

# CHAP 11 : FILTRAGE LINÉAIRE

## Rapports de Jury :

-Pour tracer un diagramme de Bode (comportement fréquentiel), il est important que le signal d'entrée soit un signal sinusoïdal et de vérifier que ce signal reste sinusoïdal et de même fréquence en sortie (on se limite à l'étude de systèmes linéaires). Certains candidats ne semblent pas en connaître la raison.

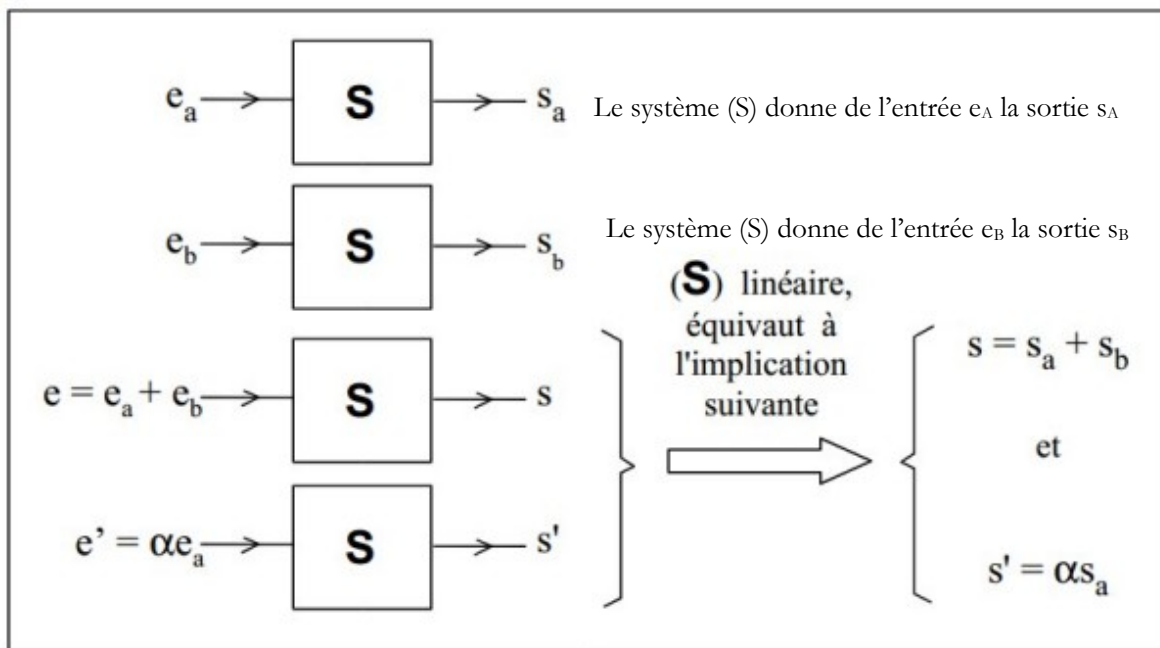
-La notion de bande-passante est mal maîtrisée. Pour un filtre passe-bas, par exemple, la bande-passante va de 0 à la fréquence de coupure identifiée à  $-3$  dB par rapport au gain en basse fréquence, et non depuis la borne moins l'infini.

-Le gain en décibels d'un système linéaire correspond au logarithme du module de la fonction de transfert (ou du rapport de l'amplitude du signal de sortie sur l'amplitude du signal d'entrée) multiplié par 20.

-La détermination de la fréquence de coupure à  $-3$  dB est souvent mal interprétée par les candidats. Il s'agit de la fréquence telle que le gain en décibels (défini précédemment) vaut le gain en décibels max dans la bande-passante diminuée de 3 dB. En amplitude, il s'agit de trouver la fréquence telle que le gain (rapport de l'amplitude du signal de sortie sur l'amplitude du signal d'entrée) a été diminué d'un facteur racine de deux par rapport au gain max dans la bande-passante.

## I étude de la réponse d'un système linéaire à un signal périodique

### I.1) Notion de système linéaire



(S) est un système linéaire si :

Pour une entrée combinaison linéaire de deux entrées,  $e(t) = \alpha e_a(t) + \beta e_b(t)$   
alors la sortie est la combinaison linéaire des deux réponses :  $s(t) = \alpha s_a(t) + \beta s_b(t)$

### I.2) Notion de spectre et décomposition spectral

Rappel : Le signal  $s(t)$  est dit périodique de période  $T$  si il se reproduit à l'identique après une durée  $T$  :  
c'est à dire que  $s(t+T) = s(t)$

#### a) Notion de décomposition spectrale d'un signal

Au 19<sup>ème</sup> siècle, Joseph Fourier montre que tout signal périodique  $s(t)$  peut être décomposé en une somme de signaux sinusoïdaux :

si  $s(t)$  est périodique alors  $\exists (s_i, f_i, \phi_i) \in \mathbb{R}^3$  tq :

$$s(t) = \sum_{i=0}^{\infty} s_i \cos(2\pi f_i t + \phi_i)$$



Ou plus précisément :

$$s(t) = S_0 + S_1 \cos(2\pi f_1 t + \phi_1) + \sum_{n=2}^{\infty} S_n \cos(2\pi f_n t + \phi_n)$$

Composante continue (« offset »)  $\rightarrow S_0$   
 Composante fondamentale  $\rightarrow S_1 \cos(2\pi f_1 t + \phi_1)$   
 Fréquence fondamentale telle que  $f_1 = \frac{1}{T}$  (T est la période du signal)  
 N<sup>i</sup>ème composante harmonique  $\rightarrow S_n \cos(2\pi f_n t + \phi_n)$   
 N<sup>i</sup>ème fréquence harmonique telle que  $f_n = n f_1 = n \frac{1}{T}$

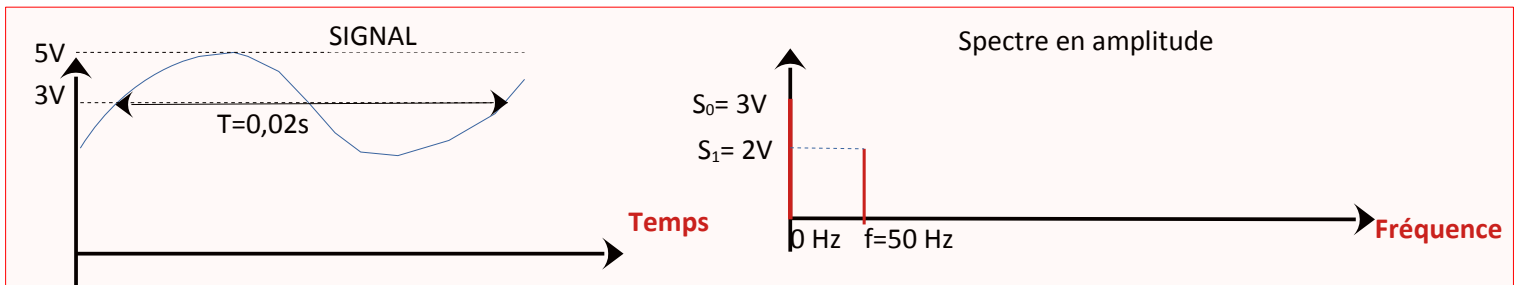
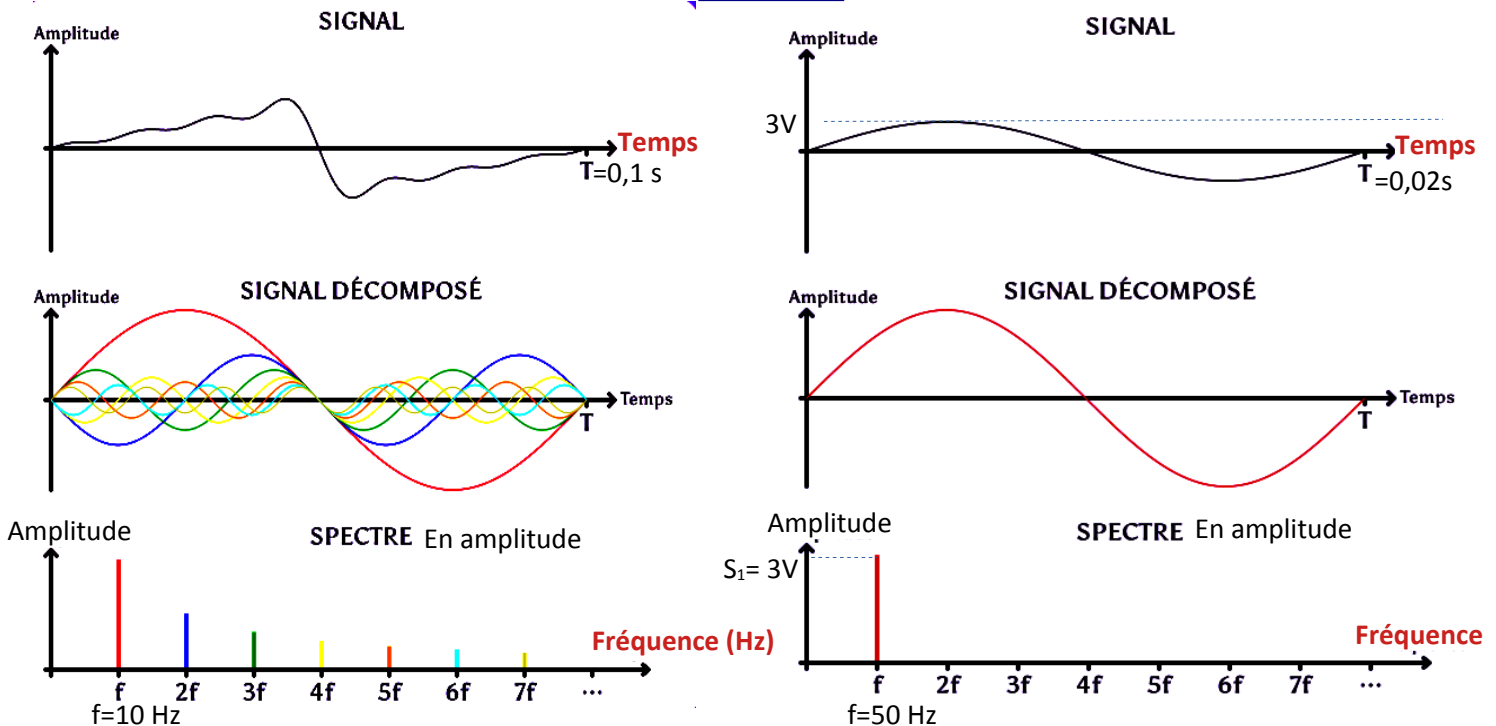
Voc : Cette écriture de s(t) constitue la décomposition spectrale de s(t)

**b) Notion de spectre**

L'étude spectrale du signal s(t) (ou établir le spectre de s(t) ), consiste à :

- Donner la liste des fréquences  $f_i$  des composantes qui possèdent une amplitude  $S_i$  non nulle ( les  $f_i$  sont les abscisses des « pics » dans le spectre )
- Donner la valeurs des amplitudes  $S_i$  de la fondamentale et des éventuels harmoniques ou de la composante continue ( hauteur des pics sur le spectre d'amplitude )
- Donner les valeurs des phases  $\phi_i$  ( hauteur des pics sur le spectre de phase que l'on représente rarement en pratique )

animation



**Rmq :** Si le signal possède une composante continue, le spectre en amplitude possède un pic à 0Hz de hauteur  $S_0$

### c) Valeur moyenne (composante continue)

$S_0$  est la valeur moyenne du signal (ou composante continue). Le signal oscille autour de cette valeur

$$S_0 = \langle s(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T s(t) dt$$



### d) valeur efficace d'un signal

Pour un signal périodique  $s(t)$  la valeur efficace de ce signal est :

$$S_{eff} = \sqrt{\langle s(t)^2 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T s(t)^2 dt}$$



**Intérêt :** Quand on utilise un multimètre pour mesurer une tension alternative (c'est à dire périodique) ou une intensité alternative, la valeur affichée est la grandeur efficace associée à la tension ou à l'intensité.

