

Filtrage linéaire

Exercices

Exercice 1 : Filtre RL

1 Analyse asymptotique par équivalence :

▷ à très basse fréquence, la bobine est équivalente à un fil, donc $\underline{S} = 0$;

▷ à très haute fréquence, la bobine est équivalente à un interrupteur ouvert, donc le courant dans le filtre est nul et on déduit de la loi des mailles $s = e$.

Conclusion : le filtre est a priori **un filtre passe-haut**.

2 Utilisons un pont diviseur de tension en représentation complexe,

$$\underline{H} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{jL\omega}{R + jL\omega} = \frac{j\frac{L}{R}\omega}{1 + j\frac{L}{R}\omega} \quad \text{soit} \quad \underline{H} = H_0 \frac{j\frac{\omega}{\omega_c}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} H_0 = 1 \\ \omega_c = R/L \end{cases}$$

3 Simplifions la fonction de transfert dans la limite très basse fréquence $\omega \ll \omega_c$,

$$\underline{H} \sim \frac{j\frac{\omega}{\omega_c}}{1} \sim j\frac{\omega}{\omega_c} \quad \text{donc} \quad |\underline{H}| = \frac{\omega}{\omega_c}$$

Ainsi,

$$G_{dB}(\omega) = 20 \log |\underline{H}| = 20 \log x$$

Comme l'axe des abscisses d'un diagramme de Bode est une échelle logarithmique (en d'autres termes l'abscisse est $\log x$), on en déduit directement que **la pente de l'asymptote à basse fréquence est de pente +20 dB/décade et qu'elle passe par le point $G_{dB} = 0$ en $x = 1$** .

De même dans la limite très haute fréquence $\omega \gg \omega_c$,

$$\underline{H} \sim \frac{j\frac{\omega}{\omega_c}}{j\frac{\omega}{\omega_c}} = 1. \quad \text{d'où} \quad G_{dB}(\omega) = 20 \log 1 = 0.$$

L'asymptote haute fréquence est donc **une asymptote horizontale**.

L'allure du diagramme de Bode est représentée figure 3.

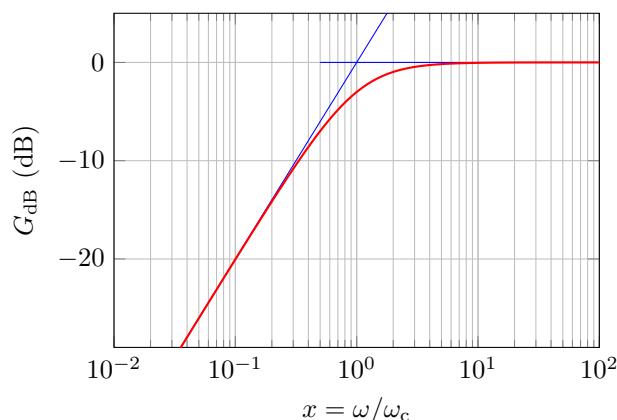


Figure 3 – Diagramme de Bode du filtre RL.

4 Comme les trois harmoniques sont de même amplitude et en phase

$$e(t) = E_0 [\cos(2\pi f_1 t) + \cos(2\pi f_2 t) + \cos(2\pi f_3 t)] .$$

D'après les valeurs numériques données, la pulsation de coupure du filtre vaut

$$\omega_c = \frac{R}{L} = 1,0 \cdot 10^5 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \quad \text{soit} \quad f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = 16 \text{ kHz}.$$

Rappel de cours : Pour un signal d'entrée

$$e(t) = \sum_n E_n \cos(\omega_n t + \varphi_n)$$

le signal de sortie du filtre s'écrit

$$s(t) = \sum_n |H(\omega_n)| E_n \cos(\omega_n t + \varphi_n + \arg H(\omega_n))$$

où $|H(\omega_n)| = 10^{G_{dB}(\omega_n)/20}$ et $\arg H(\omega_n) = \varphi(\omega_n)$.

