partir d'une analyse de la courbe 1 de la figure 3, déterminer un ordre de grandeur de la pulsation propre ω_0 de l'oscillateur modélisant le Millenium Bridge avant la mise en place des amortisseurs harmoniques. Sur la courbe, $|\underline{H}|=\dfrac{m|\underline{Y_m}|}{F_1}$.

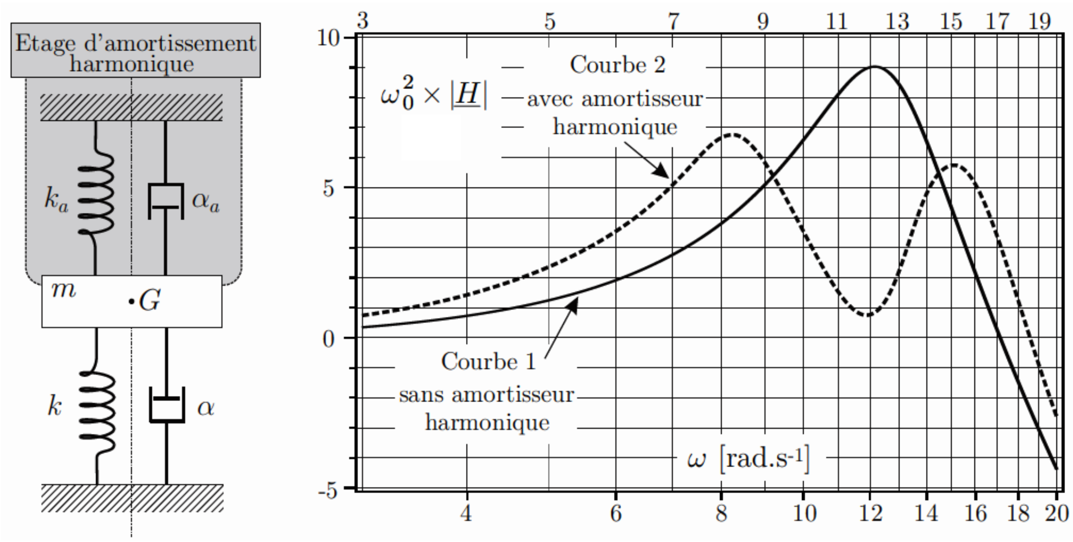


FIGURE 3 – Schéma et réponse d'un amortisseur harmonique appliqué au modèle du Millenium Bridge

❑ **6** – Pourquoi est-il important de déterminer les fréquences de résonance d'une structure soumise à une action périodique ?

Afin d'étudier précisément les propriétés du forçage que constitue la marche d'un piéton, on réalise l'acquisition en laboratoire du signal correspondant à cette sollicitation. L'acquisition est effectuée sur des durées allant de quelques secondes à quelques minutes. Les signaux ainsi obtenus sont similaires mais pas parfaitement identiques. Chacun de ces signaux présente les caractéristiques essentielles du signal de la charge combinée représentée sur la figure 2. On calcule alors le spectre de ces signaux en les échantillonnant en N = 300 points équidistants sur un intervalle [t_{min}, t_{max}]. Les différents spectres obtenus sont rassemblés sur la figure 4.

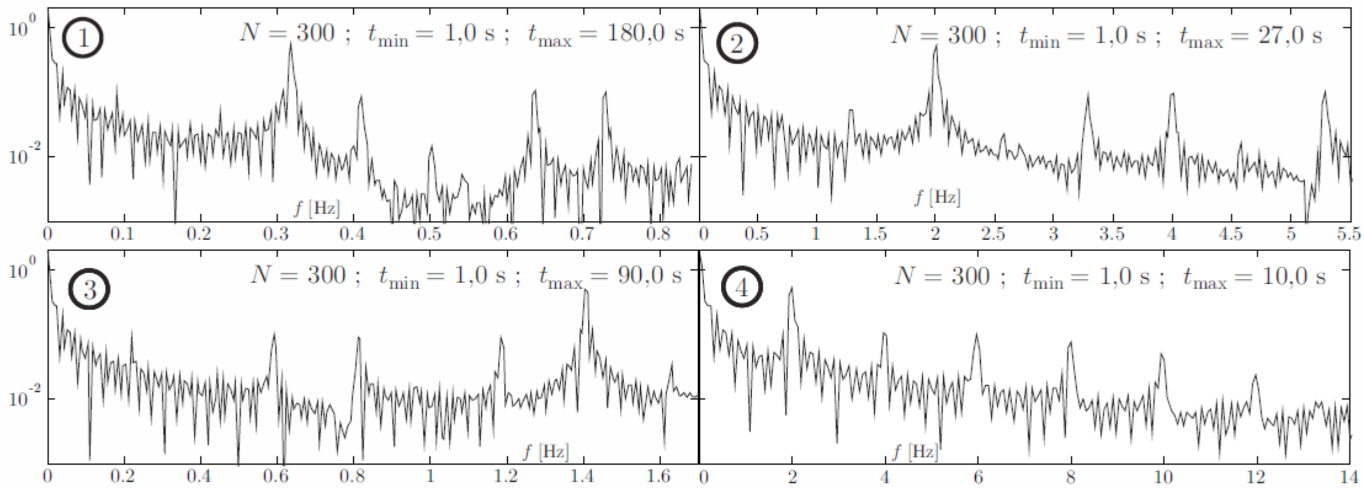


FIGURE 4 – Spectres des signaux correspondants à la marche d'un piéton

❑ **7** – Expliquer pourquoi le spectre 4 est le plus pertinent à analyser et expliquer son allure. En déduire la (ou les) fréquence(s) caractéristique(s) de la marche étudiée. Était-ce qualitativement prévisible ?

❑ **8** – À partir d'une exploitation des données fournies dans le sujet, expliquer l'origine du problème concernant le Millenium Bridge et justifier que l'installation d'amortisseurs harmoniques ait pu le résoudre.