Elle intervient dans le calcul de la puissance moyenne dissipée par une résistance quand les grandeurs électriques sont alternatives

$$\langle P(t) \rangle = \langle R i(t)^2 \rangle = R \langle i(t)^2 \rangle = R I_{eff}^2 \quad \langle P(t) \rangle = \langle \frac{U(t)^2}{R} \rangle = \frac{\langle U(t)^2 \rangle}{R} = \frac{U_{eff}^2}{R}$$

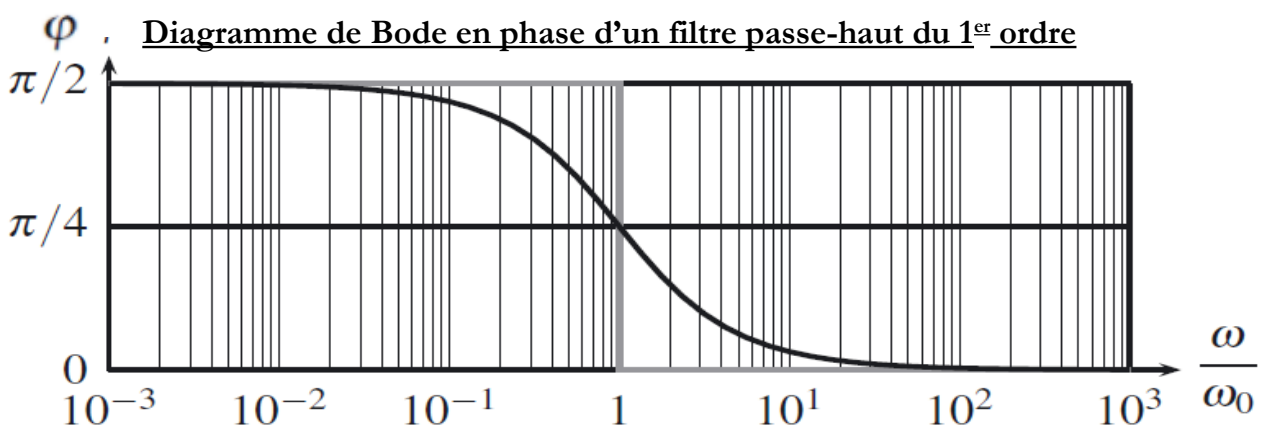
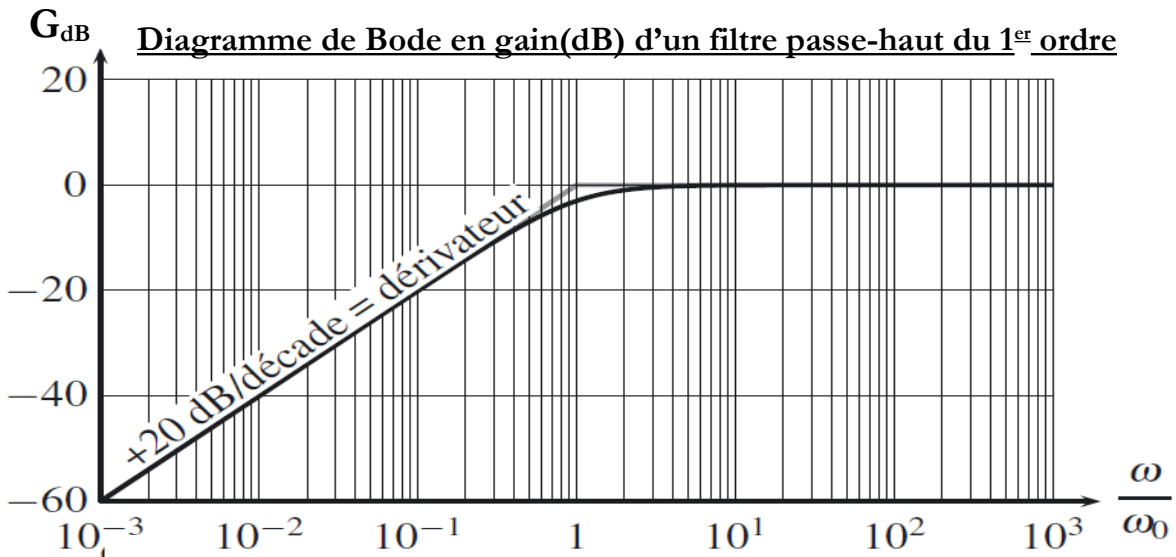
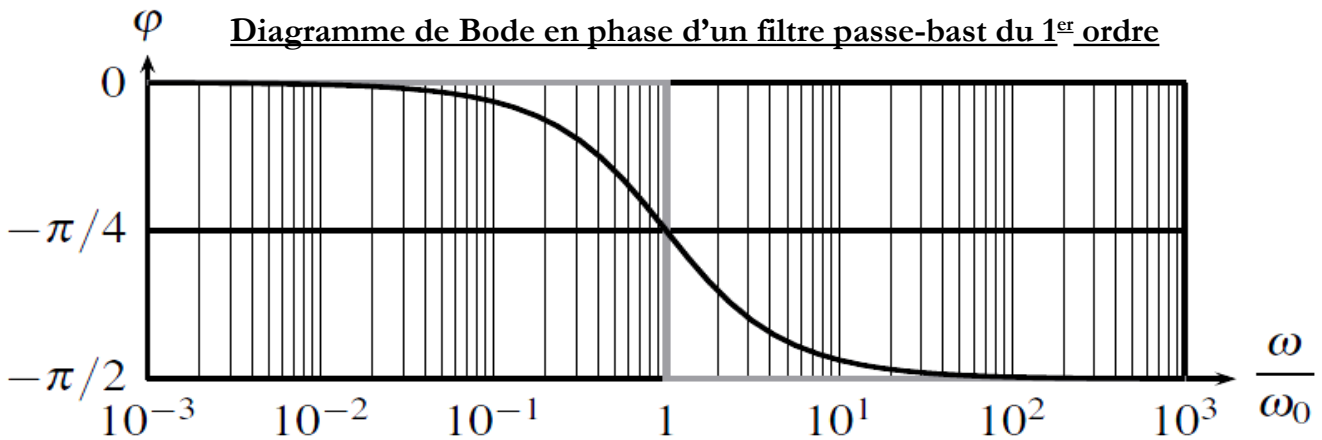
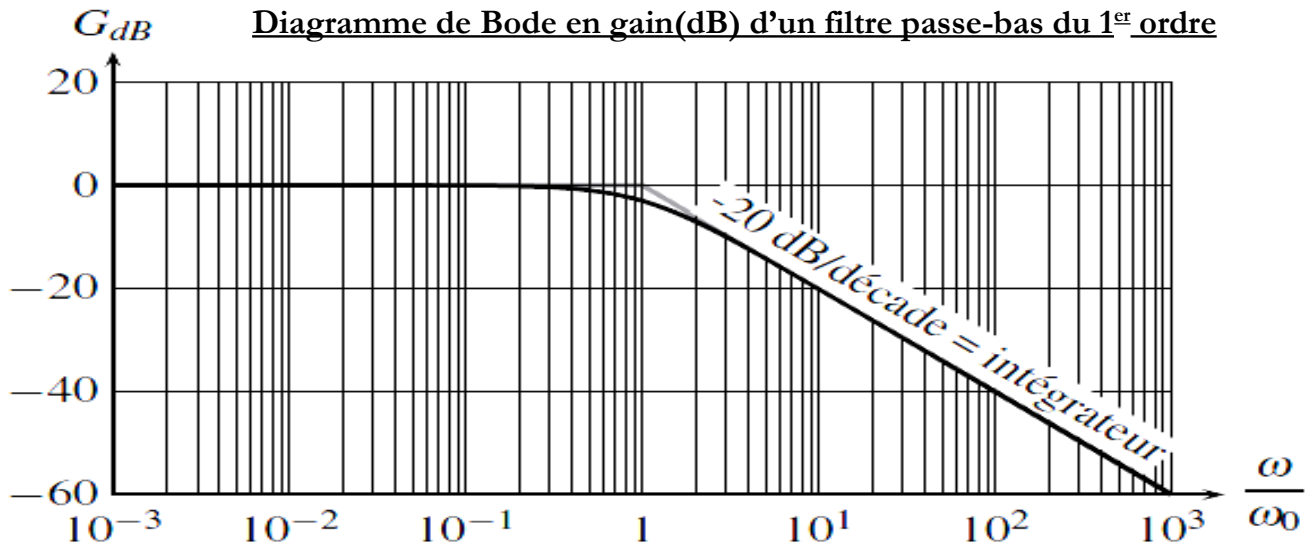
**Rmq :** quand on dit que la valeur de la tension délivrée par EDF est de 230 V, on parle de la tension efficace en réalité...

