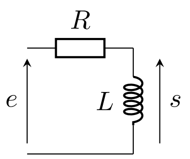
Filtrage linéaire

Exercices

Exercice 1 : Filtre RL [♦◊◊]



On considère le circuit ci-contre avec $R = 1{,}0\,\mathrm{k}\Omega$ et $L = 10\,\mathrm{mH}$.

1 - Quel type de filtre ce circuit permet-il de réaliser ?

2 - Déterminer sa fonction de transfert et l'écrire sous la forme

$$\underline{H} = H_0 \frac{\mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_\mathrm{c}}}{1+\mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_\mathrm{c}}}.$$

3 - Déterminer les pentes des asymptotes en gain dans les limites haute et basse fréquence, ainsi que leur ordonnée « à l'origine » en $x = 1$. Construire le diagramme de Bode asymptotique en gain sur la figure 1 et en déduire l'allure du diagramme réel.

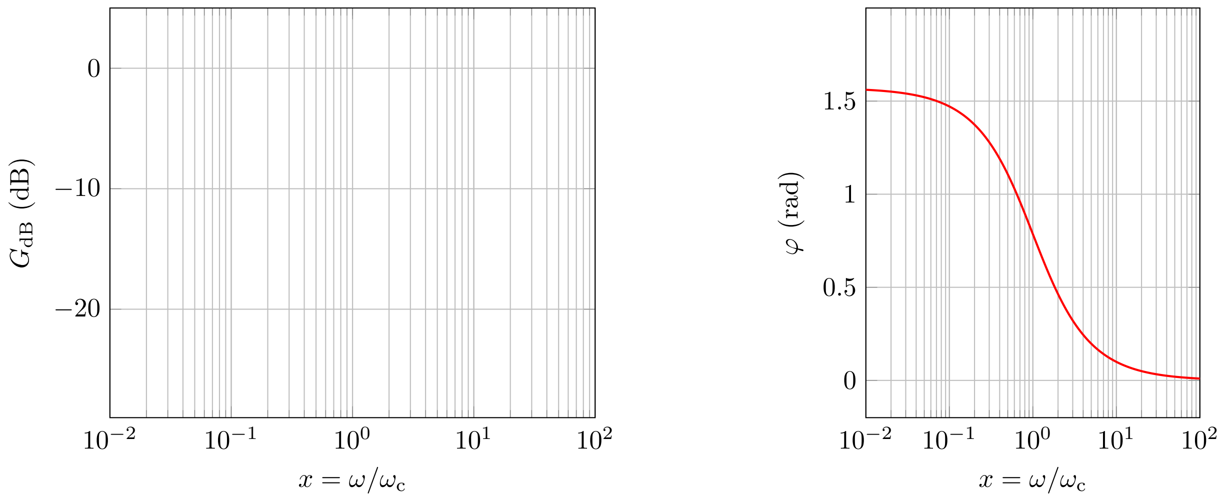
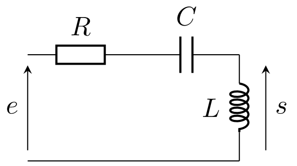


Figure 1 – Diagramme de Bode du filtre RL.

4 - La tension e s'écrit sous la forme d'une somme de trois harmoniques de même amplitude, de même phase initiale, et de fréquences respectives $f_1 = 100\,\mathrm{Hz}$, $f_2 = 1\,\mathrm{kHz}$ et $f_3 = 100\,\mathrm{kHz}$. Donner la forme du signal d'entrée e puis du signal de sortie s.

5 - La tension $e(t)$ est maintenant un signal triangle de fréquence $60\,\mathrm{Hz}$. Justifier que $s(t)$ est un signal créneau de même fréquence.

Exercice 2 : Filtre passe-haut d'ordre 2 [♦◊◊]



1 - Justifier que ce filtre est un filtre passe-haut. Définir sa pulsation caractéristique ω_0 et son facteur de qualité Q.

2 - Déterminer sa fonction de transfert et l'écrire sous la forme

$$\underline{H} = \frac{\mathrm{j}Qx}{1+\mathrm{j}Q\left(x-\frac{1}{x}\right)} \qquad \text{avec} \qquad x = \frac{\omega}{\omega_0}.$$

3 - Déterminer la pente des asymptotes du diagramme de Bode en gain. Tracer qualitativement son allure en supposant que le facteur de qualité est tel que le circuit n'est pas résonant.

4 - Ce filtre peut-il avoir un comportement dérivateur ? intégrateur ?

