DM05

1] Système {miroir M_1}
référentiel : Terrestre supposé galiléen

PFD : $m\frac{d\vec{v}}{dt} = \underset{\text{force de rappel du ressort}}{\vec{F}} + \underset{\text{poids}}{\vec{P}} + \underset{\text{force de frottement}}{\vec{F_v}}$

Projection sur (Ox)

$m\frac{dv}{dt} = -K(l(t)-l_0) - mg - fv$

$m\ddot{x} + Kl(t) + f\dot{x} = K(l_0 - \frac{mg}{K})$

$m\ddot{x} + K\underbrace{(l(t)-(l_0-\frac{mg}{K}))}_{x(t)} + \frac{f}{m}\dot{x} = 0$

$\boxed{\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + w_0^2 x = 0}$

Rmq : à l'équilibre système au repos donc forces se compensent :
$\vec{F} + \vec{P} + \vec{F_v} = \vec{0}$
$\vec{F_v} = \vec{0}$ car $\vec{v} = \vec{0}$

ainsi $\vec{F} = \vec{P}$
$-K(l_0 - l_{eq}) = -mg$

$\boxed{l_{eq} = l_0 - \frac{mg}{K}}$

donc $x(t) = l(t) - l_{eq}$
longueur du ressort à l'instant t

2] Polynome caractéristique $r^2 + 2\lambda r + w_0^2 = 0$
ici régime pseudo-périodique donc $\Delta < 0 \Rightarrow 4(\lambda^2 - w_0^2) < 0$
$\Rightarrow \lambda < w_0$

$r_1 = -\lambda + i\underbrace{\sqrt{w_0^2-\lambda^2}}_{w = \sqrt{w_0^2-\lambda^2}}$ $\quad r_2 = -\lambda - iw$

Ainsi $\boxed{x(t) = e^{-\lambda t}(A\cos(wt) + B\sin(wt))}$

Autre méthode $\frac{w_0}{Q} = 2\lambda \Rightarrow \lambda = \frac{w_0}{2Q}$ ainsi $w = w_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}$

conditions initiales : $\boxed{A = x_0}$ et comme $V_0 = 0 \Rightarrow \boxed{B = \frac{A\lambda}{w} = \frac{\lambda x_0}{w}}$ $\quad w = \sqrt{w_0^2-\lambda^2}$

3] $x_\infty = \lim_{t\to\infty}(x(t)) = 0$ car $e^{-\lambda t} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$

$x(t+nT) = e^{-\lambda(t+nT)}(A\underbrace{\cos(w(t+nT))}_{=\cos(wt)\text{ car }\cos(wt)\text{ est T périodique}} + B\underbrace{\sin(w(t+nT))}_{=\sin(wt)\text{ car }\sin(wt)\text{ est T périodique}})$

Ainsi $x(t+nT) = e^{-\lambda nT} \times \underbrace{e^{-\lambda t}(A\cos(wt) + B\sin(wt))}_{x(t)}$

$= e^{-\lambda nT}x(t) \Rightarrow \frac{x(t)-x_\infty}{x(t+nT)-x_\infty} = \boxed{\frac{x(t)}{x(t+nT)} = e^{\lambda nT}}$

ainsi $\delta = \frac{1}{n}\ln(e^{-\lambda nT}) \Rightarrow \boxed{\delta = -\lambda T}$

4]

Par lecture graphique

$6T = 3,8\,s$

$T = \frac{3,8}{6} = \boxed{0,63\,s}$ $\quad w = \frac{2\pi}{T} = 9,97\,rad.s^{-1}$

si on prend en compte les 3 premières pseudo-oscillations

$x(3T) = 0,75\,mm$
$x(0) = 5\,mm$ $\quad \delta = \frac{1}{3}\ln\left(\frac{5}{0,75}\right) \simeq 0,63$

$\lambda T = 0,63$ donc $\boxed{\lambda \simeq 1\,s^{-1}}$

$w^2 = w_0^2 - \lambda^2 \Rightarrow w_0^2 = w^2 - \lambda^2 = 9,97^2 - 1^2 \simeq 98,4$

$\boxed{w_0 = \sqrt{98,4} = 9,92\,rad.s^{-1} \simeq w}$

$w_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} \Rightarrow \boxed{K = w_0^2 m}$ A.N $K = 98,4 \times 0,1 = \underline{9,84\,N/m}$

$2\lambda = \frac{f}{m} \Rightarrow \boxed{f = 2m\lambda}$ A.N $\boxed{f \simeq 0,2\ N.m^{-1}.s}$

5] $w \simeq w_0 \Rightarrow T \simeq T_0$

6.] $A\cos(wt) + B\sin(wt) = C\cos(wt + \varphi)$
avec $C = \sqrt{A^2+B^2}$ et $\varphi = \arccos\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)$