Valeur efficace d'un signal sinusoïdal pur :  $s(t) = S_1 \cos(2 \pi f t + \phi)$

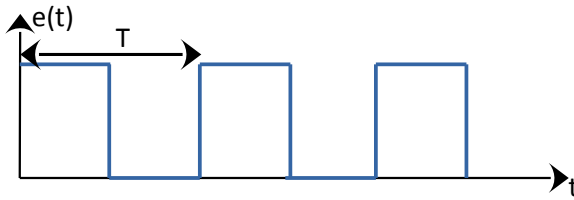
### e) Relation de Parseval

La puissance moyenne du signal  $s(t)$  est proportionnelle au carré de sa valeur efficace. Or, chaque harmonique transporte également une puissance proportionnelle à sa valeur efficace. La relation de Parseval exprime simplement le fait que la puissance du signal est égale à la somme des puissances transportées par les différents harmoniques, ce qui en terme de valeurs efficace se traduit

$$S_{eff}^2 = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{S_i^2}{2}$$

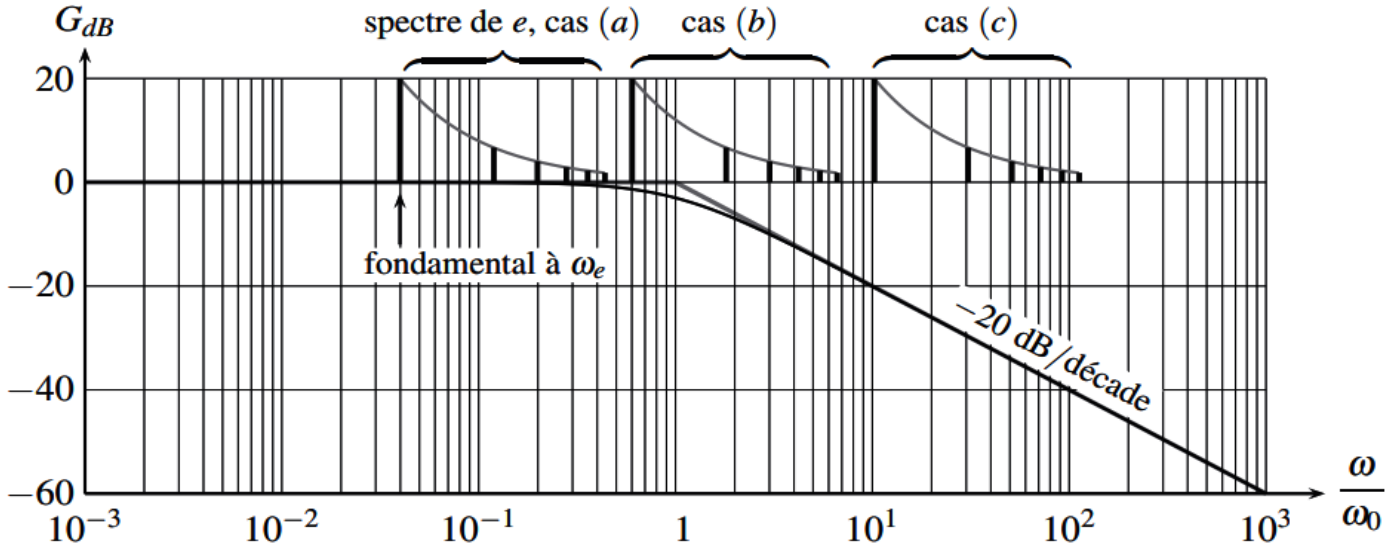


Signal  $e(t)$  :



On cherche le signal  $s(t)$  en sortie d'un filtre passe-bas de fréquence propre  $\omega_0$  et on envisage 3 cas :  
 Cas a) :  $\omega_0 T = 150$   
 Cas b) :  $\omega_0 T = 10$   
 Cas c)  $\omega_0 T = 0,63$

Allure du diagramme de Bode en gain dans les 3 cas



Allure de la sortie dans les 3 cas

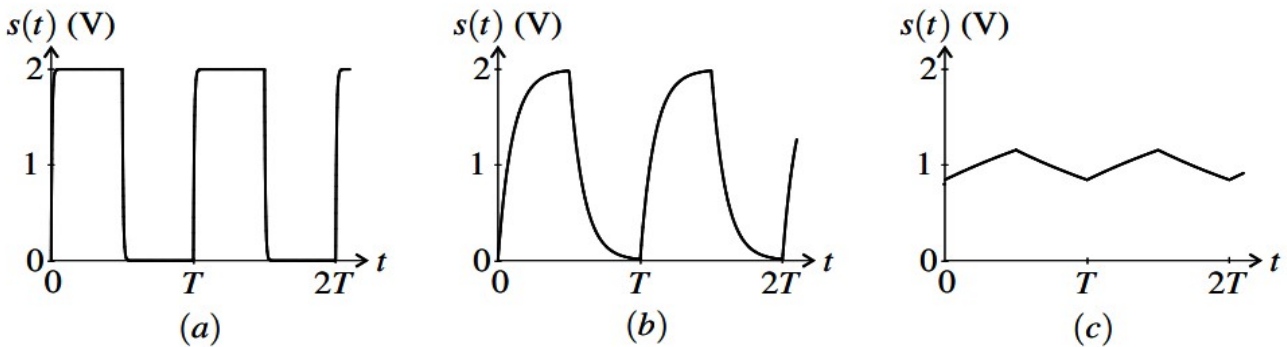


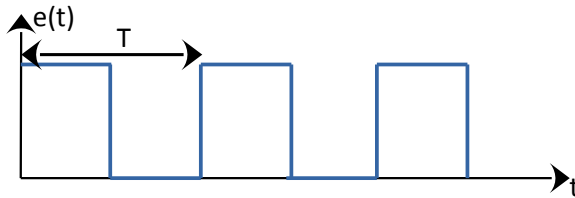
Figure 12.11 – Créneau filtré par un filtre passe-bas du premier ordre : (a)  $\omega_0 T \simeq 150$ , (b)  $\omega_0 T = 10$ , (c)  $\omega_0 T = 0,63$

Cas a) : Les composantes ne sont pas filtrées, les amplitudes des pics dans le spectre en amplitude de  $s(t)$  seront identiques aux amplitudes de  $e(t)$  :  $s(t)$  ressemblera beaucoup à  $e(t)$

Cas b) : La composante fondamentale n'est pas filtrée mais les harmoniques sont filtrées le signal de sortie est différents du signal d'entrée. On observe un comportement ressemble à la charge et à la décharge d'un condensateur dans un circuit RC

Cas c) : Toutes les composantes du spectre de  $e(t)$  sont filtrées. Le filtre possède un comportement intégrateur pour toute les fréquences. La sortie est une primitive de l'entrée ( fonctions affines croissantes et décroissantes )

Signal  $e(t)$  :

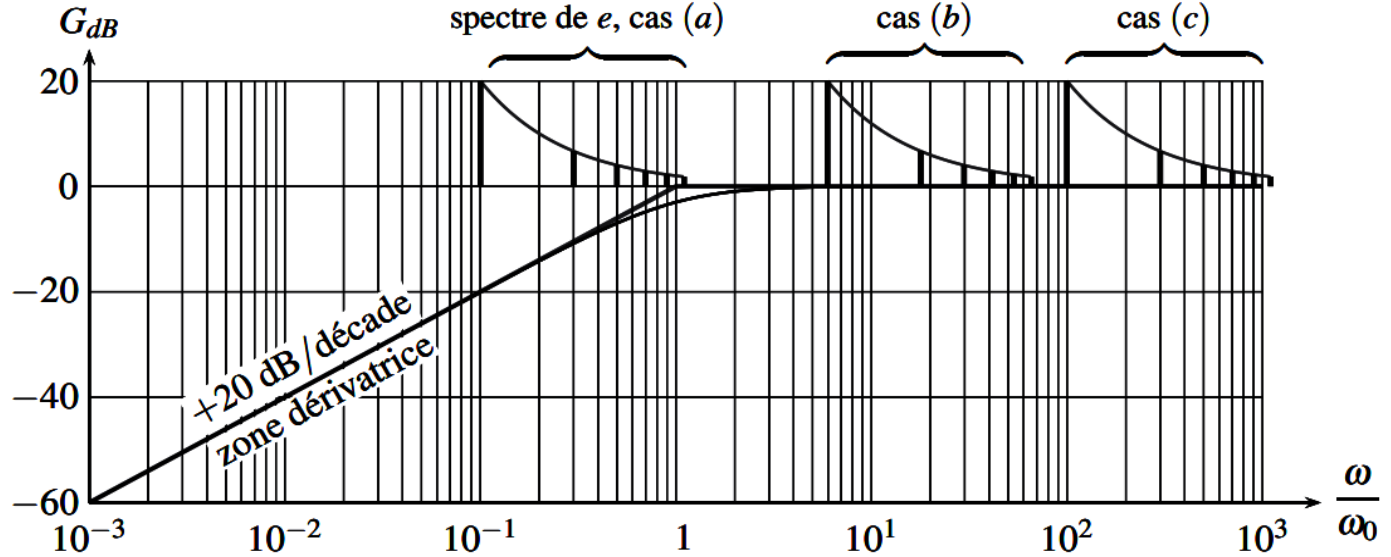


On cherche le signal  $s(t)$  en sortie d'un filtre passe-haut de fréquence propre  $\omega_0$  et on envisage 3 cas :

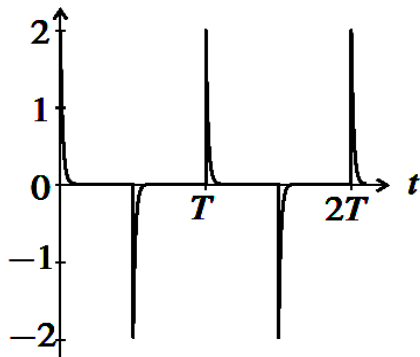
Cas a) :  $\omega_0 T = 150$

Cas b) :  $\omega_0 T = 10$

Cas c) :  $\omega_0 T = 0,63$

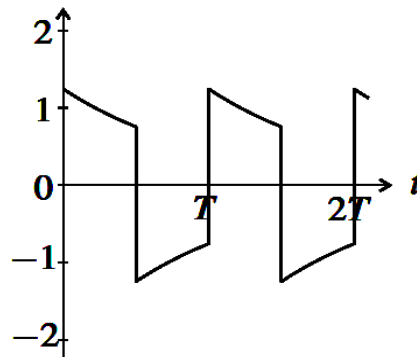


$s(t)$  (V)



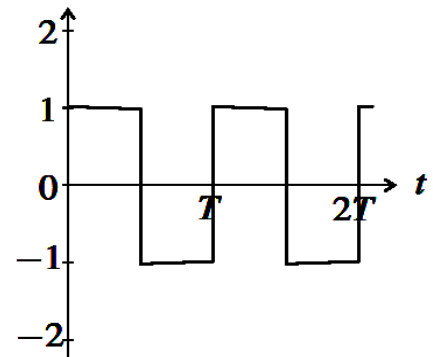
(a)

$s(t)$  (V)



(b)

$s(t)$  (V)



(c)

**Figure 12.13 – Créneau filtré par un filtre passe-haut du premier ordre : (a)  $\omega_0 T = 63$ , (b)  $\omega_0 T = 1$ , (c)  $\omega_0 T = 0,063$**

Cas c) : Les composantes ne sont pas filtrées, les amplitudes des pics dans le spectre en amplitude de  $s(t)$  seront identiques aux amplitudes de  $e(t)$  :  $s(t)$  ressemblera beaucoup à  $e(t)$

Cas b) : La composante fondamentale est légèrement filtrée, les harmoniques ne sont pas filtrées, signal de sortie est différents du signal d'entrée.