Exercice 3 : Lecture de diagrammes de Bode [♦◇◇]

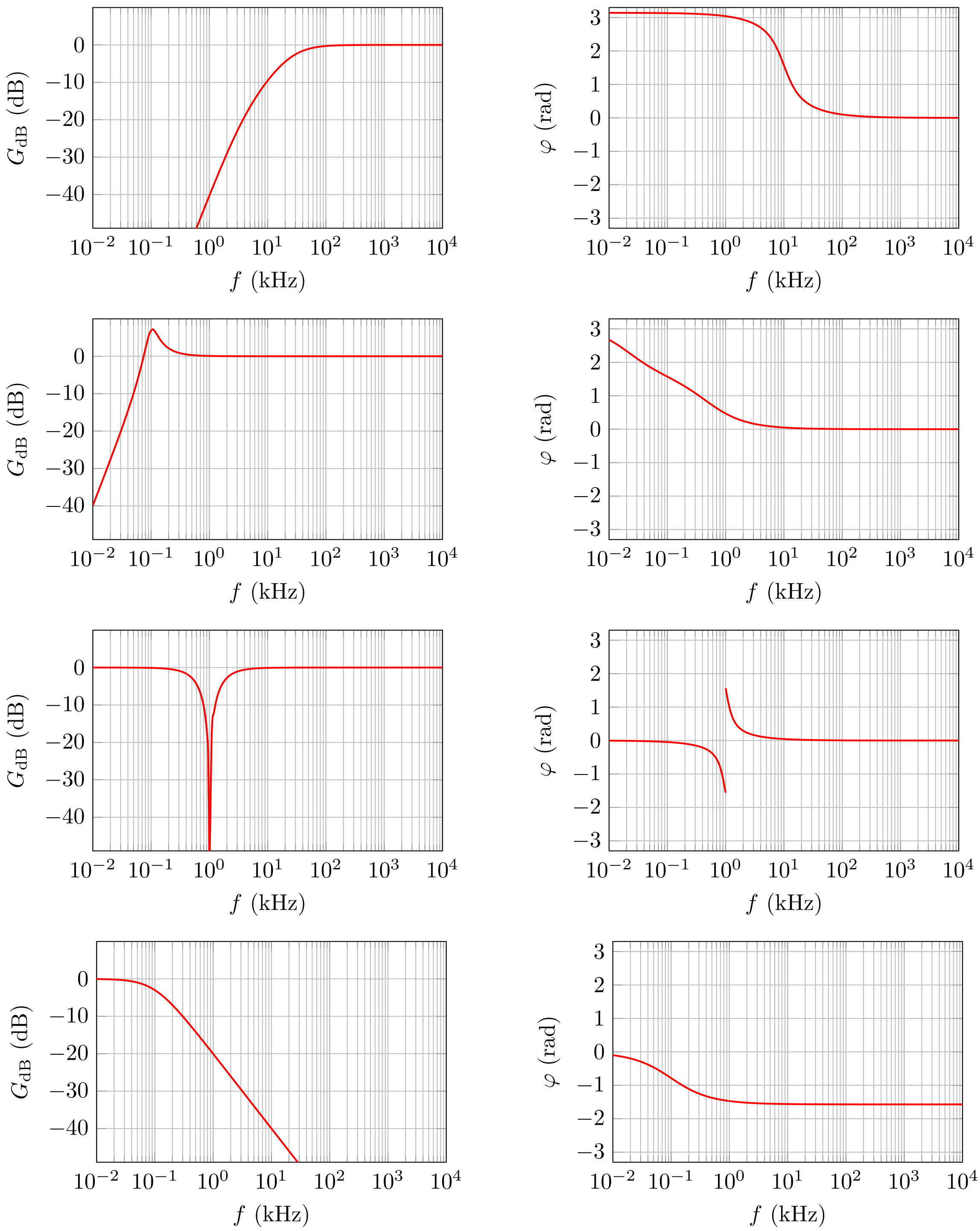
1 - Pour les quatre diagramme de Bode ci-dessous, indiquer le type de filtre dont il s'agit.

2 - Identifier l'ordre du filtre et sa fréquence caractéristique.

3 - On envoie en entrée de chacun des filtres le signal

$$e(t) = E_0 + E_0 \cos(\omega t) + E_0 \cos\left(10\,\omega t + \frac{\pi}{4}\right) + E_0 \cos\left(100\,\omega t - \frac{\pi}{3}\right)$$

où la fréquence $f = \omega/2\pi$ vaut $1\,\mathrm{kHz}$. Déterminer l'expression du signal $s(t)$ de sortie du filtre.



Exercice 4 : Conception d'un filtre de signaux acoustiques [♦♦◊]

Un dispositif de traitement de signaux acoustiques nécessite la séparation de composantes sonores et ultrasonores. On souhaite éliminer les composantes ultrasonores : il faut donc réaliser un filtre passe-bas. Le cahier des charges du dispositif indique les caractéristiques suivantes.