Comme $x_1 = f_1/f_c = 6 \cdot 10^{-3}$, la composante associée est très atténuée : le gain n'est même pas représenté sur le diagramme donné. On peut donc négliger sa contribution au signal de sortie. De même, la contribution de fréquence f_2 (soit $x_2 = 6 \cdot 10^{-2}$) est atténuée d'environ 22 dB, ce qui correspond à un facteur multiplicatif 1/12. Elle est de plus déphasée d'environ 1,5 rad. Enfin la contribution de fréquence f_3 (soit $x_3 = 6,25$) est associée à un gain à peu près nul, signe qu'elle n'est pas atténuée, mais on peut estimer son déphasage à 0,2 rad. Ainsi,

$$s(t) = \frac{E_0}{12} \cos(2\pi f_2 t + 1,5) + E_0 \cos(2\pi f_3 t + 0,2).$$

5 La fréquence du signal est bien plus faible que la fréquence de coupure du filtre, qui est dans son domaine asymptotique, décrit par une pente de 20 dB/décade dans le diagramme de Bode. En repassant en représentation temporelle, cela indique que le circuit se comporte en dérivateur,

$$s(t) \propto \frac{de}{dt}.$$

La pente d'un signal triangle étant constante, alternativement positive et négative, le signal dérivé présente des plateaux alternativement positifs et négatifs, ce qui est bien un signal créneau de même fréquence que le signal triangle.

Exercice 2 : Filtre passe-haut d'ordre 2

1 Analysons qualitativement les régimes asymptotiques.

▷ à très basse fréquence, la bobine est équivalente à un fil donc $\underline{S} = 0$;

▷ à très haute fréquence la bobine est équivalente à un interrupteur ouvert, ce qui empêche tout courant de parcourir le circuit. Comme par le condensateur est équivalent à un fil, on déduit de la loi des mailles $\underline{S} = \underline{E}$.

Conclusion : il s'agit bien d'un **filtre passe-haut**.

2 D'après la relation du pont diviseur de tension,

$$\underline{H} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{jL\omega}{R + \frac{1}{jC\omega} + jL\omega} = \frac{j\frac{L}{R}\omega}{1 + \frac{1}{jRC\omega} + j\frac{L}{R}\omega}$$

Pour faire apparaître la forme souhaitée, on multiplie le numérateur et le dénominateur par $1 = \omega_0/\omega_0$, ce qui permet d'écrire

$$\underline{H} = \frac{j\frac{L\omega_0}{R}x}{1 + \frac{1}{jRC\omega_0x} + j\frac{L\omega_0}{R}x}$$

Comme pour ce circuit RLC série $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$ et $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$, on en identifie

$$\frac{L\omega_0}{R} = \frac{L}{R\sqrt{LC}} = Q \quad \text{et} \quad RC\omega_0 = \frac{RC}{\sqrt{LC}} = R\sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{1}{Q}.$$

ce qui permet enfin de faire apparaître la forme souhaitée,

$$\underline{H} = \frac{jQx}{1 + jQ(x - \frac{1}{x})}$$

3 Simplifions la fonction de transfert dans les deux limites asymptotiques. À très basse fréquence ($\omega \ll \omega_0$ ou $x \ll 1$),

$$\underline{H} \sim \frac{jQx}{-jQ/x} \sim -x^2 \quad \text{donc} \quad G_{dB} \sim 20 \log x^2 = 40 \log x$$

La pente de l'asymptote très basse fréquence est donc de +40 dB/décade. De même, dans la limite très haute fréquence $x \gg 1$,

$$\underline{H} \sim \frac{jQx}{jQx} \sim 1 \quad \text{donc} \quad G_{dB} \sim 0$$

L'asymptote très haute fréquence est donc horizontale. Le diagramme de Bode asymptotique et le diagramme de Bode réel (tracé pour $Q = 1/2 < 1/\sqrt{2}$) sont représentés figure 4.