Cas a) : Toutes les composantes du spectre de  $e(t)$  sont filtrées. Le filtre possède un comportement dérivateur pour toute les fréquences. La sortie est la dérivée de l'entrée.

la dérivée (sortie) est nulle quand  $e(t)$  est constante.

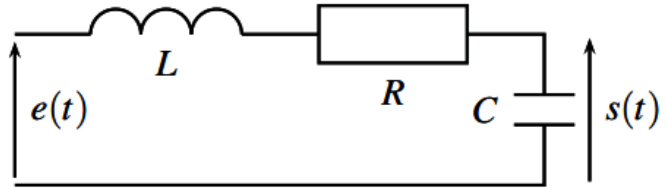
De plus la valeur de  $s(t)$  est importante aux niveaux des discontinuités de  $e(t)$

### III Modèles simples de filtres passifs du deuxième ordre

#### III.1) Filtre passe-bas du 2<sup>ème</sup> ordre

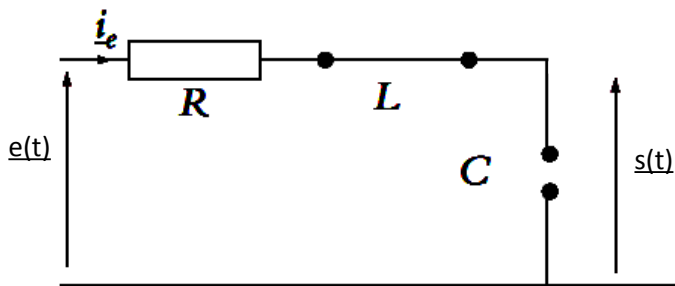
a) Exemple

schéma électrique :



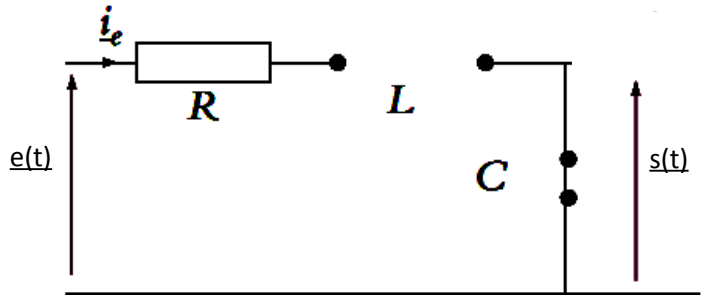
Prévision du comportement :

à BF



$$s(t) = e(t)$$

à HF



$$s(t) = 0$$

Le filtre est bien un **passé-bas**

Calcul de la fonction de transfert

Pont diviseur de tension  $s = \frac{1}{jC\omega} e$  donc  $H = \frac{1}{jRC\omega - LC\omega^2 + 1}$

(On retrouve les bons comportements limites quand on fait tendre  $\omega$  vers 0 et vers  $+\infty$ )

Si on utilise l'expression de la pulsation propre et du facteur de qualité du circuit RLC série :  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

On en déduit que  $\frac{1}{\omega_0 Q} = R \sqrt{\frac{C}{L}} \times \sqrt{LC} = RC$  et  $LC = \frac{1}{\omega_0^2}$

ainsi  $H = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j \frac{\omega}{Q\omega_0}}$  si on pose  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$  on a  $H = \frac{1}{1 - x^2 + j \frac{x}{Q}}$

**Rmq :** en pratique pour les filtres passe-bas le numérateur n'est pas forcément égale à 1 il faudra retenir la forme canonique du filtre passe-bas du deuxième ordre sous la forme suivante :

$$H = \frac{H_0}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j \frac{\omega}{Q\omega_0}} \quad \text{ou encore} \quad H = \frac{H_0}{1 - x^2 + j \frac{x}{Q}} \quad \text{ou} \quad H = \frac{-j \frac{Q}{x}}{1 + jQ \left(x - \frac{1}{x}\right)} H_0$$

**Remarque (notation) :**

Dans le cas des filtres du premier ordre, c'est la pulsation de coupure  $\omega_c$  qui intervient alors que dans le cas des filtres du second ordre, c'est la pulsation propre  $\omega_0$

Comme pour les filtres du premier ordre, si on réalise un circuit différent du circuit R, L, C série et qu'il se comporte en passe-bas, **la forme canonique sera inchangée** mais les expressions de  $H_0$ ,  $\omega_0$  et  $Q$  seront possiblement différentes de celles du circuit R, L, C série.

**b) Diagramme de Bode**

Si on utilise la variable réduite  $x$  :

$$\text{gain en décibels } GdB(\omega) = 20 \log(|\underline{H}|) = 20 \log\left(\frac{H_0}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}\right)$$

$$\text{déphasage entre l'entrée et la sortie : } \phi(\omega) = \arg(\underline{H}) = \arg(H_0) - \arg\left(1 - x^2 + \frac{jx}{Q}\right)$$

**Comportements asymptotiques à hautes et basses fréquences pour la courbe de gain en décibels**

- à HF  $\omega \gg \omega_0$  ( $x \gg 1$ )  $(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2} \approx x^4$  (car  $x^2 \gg 1$  donc  $x^4 \gg x^2/Q^2$ )

ainsi  $GdB(x) = 20 \log(|\underline{H}|) = 20 \log(H_0) - 20 \log(\sqrt{x^4})$

Dans le cas étudié ici  $H_0 = 1$  donc  $GdB(x) = 20 \log(|\underline{H}|) = 0 - 20 \log(x^2) = -40 \log(x)$

**À HF la courbe de  $GdB(x)$  tend asymptotiquement vers une droite de pente  $-40 \text{ dB/décade}$**

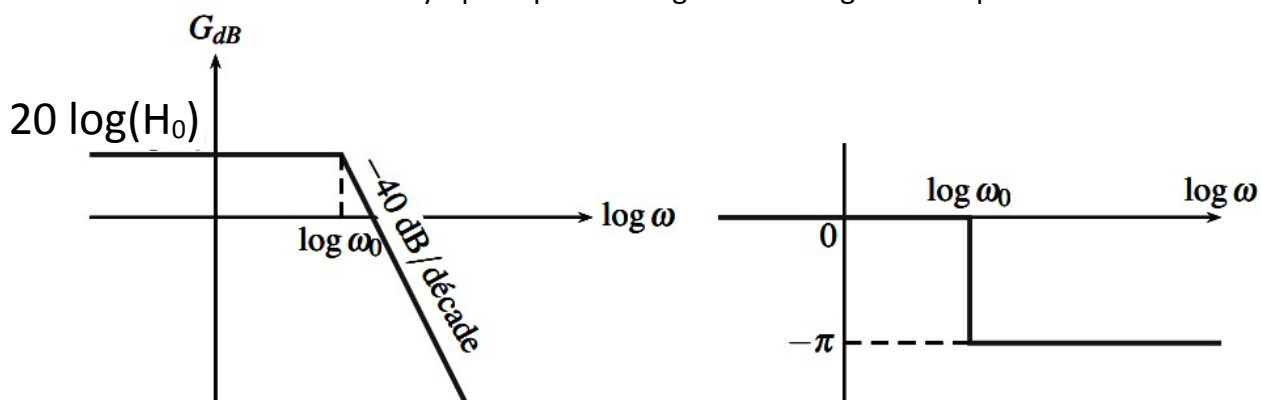
- en basse fréquence  $\omega \ll \omega_0$  ( $x \ll 1$ )  $(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2} \approx 1$

$GdB(x) = 20 \log(|\underline{H}|) = 20 \log(H_0)$  dans le cas étudié ici  $H_0 = 1$  donc pour  $\omega \ll \omega_0$

À BF la courbe de  $GdB(x)$  tend asymptotiquement vers une droite horizontale d'eq  $GdB(x) = 0$

**Pour la phase ( démo chapitre RSF résonance en élongation le circuit RLC )**

Allures asymptotique des diagrammes en gain et en phase





- Comme pour l'étude de la tension aux bornes du condensateur, on peut établir qu'il y a une résonance

$$\text{si } Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

si  $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$  on a toujours  $G_{dB}(x) \leq 0$  pour tout  $\omega$

L'intérêt d'un filtre passe-bas est **d'atténuer les hautes fréquences** ;

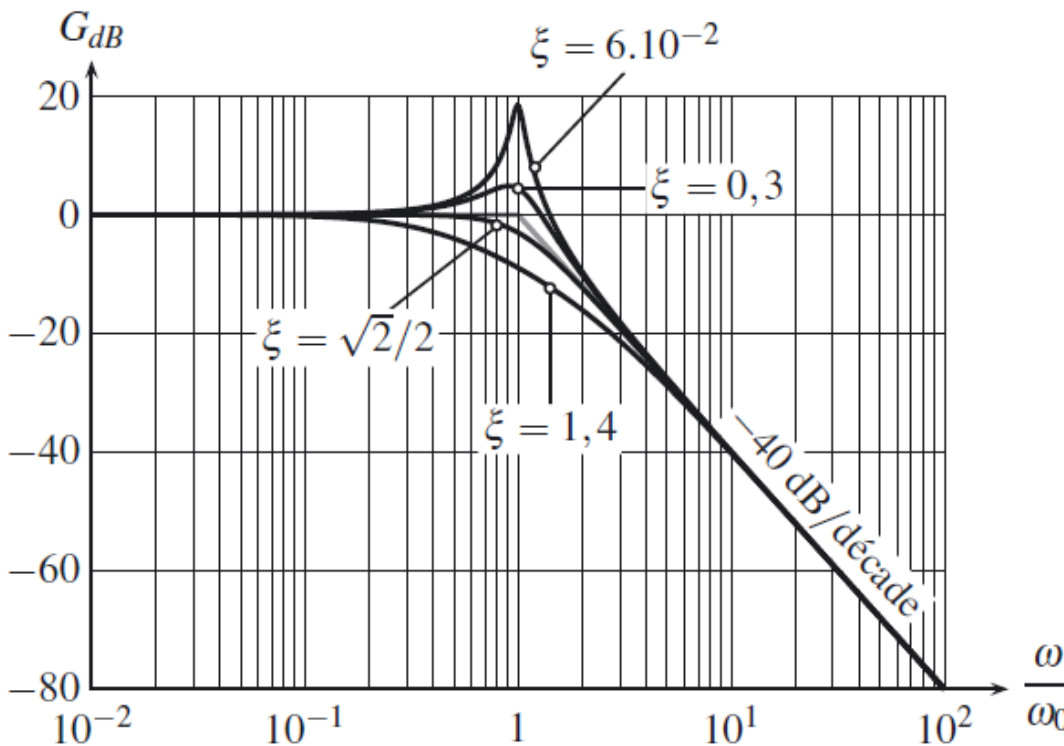
or s'il y a résonance, on voit sur la figure que la courbe réelle **rejoint moins rapidement l'asymptote**.