Ainsi $x(t) = e^{-\lambda t} \times C\cos(\omega t+\varphi)$

$E_p(t) = \frac{1}{2} k x^2(t) = \frac{1}{2} k C^2 e^{-2\lambda t} \cos^2(\omega t+\varphi)$

$E_c(t) = \frac{1}{2} m \dot{x}^2(t)$ or $\dot{x}(t) = -\lambda e^{-\lambda t} \times C\cos(\omega t+\varphi) - \omega C e^{-\lambda t} \sin(\omega t+\varphi)$

$$E_c(t) = \frac{1}{2} m \left(\lambda^2 e^{-2\lambda t} C^2 \cos^2(\omega t+\varphi) + \omega^2 C^2 e^{-\lambda t} \sin^2(\omega t+\varphi) + 2\lambda \omega C^2 e^{-2\lambda t} \cos(\omega t+\varphi)\sin(\omega t+\varphi) \right)$$

$$E_p(t+T) = \frac{1}{2} k C^2 e^{-2\lambda t} \times e^{-2\lambda T} \cos^2(\omega(t+T)+\varphi) = \underline{e^{-2\lambda T} \times E_p(t)}$$

de même

$$E_c(t+T) = e^{-2\lambda T} E_c(t)$$

donc $E_m(t+T) = E_m(t) \times e^{-2\lambda T}$

$$\frac{E_m(t) - E_m(t+T)}{E_m(t)} = 1 - e^{-2\lambda T},$$

comme $-2\lambda T << 1$ (ce n'est pas vraiment le cas ici mais admettons)

on a $e^{-2\lambda T} \simeq 1 - 2\lambda T$

donc $1 - e^{-2\lambda T} \simeq 2\lambda T \simeq 2\lambda T_0$

Comme $Q = \frac{\omega_0}{2\lambda} = \frac{2\pi}{2\lambda T_0} = \frac{\pi}{\lambda T_0}$

On a bien

$$\boxed{\frac{E_m(t) - E_m(t+T)}{E_m(t)} = \frac{2\pi}{Q}}$$

DM06

1] Système étudié {oscillateur} Référentiel : Terrestre supposé galiléen

Bilan des forces :
- $\vec{P} = -mg\,\hat{u}_x$
- $\vec{F_f} = -\alpha \dot{x}\,\hat{u}_x$
- Force de rappel du ressort $\vec{F_k} = -k(l(t)-l_0)\hat{u}_x = -k(x-l_0)\hat{u}_x$

Principe fondamental de la dynamique appliqué au système :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{F_f} + \vec{F_k} \xrightarrow{\text{Projection sur }(Ox)} m\ddot{x} = -mg - \alpha\dot{x} - k(x-l_0)$$

$$m\ddot{x} + \alpha\dot{x} + kx = -mg + kl_0$$

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{k}{m}\left(l_0 - \frac{mg}{k}\right)$$

On pose $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$, $\boxed{\tilde{x} = l_0 - \frac{g}{\omega_0^2}}$ et $2\xi\omega_0 = \frac{\alpha}{m} \Rightarrow \boxed{\xi = \frac{\alpha}{2\sqrt{mk}}}$

on a alors $\ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 \tilde{x}$

en posant $X(t) = x(t) - \tilde{x}$ on retrouve bien $\ddot{X} + 2\xi\omega_0\dot{X} + \omega_0^2 X = 0$

2] si $\xi = 0$ $\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0$ c'est l'équation différentielle associée à un oscillateur harmonique

les solutions sont de la forme

$$X(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$

à $t=0$ $X(0) = A = X_0$ et $\dot{X}(t) = B\omega_0\cos(\omega_0 t) - A\omega_0\sin(\omega_0 t)$

$\dot{X}(0) = B\omega_0 \Rightarrow B = \frac{V_0}{\omega_0} \Rightarrow X(t) = X_0\cos(\omega_0 t) + \frac{V_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)$

On observe une oscillation du pont qui n'est pas atténuée au cours du tps

si $0 < \xi < 1$ l'équation caractéristique associée à l'équation différentielle est

$$r^2 + 2\xi\omega_0 r + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \Delta = 4\xi^2\omega_0^2 - 4\omega_0^2 = 4\omega_0^2 \underbrace{(\xi^2-1)}_{<0 \text{ car } \xi<1}$$

$$r_{1,2} = -\xi\omega_0 \pm i\omega_0\sqrt{1-\xi^2}$$

les solutions sont de la forme

$$X(t) = e^{-\xi\omega_0 t}\left(A\cos(\omega_0\sqrt{1-\xi^2}\,t) + B\sin(\omega_0\sqrt{1-\xi^2}\,t)\right)$$