▷ Fréquence de coupure 20 kHz ;
▷ Gain nominal 0 dB ;
▷ L'atténuation des fréquences comprises entre 0 et 20 kHz doit être inférieure à 3 dB ;
▷ L'atténuation des fréquences supérieures à 40 kHz doit être supérieure à 10 dB.

1 - Tracer le gabarit de ce filtre.

2 - Le filtre le plus simple serait un passe-bas du premier ordre de fréquence de coupure $f_c = 20\,\text{kHz}$. On rappelle que la fonction de transfert d'un tel filtre s'écrit sous forme réduite

$$\underline{H}(x) = \frac{1}{1 + \text{j}x} \qquad \text{avec} \qquad x = \frac{f}{f_c}$$

2.a **-** Rappeler ou retrouver la pente des asymptotes du diagramme de Bode en gain de ce filtre et calculer son gain à la fréquence de coupure.
2.b **-** Montrer qu'il ne peut satisfaire au cahier des charges imposé. Justifier qu'il est nécessaire d'utiliser un filtre d'ordre plus élevé.

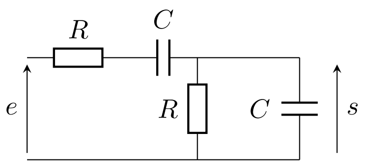
3 - On se tourne alors vers un filtre passe-bas du second ordre de fonction de transfert

$$\underline{H}(x) = \frac{1}{1 + \text{j}\dfrac{x}{Q} - x^2}$$

3.a **-** Rappeler ou retrouver la pente des asymptotes du diagramme de Bode en gain de ce filtre. Peut-il satisfaire au cahier des charges imposé ?
3.b **-** Calculer le gain en décibel de ce filtre pour $f = f_c$. En déduire les valeurs de Q permettant de satisfaire au cahier des charges.

Annales de concours

Exercice 5 : Filtre de Wien [oral CCP, ♦♦◊]



On s'intéresse au filtre de Wien représenté ci-contre. Ce type de filtre est notamment utilisé dans des oscillateurs auto-entretenus assez simples à réaliser : vous y reviendrez dans le cours d'électronique de PT.

1 - Par analyse des comportements asymptotiques, déterminer le type de filtre dont il s'agit.

2 - Déterminer la fonction de transfert $\underline{H}$ du filtre.

3 - On pose $\omega_0 = 1/RC$ et $x = \omega/\omega_0$. Écrire la fonction de transfert sous la forme

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + \text{j}Q\left(x - \dfrac{1}{x}\right)},$$

en précisant ce que valent H_0 et Q.

4 - Calculer simplement le gain maximal du filtre, exprimer sa valeur de dB, et calculer le déphasage correspondant.

5 - Représenter le diagramme de Bode asymptotique du filtre et en déduire qualitativement le tracé réel.

6 - Calculer la pulsation propre ω_0 pour $R = 1{,}0\,\text{k}\Omega$ et $C = 500\,\text{nF}$. Donner le signal de sortie du filtre si le signal d'entrée est

$$e(t) = E_0 + E_0\cos(\omega t) + E_0\cos(10\,\omega t) + E_0\cos(100\,\omega t)$$

avec $E_0 = 10\,\text{V}$ et $\omega = 200\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$.

Exercice 6 : Modélisation d'un récepteur radio [oral banque PT, ♦♦♢]

Un récepteur radio doit capter les signaux sur une gamme de fréquence allant de 150 à 300 kHz. Il peut être modélisé par un circuit RLC série avec $R = 2\,\mathrm{k}\Omega$ et $L = 1\,\mathrm{mH}$.

1 - Quel type de filtrage doit-il réaliser ? En déduire le dipôle aux bornes duquel la tension de sortie doit être mesurée.

2 - Établir la fonction de transfert du filtre.

3 - Déterminer les valeurs de C répondant aux attentes.

Exercice 7 : Filtre RLC [oral banque PT, ♦♦♢]

1 - Identifier sans calcul la nature du filtre du montage figure 2.

2 - Déterminer la fonction de transfert sous la forme

$$\underline{H} = \frac{\dfrac{\mathrm{j}x}{Q} - x^2}{1 + \dfrac{\mathrm{j}x}{Q} - x^2} \qquad \text{avec} \qquad x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

Identifier la fréquence de résonance ω_0 et le facteur de qualité Q.

3 - On donne le diagramme de Bode du filtre figure 2. Expliquer les valeurs prises par la pente en haute et basse fréquence. Déterminer la valeur de Q.

4 - On met un signal triangulaire en entrée. Pour le même signal d'entrée mais pour deux valeurs différentes de R, on obtient un signal carré très atténué puis un signal formé d'une succession d'impulsions. Expliquer.