**On s'arrange donc en général pour que le facteur de qualité Q soit inférieur à  $1/\sqrt{2}$ .**

Dans ce cas, **les signaux de hautes fréquences sont mieux atténués** qu'avec un filtre du premier ordre puisque **la pente de l'asymptote est  $-40$  dB/déc au lieu de  $-20$  dB/déc c'est-à-dire que si la fréquence est multipliée par 10, l'amplitude du signal est divisée par 100 pour un passe-bas du deuxième ordre ( au lieu de 10 pour un passe-bas du premier ordre)**

- Pas de comportement intégrateur à hautes fréquences (double intégration)*

Allure de la Courbe de gain en dB pour un passe bas du deuxième ordre



### c) Bande passante à $-3dB$

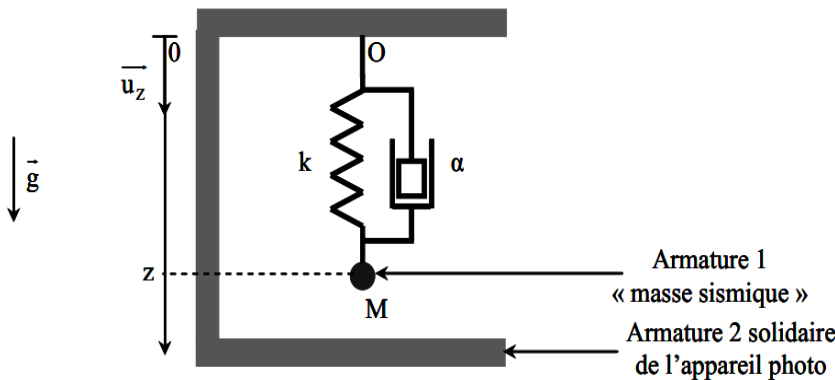
Pour ce filtre comme pour tous les filtres, on peut déterminer la bande passante  $\Delta\omega$  à  $-3dB$  comme l'intervalle de pulsation  $[\omega_1, \omega_2]$

$$\begin{aligned} &\text{Telle que } |H(\omega)| \geq \frac{|H_{max}|}{\sqrt{2}} \quad \text{si } \omega \in [\omega_1, \omega_2] \\ &\text{ou } G_{dB}(\omega) \geq G_{dB_{max}} - 20 \log(\sqrt{2}) \quad \text{soit } G_{dB}(\omega) \geq G_{dB_{max}} - 3dB \end{aligned}$$

on peut donc chercher sur la courbe l'intervalle de pulsation pour lequel cette condition est vérifiée et déterminer les pulsations qui délimitent la bande passante (voir chapitre précédent)

**III.2) Exemple mécanique de filtre passe-bas du 2ème ordre : accéléromètre d'un téléphone**

**a) Modélisation de l'accéléromètre**



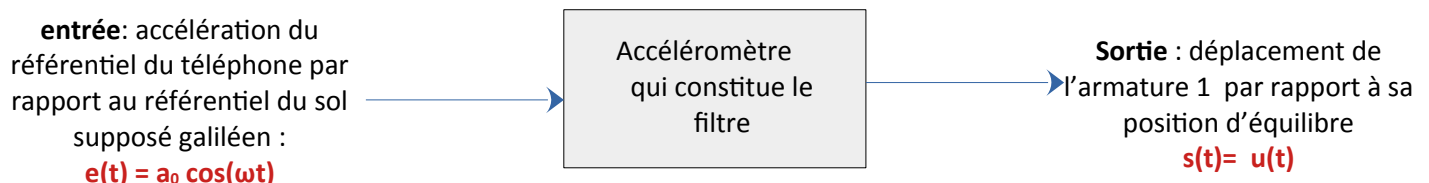
L'armature 2 et le point O sont solidaire du téléphone (on lui associe un référentiel  $R_1$ )  
 Le point O d'accroche du ressort relié à l'armature 1 subit l'accélération du téléphone par rapport au référentiel du sol  $R_0$  supposé galiléen :

$$\vec{a}_O(t)_{R_0} = \vec{a}_{R_1/R_0} = a_O \cos(\omega t) \vec{u}_z$$

Sous l'effet de cette accélération, l'armature 1 va se mettre à osciller et un capteur interne va mesurer le déplacement par rapport à la position d'équilibre  $u(t) = z(t) - z_{eq}$  dans le référentiel du téléphone noté  $R_1$

$$z_{eq} = l_0 + \frac{mg}{k}$$

**Modélisation de l'accéléromètre sous forme de fonction de transfert :**



**Rmq :** ici les grandeurs en entrée et en sortie n'ont pas la même dimension

on a donc 
$$H(\omega) = \frac{u(t)}{e(t)} = \frac{u(t)}{a_0 e^{j\omega t}}$$

**b) Détermination de la fonction de transfert**

- l'accélération du point M dans le référentiel du téléphone est donc  $\vec{a}_M(t)_{R_1} = \ddot{u} \vec{u}_z = \ddot{z}(t) \vec{u}_z$
- de même la vitesse de M dans le référentiel du téléphone est  $\vec{v}_M(t)_{R_1} = \dot{u}(t) \vec{u}_z = \dot{z}(t) \vec{u}_z$

système étudié : { **armature 1** }      référentiel : **Référentiel du sol (galiléen)**

Bilan des forces :

force de frottement fluide  $\vec{F}_l = -\alpha \dot{z} \vec{u}_z$  , force de rappel  $\vec{F} = -(z - l_0) \vec{u}_z$  , poids  $\vec{P} = mg \vec{u}_z$

Principe fondamental de la dynamique appliqué à l'armature 1 dans le référentiel galiléen  $R_0$  ( **du sol mais pas du téléphone!** ).

$$m \vec{a}_M(t)_{R_0} = \vec{F}_l + \vec{F} + \vec{P}$$

or d'après la formule de composition des accélérations 
$$\vec{a}_M(t)_{R_0} = \vec{a}_M(t)_{R_1} + \vec{a}_{R_1/R_0} = \ddot{u} \vec{u}_z + a_0 \cos(\omega t) \vec{u}_z$$

en projetant le PFD sur (Oz) : 
$$m \ddot{u} + m a_0 \cos(\omega t) = -k(z(t) - z_{eq}) - \alpha \dot{u}(t)$$

$$\ddot{u} + \frac{k}{m} u(t) + \frac{\alpha}{m} \dot{u}(t) = -a_0 \cos(\omega t)$$

soit

$$\ddot{u} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{u}(t) + \omega_0^2 u(t) = -a_0 \cos(\omega t)$$

(Le système étudié est bien linéaire car l'entrée et la sortie sont reliées par une équation différentielle linéaire)

Comme l'entrée est sinusoïdale, on peut passer aux notation complexes :

$$\underline{u}(\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega \frac{\omega_0}{Q}) = -a_0 e^{j\omega t} \Rightarrow \underline{H}(\omega) = \frac{-1}{\omega_0^2} \frac{1}{1 - (\frac{\omega}{\omega_0})^2 + j \frac{1}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}}$$

Conséquence :

Pour que l'accéléromètre se comporte correctement

(c-a-d  $u(t)$  proportionnel à l'accélération  $a_0(t)$  et indépendant de la fréquence d'excitation)

**il faut que la pulsation de l'accélération soit dans la bande passante de l'accéléromètre.**

Ainsi, **il vaut mieux que la pulsation de coupure  $\omega_0$  soit élevée pour que l'accéléromètre se comporte correctement pour une large gamme de fréquences**

pour  $\omega \gg \omega_0$  l'amplitude de  $u(t)$  est faible car la sortie est atténuée à HF pour un filtre passe-bas



## Small, Low Power, 3-Axis $\pm 3 g$ iMEMS<sup>®</sup> Accelerometer

### ADXL330

#### FEATURES

**3-axis sensing**

**Small, low-profile package**

4 mm × 4 mm × 1.45 mm LFCSP

**Low power**

180  $\mu A$  at  $V_s = 1.8 V$  (typical)

**Single-supply operation**

1.8 V to 3.6 V

**10,000 g shock survival**

**Excellent temperature stability**

**BW adjustment with a single capacitor per axis**

**RoHS/WEEE lead-free compliant**

#### APPLICATIONS

**Cost-sensitive, low power, motion- and tilt-sensing applications**

Mobile devices

Gaming systems

Disk drive protection

Image stabilization

Sports and health devices

#### GENERAL DESCRIPTION

The ADXL330 is a small, thin, low power, complete 3-axis accelerometer with signal conditioned voltage outputs, all on a single monolithic IC. The product measures acceleration with a minimum full-scale range of  $\pm 3 g$ . It can measure the static acceleration of gravity in tilt-sensing applications, as well as dynamic acceleration resulting from motion, shock, or vibration.

The user selects the bandwidth of the accelerometer using the  $C_x$ ,  $C_y$ , and  $C_z$  capacitors at the  $X_{OUT}$ ,  $Y_{OUT}$ , and  $Z_{OUT}$  pins.

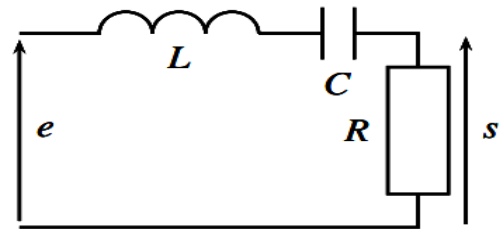
Bandwidths can be selected to suit the application, with a range of 0.5 Hz to 1600 Hz for X and Y axes, and a range of 0.5 Hz to 550 Hz for the Z axis.

**Bande passante**

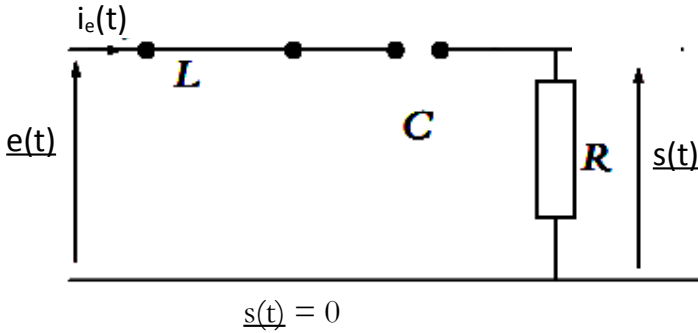
The ADXL330 is available in a small, low profile, 4 mm × 4 mm × 1.45 mm, 16-lead, plastic lead frame chip scale package (LFCSP\_IQ).