d'après les conditions initiales

$$X(0) = A = X_0$$

$$\dot{X}(t) = -\xi\omega_0 X(t) + e^{-\xi\omega_0 t}\left[-\omega_0\sqrt{1-\xi^2}\,A\sin(\omega_0\sqrt{1-\xi^2}\,t) + B\omega_0\sqrt{1-\xi^2}\cos(\omega_0\sqrt{1-\xi^2}\,t)\right]$$

$$\dot{X}(0) = -\xi\omega_0 A + B\omega_0\sqrt{1-\xi^2} \Rightarrow B = \frac{\xi}{\sqrt{1-\xi^2}} X_0$$

l'amplitude du mouvement est enveloppée par des exponentielles décroissantes de constante de temps $\tau = \frac{1}{\omega_0 \xi}$ l'amplitude de l'oscillation du pont va progressivement décroitre (d'autant plus rapidement que ξ est grand)

Si on considère une force supplémentaire $\vec{F_v} = \beta \dot{x}\hat{u_x}$

l'equation diff du mvt devient :

$$\ddot{X} + \frac{\alpha-\beta}{m}\dot{X} + \omega_0^2 X = 0$$

si $\beta > \alpha \Rightarrow \frac{\alpha-\beta}{m} < 0$ les coefficients devant $\ddot{X}$, $\dot{X}$ et X ne sont pas de même signe, les solutions ne seront pas stables (l'amplitude des oscillations va diverger (tendre vers $+\infty$)) le pont peut céder ! (Pont de Tacoma)

3] Bilan des forces sur le système dans cette situation :

$\vec{P} = -mg\hat{u_x}$ $\quad$ $-\vec{F_f} = -\alpha\dot{x}\hat{u_x} = -2m\xi\omega_0\dot{x}\hat{u_x}$

$-\vec{F_R} = -K(x-l_0)\hat{u_x}$ $\quad$ et $\quad$ $\vec{F}(t) = -F_0\hat{u_x} - F_1\cos(2\pi f t)\hat{u_x}$

Le PFD en projection sur (Ox) s'écrit alors

$$m\ddot{x} = -mg - Kx + Kl_0 - 2m\xi\omega_0\dot{x} - F_0 - F_1\cos(2\pi f t)$$

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2\left(l_0 - \frac{mg}{K}\right) - \frac{F_0}{m} - \frac{F_1}{m}\cos(2\pi f t)$$

Si on pose $Y = X + \frac{F_0}{m\omega_0^2} = X + \frac{F_0}{m\omega_0^2} = x(t) - \tilde{x} - \left(-\frac{F_0}{m\omega_0^2}\right)$

ainsi $x(t) = Y + \tilde{x} - \frac{F_0}{m\omega_0^2}$ et $\dot{x}(t) = \dot{Y}$ et $\ddot{x} = \ddot{Y}$

l'équation différentielle du mvt devient alors :

$$\ddot{Y} + 2\xi\omega_0\dot{Y} + \omega_0^2\left(Y + \tilde{x} - \frac{F_0}{m\omega_0^2}\right) = \omega_0^2\tilde{x} - \frac{F_0}{m} - \frac{F_1}{m}\cos(2\pi f t)$$

on retrouve bien $\ddot{Y} + 2\xi\omega_0\dot{Y} + \omega_0^2 Y = -\frac{F_1}{m}\cos(2\pi f t)$

↳ Passage à la notation complexe

$$\underline{\ddot{Y}} + 2\xi\omega_0\underline{\dot{Y}} + \omega_0^2\underline{Y} = -\frac{F_1}{m}e^{j\omega t}$$

or $\underline{\dot{Y}} = j\omega\underline{Y}$ et $\underline{\ddot{Y}} = -\omega^2\underline{Y}$

donc on a : $\underline{Y}(\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega 2\xi\omega_0) = -\frac{F_1}{m}e^{j\omega t}$

or comme $\underline{Y}(t) = \underline{Y_m}e^{j\omega t}$

$$\text{finalement } \underline{Y_m} = -\frac{\frac{F_1}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2 + j2\xi\omega_0\omega} = \boxed{\frac{-\frac{F_1}{m\omega_0^2}}{1 - \Omega^2 + j2\xi\Omega}}$$

4] Le phénomène de résonance peut se produire si $|\underline{Y_m}|$ admet un maximum ($|\underline{Y_m}|$ étant l'amplitude réelle du déplacement de l'oscillateur)

$$|\underline{Y_m}| = \frac{\frac{F_1}{m\omega_0^2}}{\sqrt{(1-\Omega^2)^2 + (2\xi\Omega)^2}}$$