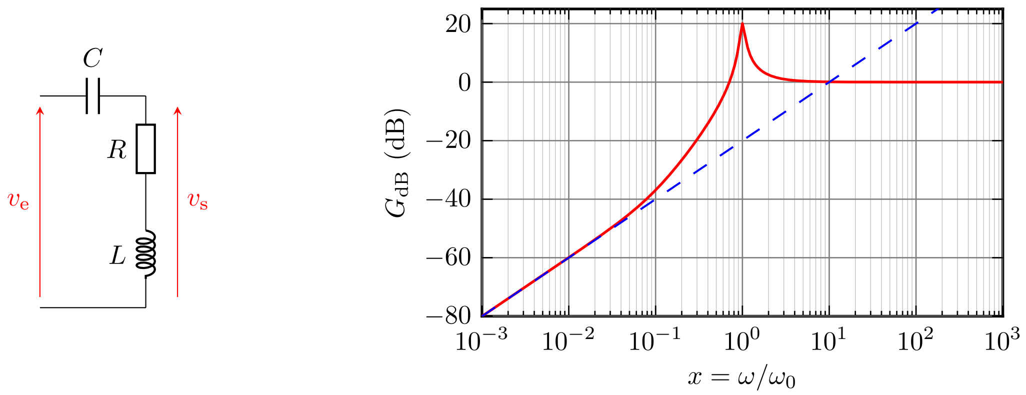
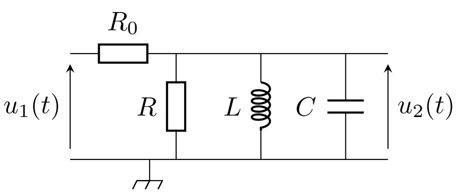


Figure 2 – **Schéma et diagramme de Bode asymptotique d'un filtre RLC.**

Exercice 8 : Fréquence centrale d'un passe-bande [écrit banque PT 2015, ♦♦♢]



Le sujet concerne l'étude de capteurs de position reposant sur des effets capacitifs : le déplacement sur un axe x du système d'intérêt modifie la capacité C d'un condensateur, inséré dans le filtre ci-contre. La fréquence centrale de la bande passante du filtre permet de déterminer la fréquence d'oscillation d'un oscillateur non représenté.

Ce filtre a pour fonction de transfert complexe

$$\underline{H} = \frac{A_0}{1 + \mathrm{j}Q\left(\xi - \dfrac{1}{\xi}\right)}$$

avec $A_0 = 0{,}1$, $Q = 25$, $\xi = \omega/\omega_0$ et on donne $\log 25 \simeq 1{,}4$.

1 - Donner les équations des deux asymptotes hautes et basses fréquences du gain en décibels de ce filtre.

2 - Représenter le diagramme de Bode (en amplitude uniquement) donnant le gain en décibel en fonction de $\log \xi$.

3 - Préciser la nature de ce filtre.

4 - Exprimer, à partir du schéma, la fonction de transfert $\underline{H}$ en fonction de ω et des valeurs caractéristiques des composants de ce filtre. Par identification, donner les expressions littérales de ω_0 et Q en fonction des valeurs caractéristiques des composants.

On utilise le dispositif complet pour suivre les déplacements x de la partie mobile d'un capteur capacitif dont la capacité est donnée par la loi

$$C(x) = C_0 \left(1 - \frac{|x|}{L}\right)$$

avec $C_0 = 10\,\mu\mathrm{F}$ et $L = 10\,\mathrm{mm}$. Ce capteur forme le condensateur. Les composants sont choisis tels que le montage oscille à la fréquence f_{osc}, égale à la fréquence centrale de la bande passante du filtre, liée à la capacité C par la relation

$$f_{\mathrm{osc}} = \frac{D}{\sqrt{C}} \qquad \text{avec} \qquad D = 1\mathrm{H}^{-1/2}\,.$$

À la position de référence du capteur ($x = 0$), la fréquence d'oscillation est f_0.

5 - Montrer par un développement limité que pour un petit déplacement x ($|x|/L \ll 1$) la fréquence d'oscillation peut se mettre sous la forme $f_{\mathrm{osc}} \simeq a\,|x| + b$, et expliciter a et b en fonction des données.

> *Le développement limité à utiliser est le suivant : pour $|\varepsilon| \ll 1$ et α réel,*
>
> $$(1+\varepsilon)^\alpha \simeq 1 + \alpha\varepsilon\,.$$
>
> *Compte tenu de l'expression de f_{osc}, on aura ici $\varepsilon = |x|/L$ et $\alpha = -1/2$. À vous de les faire apparaître dans les équations !*

6 - On note $\Delta f = f_{\mathrm{osc}} - f_0$ la variation de fréquence liée à un déplacement. La plus petite variation détectable est $\Delta f_{\min} = 3\,\mathrm{Hz}$. Quel est le plus petit déplacement détectable ?