**III.3) Passe-bande du deuxième ordre (à connaître)**

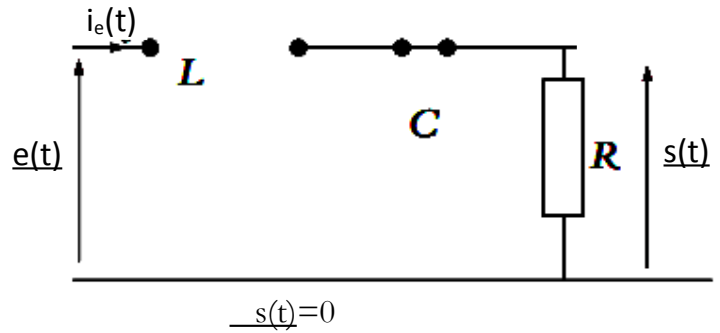
a) exemple



Prévision du comportement à TBF ( $\omega \rightarrow 0$ )



à THF ( $\omega \rightarrow \infty$ )



**Un passe-bande atténue fortement le signal à très haute et très basse fréquence mais peu (ou pas) sur une bande passante centrée sur la fréquence propre du circuit RLC**

**fonction de transfert (à savoir retrouver)**

Pont diviseur de tension complexe : 
$$\underline{s} = \frac{R}{R + \frac{1}{jC\omega} + jL\omega} e \quad \underline{H} = \frac{1}{1 + j\left(\frac{L}{R}\omega - \frac{1}{RC\omega}\right)}$$

On retrouve les bons comportements limites quand on fait tendre  $\omega$  vers 0 et vers  $+\infty$

Si on utilise l'expression de la pulsation propre et du facteur de qualité du circuit RLC série :  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$  b On en déduit que  $\omega_0 Q = \frac{1}{RC}$  et  $\frac{L}{R} = \frac{Q}{\omega_0}$   
ainsi

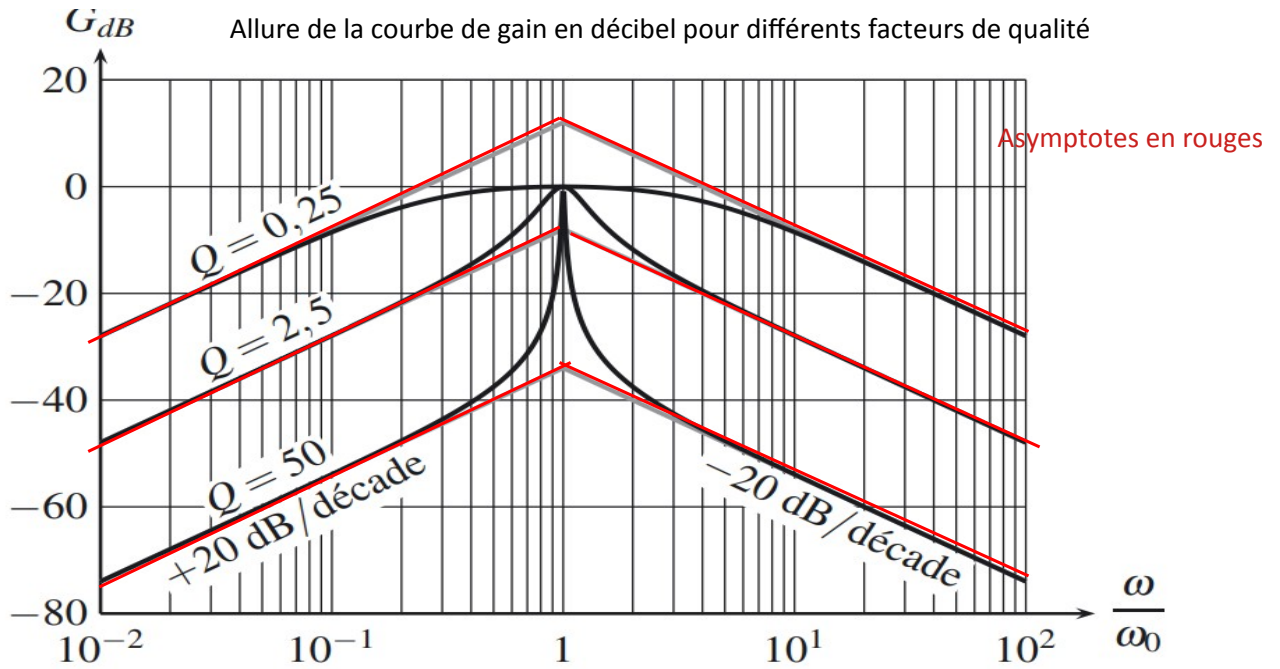
$$\underline{H} = \frac{1}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$
 si on pose  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$  
$$\underline{H} = \frac{1}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}$$

**forme canonique générale de la fonction de transfert :**

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}$$
 ou encore 
$$\underline{H} = \frac{j \frac{x}{Q} H_0}{1 - x^2 + j \frac{x}{Q}}$$
 avec  $H_0$  une constante

**b) Diagramme de Bode**

**Gain en décibel**



**Justification des asymptotes**

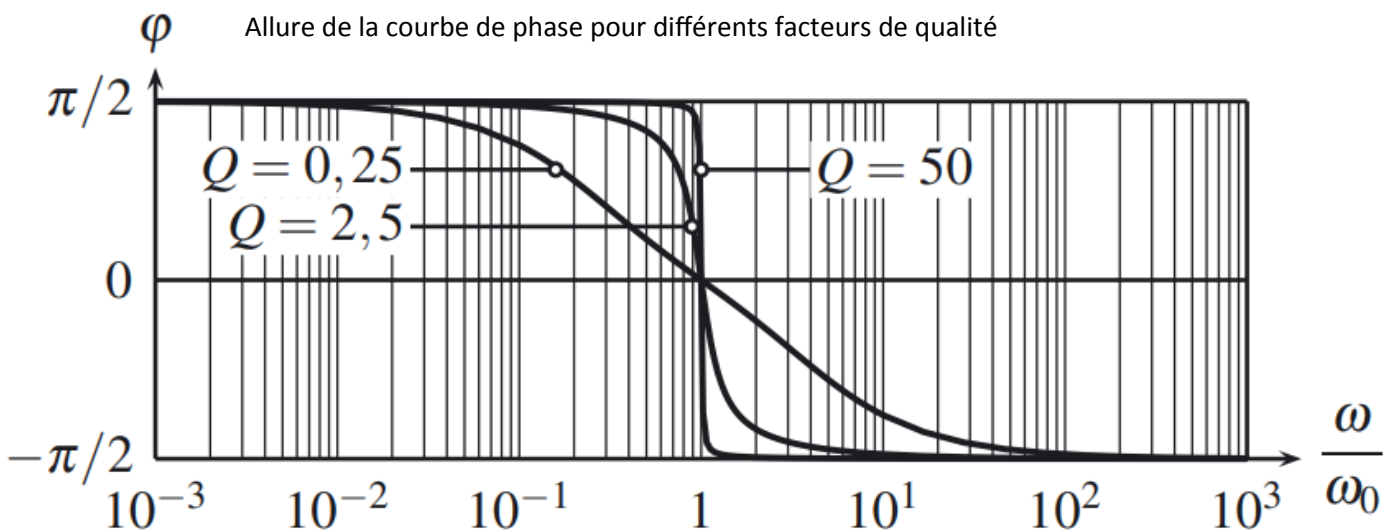
en BF 
$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + jQ(x - \frac{1}{x})} \approx \frac{H_0}{jQ} \Rightarrow GdB(x) = 20 \log(H_0 \frac{x}{Q}) = 20 \log(\frac{H_0}{Q}) + 20 \log(x)$$

(la courbe réelle du gain en décibels tend asymptotiquement vers une droite de pente +20 dB/décade à BF)

en HF 
$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + jQ(x - \frac{1}{x})} \approx \frac{H_0}{jQx} \Rightarrow GdB(x) = 20 \log(\frac{H_0}{Qx}) = 20 \log(\frac{H_0}{Q}) - 20 \log(x)$$

(la courbe réelle tend asymptotiquement vers une droite de pente -20 dB/décade à HF)

Pour le déphase  $\varphi(\omega)$  entre l'entrée et la sortie, voir résonance en intensité du chap 10



c) bande passante à - 3dB

On a déjà déterminé dans le chapitre précédent la bande passante dans ce cas (**résonance en intensité**)

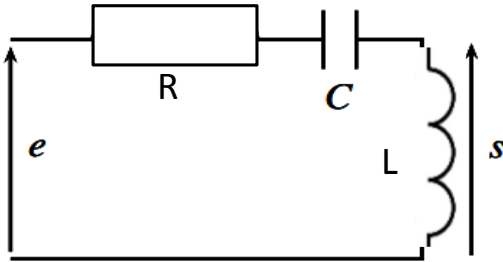
$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$  donc la bande passante est l'intervalle centrée sur  $\omega_0$ :  $[\omega_0 - \frac{\omega_0}{2Q}, \omega_0 + \frac{\omega_0}{2Q}]$

Rmq : quand **Q est important**, l'atténuation est faible sur une bande passante **étroite** (résonance aiguë), **on parle alors de filtre sélectif**, il peut supprimer les hautes et les basses fréquences autour de la fréquence propre.