$|\underline{Y_m}|$ admet un maximum si $D(\Omega) = (1-\Omega^2)^2 + (2\xi\Omega)^2$ admet un minimum

$$D'(\Omega) = 2(-2\Omega)(1-\Omega^2) + 8\xi^2\Omega = 4\Omega(\Omega^2 - 1 + 2\xi^2)$$

si la résonance existe, pour une certaine pulsation ω_r on a $D'(\Omega_r) = 0$ avec $\Omega_r = \frac{\omega_r}{\omega_0}$

on a alors $4\Omega_r(\Omega_r^2 - 1 + 2\xi^2) = 0$

Soit $\Omega_r = 0 \Rightarrow w_r = 0 \rightarrow$ pas régime sinusoïdal donc pas intéressant

Soit $\Omega_r^2 - 1 + 2\xi^2 = 0 \Rightarrow \Omega_r = \sqrt{1 - 2\xi^2}$

$\Omega_r > 0$ existe seulement si $1 - 2\xi^2 > 0$

$\Rightarrow \boxed{\xi < \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ pour avoir résonance}}$

On a alors $\boxed{w_r = w_0\sqrt{1 - 2\xi^2}}$

si $\xi^2 << 1$ $\quad w_r \simeq w_0 \quad$ et $\Omega_r \simeq 1$

Ainsi $|\underline{Y_m}(\Omega_r)| = \dfrac{\frac{F_1}{m w_0^2}}{\sqrt{(1-1)^2 + (2\xi)^2}} = \boxed{\dfrac{F_1}{2m\xi w_0^2}}$

5] A la résonance $|\underline{Y_m}|$ est maximal donc $w_0^2|\underline{H}|$ est aussi maximal

l'abscisse du max de $w_0^2 \times |\underline{H}(w)|$ correspond à une pulsation $w_r = 12 \text{ rad.s}^{-1}$

or $w_r = w_0\sqrt{1 - 2\xi^2}$

Supposons que $\xi^2 << 1$ à la résonance $|\underline{Y_m}(\Omega_r)| = \dfrac{F_1}{2m\xi w_0^2}$

donc $w_0^2|\underline{H}(\Omega_r)| = \dfrac{w_0^2 m}{F_1}|\underline{Y_m}(\Omega_r)| = \boxed{\dfrac{1}{2\xi}}$

d'après le graphe $w_0^2|\underline{H}(\Omega_r)| \simeq 9 \Rightarrow \xi = \dfrac{1}{2 \times 9} \simeq 0{,}056$

$\xi^2 = 0{,}003 << 1$ donc l'hypothèse $\xi << 1$ est valide

Comme $\xi << 1$ on a $\boxed{w_r \simeq w_0 = 12 \text{ rad.s}^{-1}}$

6] Si la structure est soumise à une excitation sinusoïdale à la fréquence de résonance, l'amplitude de son mouvement peut devenir très importante ce qui peut conduire à sa destruction.
C'est embêtant.

7] le spectre 4 a été calculé en utilisant le plus faible intervalle de temps pour un nombre d'échantillon fixe ($N = 300$)
la fréquence d'échantillonage $f_E = \dfrac{N}{t_{max} - t_{min}}$ est donc maximale pour le spectre 4.
plus la fréquence d'échantillonage est importante + le spectre numérique sera précis

On remarque plusieurs "pics" associés à des fréquences multiples de 2 Hz.
C'est cohérent car le signal temporel du forçage (figure 2) est périodique de période $T = 0{,}5$ s mais non sinusoïdal
(donc $f_1 = \frac{1}{T}$)

D'après la décomposition en série de Fourier d'un signal périodique, on s'attend à ce que son spectre soit constitué de "pics" à des fréquences multiples de la fréquence fondamentale $f_1 = \frac{1}{T} = 2 \text{ Hz}$

Les fréquences caractéristiques sont donc $f_K = 2 \times K \quad K \in \mathbb{N}$
(2 = fréquence fondamentale)

8] $w_r = 12 \text{ rad.s}^{-1} \Rightarrow f_r = \dfrac{w_r}{2\pi} \simeq 2 \text{ Hz}$!

la fréquence de résonance du pont est très proche de la fréquence fondamentale du forçage crée par les piétons, ils peuvent donc faire rentrer le pont en résonance !

Les amortimeurs harmoniques ont permis de déplacer la fréquence de résonance du pont (2 valeurs $f_{r1} = \frac{8,2}{2\pi} = 1,3Hz$ et $f_{r2} = \frac{15}{2\pi} = 2,4Hz$)

De plus, avec les amortimeurs on voit que l'amplitude $|V_m|$ sera faible pour une fréquence d'excitation de $2Hz$ (caractéristique de la marche des pietons). Les pietons ne peuvent plus faire rentrer en résonance le pont avec le rythme de marche "classique" mais dans le cas où ils se mettent à courir c'est toujours possible.

(la fréquence d'excitation sera différente)