III.4) Filtre passe-haut du deuxième ordre

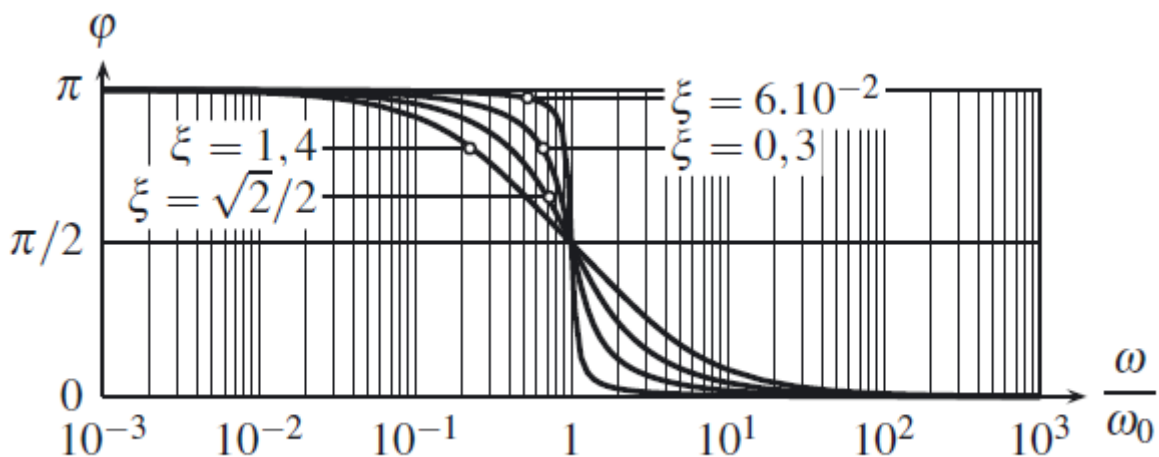
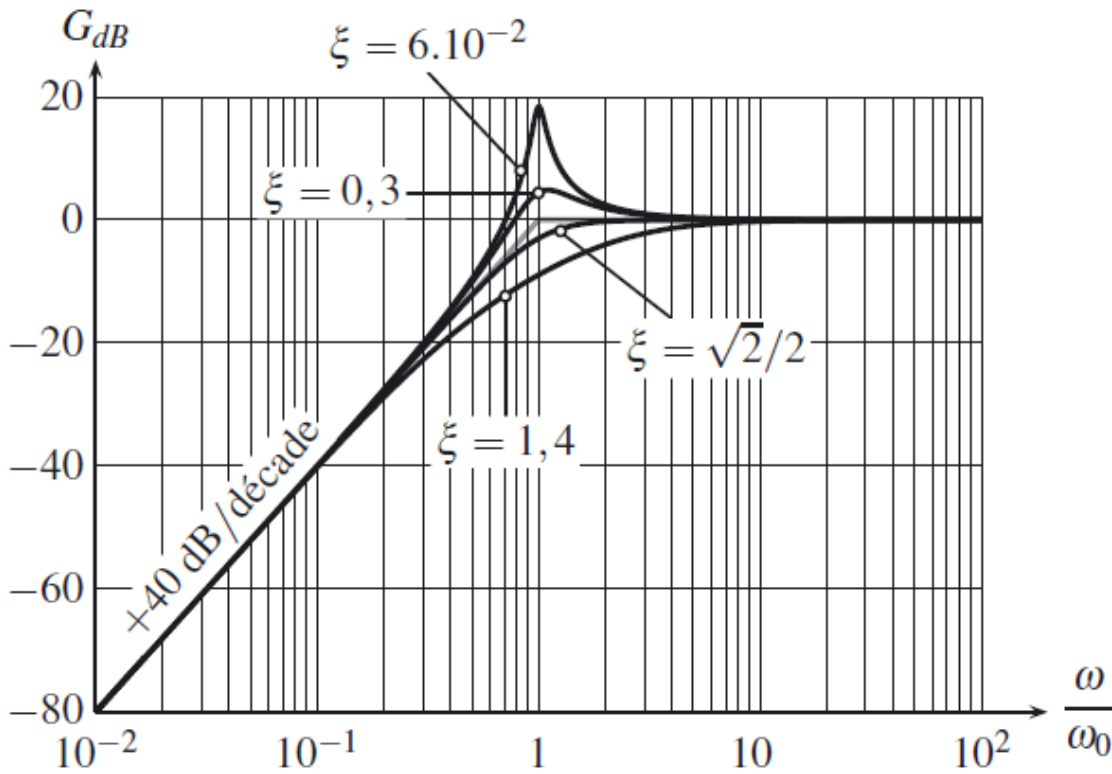
a) Exemple électrique

Fonction de transfert



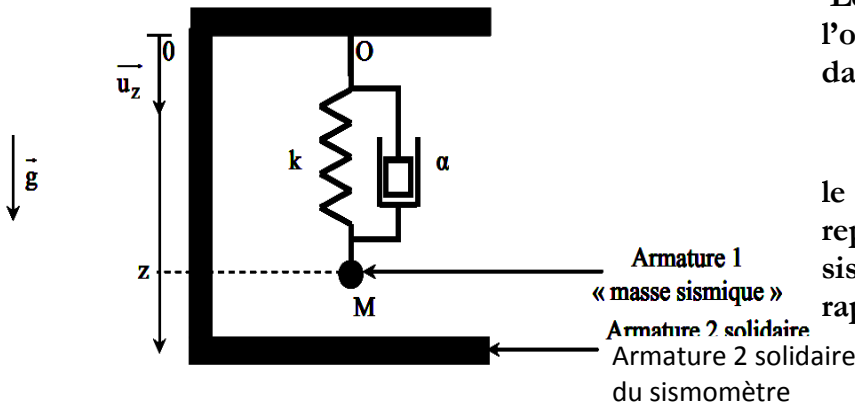
$$H = \frac{-x^2}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}} H_0$$

$$H = \frac{jQx}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)} H_0$$



**b) exemple mécanique : le sismomètre**

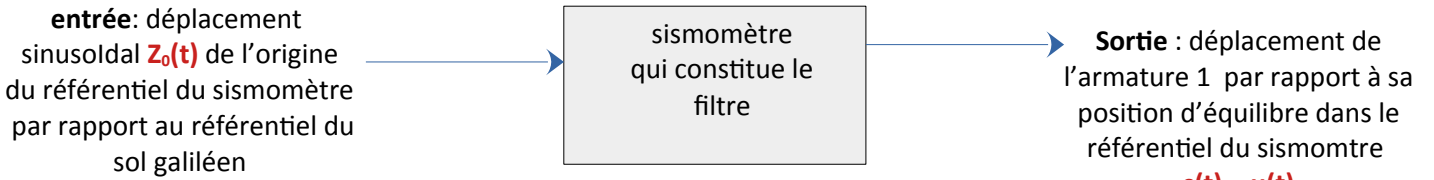
système étudié : Même système mécanique qu'au III.2 ( mêmes forces en présence)



Le séisme provoque le déplacement de l'origine O du référentiel du sismomètre  $R_1$  dans le référentiel du sol  $R_0$ :

$$Z_O(t)_{R_0} = Z_0 \cos(\omega t)$$

le déplacement sinusoïdal de l'origine du repère entraîne le mouvement de la « masse sismique » dans le réf  $R_1$  du sismomètre par rapport à sa position d'équilibre

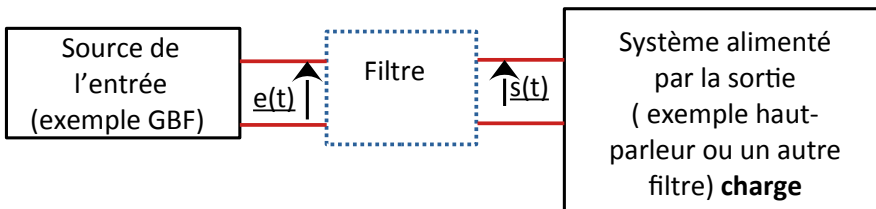


( remarque : par rapport au cas du 3.2  $\vec{a}_O(t)_{R_0} = \vec{a}_{R_1/R_0} = \ddot{Z}_0(t) \vec{e}_z = -\omega^2 Z_0(t) \vec{e}_z$   $H(\omega) = \frac{s(t)}{Z_0(t)}$

**III.5) Influence de l'environnement du filtre sur la fonction de transfert**

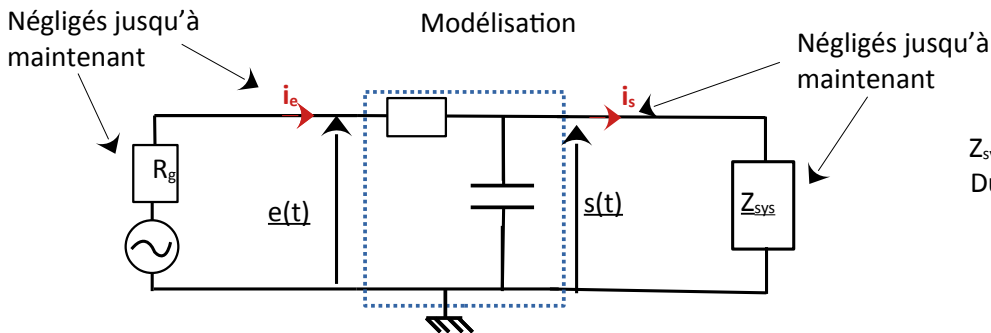
**a) Validité des calculs effectués**

Jusqu'à maintenant on a négliger l'environnement du filtre :



**Rmq voc**

**4 fils** « partent » du filtre (deux en entrée et deux en sortie) Le filtre est donc un **quadripôles**



$Z_{sys}$  est l'impédance électrique complexe Du système physique à la sortie du filtre

**Le pont diviseur de tension pour trouver la fonction de transfert n'est en réalité pas applicable ! ( les dipôles du filtre ne sont en réalité pas en série )**

**Problématique : Dans quels cas les calculs effectués jusqu'à maintenant sont applicables ?**

**b) Impédance d'entrée et de sortie du filtre**

Pour caractériser le comportement du filtre vis à vis du reste du circuit ( **indépendamment de sa structure réelle, qui peut être inconnue**) on peut **modéliser** :

-Ses bornes d'entrée comme un dipôle passif d'impédance  $Z_c$ , appelée **impédance d'entrée** telle que  $e(t) = Z_c i_e$

-Ses bornes de sortie comme un générateur idéal de  $F_{em} = H u_c$  en série avec une **impédance de sortie**  $Z_s$

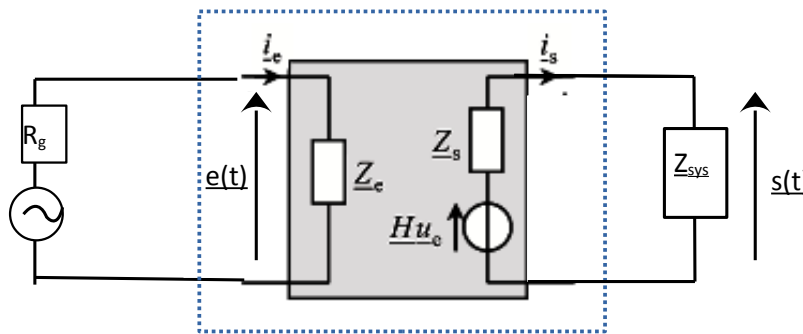
**Rmq importante :**

pour la  $F_{em}$ ,  $H$  est déterminée **sans prendre en compte ce qui est relié à la suite du filtre** .

cela correspond à  $i_s = 0$  et c'est ce que nous avons fait jusqu'à maintenant.

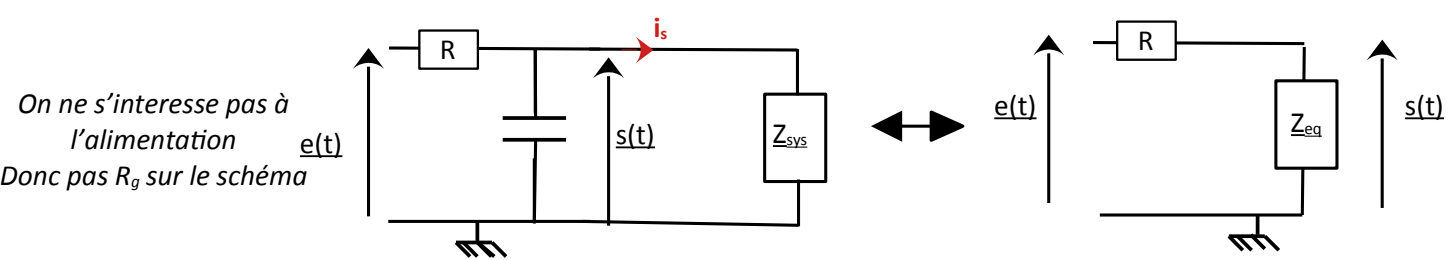
**Voc : on dit dans ce que cas  $H$  est la fonction de transfert en boucle ouverte.)**

**Modélisation du filtre en prenant en compte les impédances de sortie et d'entrée :**



Rmq : l'entrée est considérée en convention récepteur et la sortie en convention générateur

**c) Expression de  $\frac{s}{e}$  en fonction  $Z_s$  et  $Z_{sys}$  et de  $H$  (fonction de transfert en boucle ouverte)**



*On ne s'intéresse pas à l'alimentation e(t) Donc pas Rg sur le schéma*

On considérant une impédance équivalente  $Z_{eq} = \frac{Z_c \times Z_{sys}}{Z_c + Z_{sys}}$  sur le premier schéma

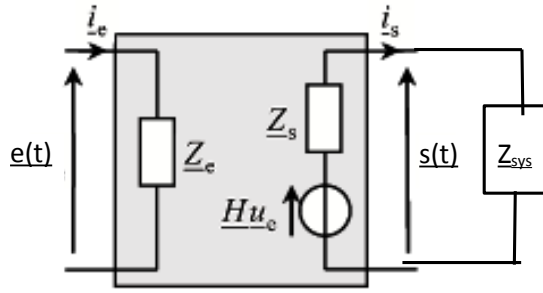
on a alors en utilisant le pont diviseur de tension 
$$\frac{s(t)}{e(t)} = \frac{\frac{Z_{sys} \times Z_c}{Z_c + Z_{sys}}}{R + \frac{Z_c \times Z_{sys}}{Z_c + Z_{sys}}}$$

c'est différent de la fonction de transfert en boucle ouverte !

Rmq : On retrouve la fonction de transfert en boucle ouverte si  $Z_{sys} \gg Z_c$



**Modélisation prenant en compte l'impédance de sortie :**



Relation tension courant en complexe pour le dipôle en aval du filtre ( d'impédance  $Z_{sys}$  )

$$\underline{s}(t) = Z_{sys} \underline{i}_s$$

$$\underline{s} = H e - \frac{Z_s}{Z_{sys}} \underline{s}$$

*Convention générateur en sortie*

si  $i_s = 0$   $H = \frac{Z_C}{Z_C + Z_R}$  *Fonction de transfert en boucle ouverte*

$$\underline{s} = H e - \frac{Z_s}{Z_{sys}} \underline{s}$$

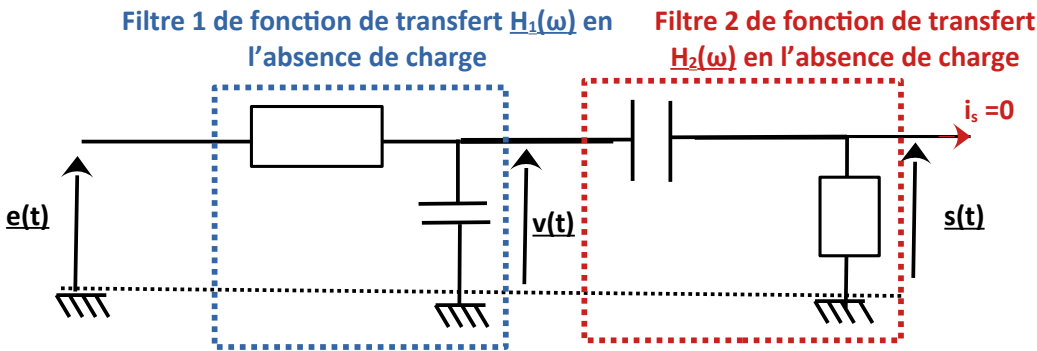
$$\underline{s} \left(1 + \frac{Z_s}{Z_{sys}}\right) = H e$$

$$\frac{\underline{s}}{e} = \left(1 + \frac{Z_s}{Z_{sys}}\right) = H \frac{Z_{sys}}{Z_s + Z_{sys}}$$

si on veut retrouver la fonction de transfert H il faut que l'impédance de sortie du filtre soit très faible devant les autres impédances en présence (notamment  $Z_{sys}$ )  
 Pour que cela fonctionne pour n'importe quelle valeur de  $Z_{sys}$  il faut que le module de l'impédance de sortie  $Z_s$  soit très faible ( tend vers 0 )

**d) Mises en cascades de filtres**

Q : Si on place un autre filtre derrière le premier quelle-est la fonction de transfert totale  $H_{tot}$ ?



On aimerait avoir :  $H_{tot}(\omega) = \frac{\underline{s}}{e} = \frac{\underline{s}}{v} \times \frac{v}{e} = H_2(\omega) \times H_1(\omega)$

Si on considère que l'impédance de sortie du deuxième filtre est nulle, on peut relier  $\underline{s}$  à  $\underline{v}$

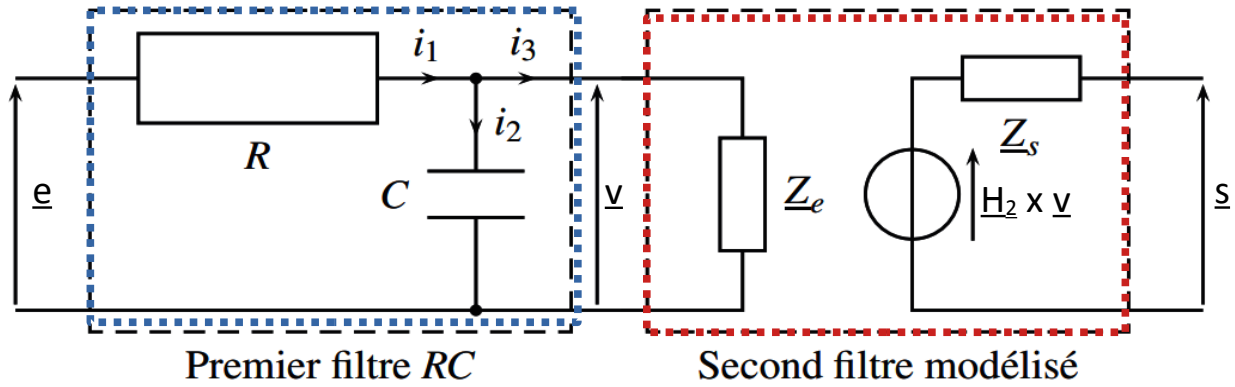
En utilisant un pont diviseur de tension :

$$\underline{s} = \frac{R}{R + \frac{1}{jC\omega}} \underline{v}$$

**On ne peut pas utiliser directement la formule du pdt pour relier  $\underline{v}(t)$  à  $\underline{e}(t)$  car les dipôles considérés ne sont pas en série !!**

**Pb : Dans quel cas est-ce possible ?**

on peut modéliser le deuxième filtre par son impédance d'entrée :



$$\underline{Z}_e = R + \frac{1}{jC\omega}$$

Pour pouvoir négliger la présence du deuxième filtre il faudrait que  $i_3$  soit nulle

Or par définition de l'impédance d'entrée du second filtre,  $v = \underline{Z}_e i_3$ ,

donc  $i_3$  tend vers 0 si  $\underline{Z}_e$  devient infinie.

À cette condition, le second filtre ne charge plus le premier.

**À retenir : pour pouvoir négliger l'action du deuxième filtre sur le premier filtre, il faut que l'impédance d'entrée du deuxième filtre tende vers + l'infini**

on peut alors appliquer la formule du pont diviseur de tension pour le premier filtre :

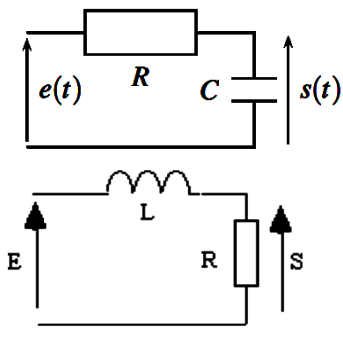
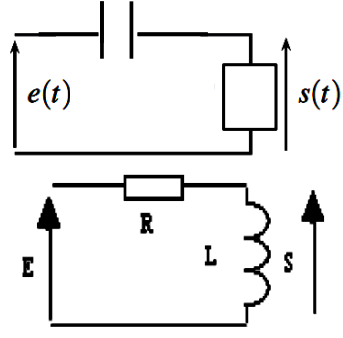
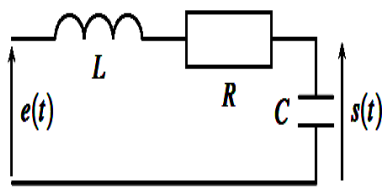
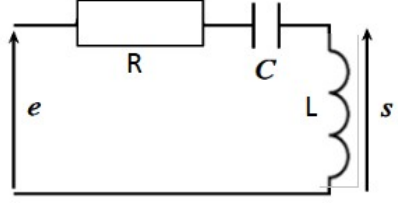
$$v = \frac{1}{R + \frac{1}{jC\omega}} e \Rightarrow \frac{v}{e} = \underline{H}_1(\omega)$$

De plus si  $\underline{Z}_s = 0$  alors  $s(t) = \underline{H}_2(\omega) \times v$  (loi des mailles sur la sortie)

finalement avec ces conditions :  $\frac{s}{e} = \frac{s}{v} \times \frac{v}{e} = \underline{H}_2(\omega) \times \underline{H}_1(\omega)$

À retenir : La fonction de transfert d'une mise en cascade de filtres d'impédances d'entrées très grandes, voire infinies, et d'impédances de sorties très faibles, voire nulles, est le produit des fonctions de transfert de chaque filtre.

Bilan

Nature du filtre	Fonction de transfert sous forme canonique	Exemple de filtre simple
Filtre passe-bas 1 <sup>er</sup> ordre	$\underline{H} = \frac{1}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}} H_0$	
Filtre passe-haut 1 <sup>er</sup> ordre	$\underline{H} = \frac{j \frac{\omega}{\omega_c}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}} H_0$	
Filtre passe-bas 2 <sup>ème</sup> ordre	$\underline{H} = \frac{1}{1 - x^2 + j \frac{x}{Q}} H_0$ $\underline{H} = \frac{-j \frac{Q}{x}}{1 + jQ \left( x - \frac{1}{x} \right)} H_0$	
Filtre passe-haut 2 <sup>ème</sup> ordre	$\underline{H} = \frac{-x^2}{1 - x^2 + j \frac{x}{Q}} H_0$ $\underline{H} = \frac{jQx}{1 + jQ \left( x - \frac{1}{x} \right)} H_0$	
Filtre passe-bande 2 <sup>ème</sup> ordre	$\underline{H} = \frac{jx}{Q} H_0$ $\underline{H} = \frac{1}{1 + jQ \left( x - \frac{1}{x} \right)} H_0$	