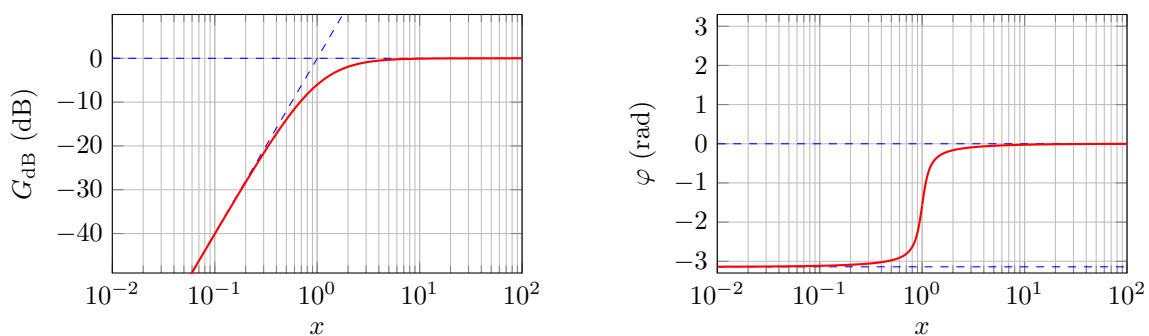


Figure 4 – Diagramme de Bode du filtre RLC passe-haut d'ordre 2. Tracé pour $Q = 1/2$, diagramme de Bode en phase ajouté pour information.

4 Le comportement intégrateur ou dérivateur d'un filtre se traduit en termes de diagramme de Bode par une asymptote de pente ± 20 dB/décade, ce qui n'est pas le cas ici : **il n'existe aucun domaine de fréquence dans lequel ce filtre a un comportement d'intégrateur ou de dérivateur.**

Exercice 3 : Lecture de diagrammes de Bode

Rappel de cours : Pour un signal d'entrée

$$e(t) = \sum_n E_n \cos(\omega_n t + \varphi_n)$$

le signal de sortie du filtre s'écrit

$$s(t) = \sum_n |\underline{H}(\omega_n)| E_n \cos(\omega_n t + \varphi_n + \arg \underline{H}(\omega_n))$$

où $|\underline{H}(\omega_n)| = 10^{G_{dB}(\omega_n)/20}$ et $\arg \underline{H}(\omega_n) = \varphi(\omega_n)$.

Pour faciliter la rédaction on note $e(t) = e_0 + e_1(t) + e_{10}(t) + e_{100}(t)$ et de même pour le signal de sortie s . Ainsi, par linéarité, chaque composante e_n du signal d'entrée donne une composante s_n au signal de sortie.

• Premier filtre :

D'après l'allure du diagramme de Bode, il s'agit d'un **filtre passe-haut, de fréquence caractéristique f_0 de l'ordre de 10 kHz**. Son asymptote TBF a pour pente 40 dB/décade, il s'agit donc d'un **filtre d'ordre 2**.

Reconstruisons le signal de sortie :

▷ Le terme constant e_0 est complètement coupé par le filtre, $s_0 = 0$.

▷ L'harmonique de fréquence f est atténuée de 40 dB et peut donc être négligée dans le signal de sortie (40 dB correspond à une division par 100), soit $s_1(t) \simeq 0$.

▷ L'harmonique de fréquence $10f$ est atténuée de 10 dB, ce qui correspond à un gain en amplitude de $10^{-G_{dB}/20} = 10^{-1/2} \simeq 0,3$, et elle est également déphasée de $+\pi/2$, donc

$$s_{10}(t) = 0,3E_0 \cos\left(10\omega t + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) = 0,3E_0 \cos\left(10\omega t + \frac{3\pi}{4}\right)$$

▷ l'harmonique de fréquence $100f$ n'est presque pas atténuée ni déphasée, donc

$$s_{100}(t) \simeq e_{100}(t) = E_0 \cos\left(100\omega t - \frac{\pi}{3}\right)$$

Finalement,

$$s(t) = 0,3E_0 \cos\left(10\omega t + \frac{3\pi}{4}\right) + E_0 \cos\left(100\omega t - \frac{\pi}{3}\right)$$

• Deuxième filtre :

D'après l'allure du diagramme de Bode, il s'agit d'un **filtre passe-haut, de fréquence caractéristique f_0 de l'ordre de 0,1 kHz**. Son asymptote TBF a pour pente 40 dB/décade, il s'agit donc d'un **filtre d'ordre 2**, ce qui est confirmé par la présence de la résonance.

Pour reconstruire le signal de sortie, il suffit de remarquer que la fréquence f est d'une décade supérieure à la fréquence propre du filtre. Un signal harmonique de cette fréquence n'est presque pas atténué ni déphasé par le filtre, et c'est encore plus vrai pour les signaux de fréquence $10f$ et $100f$. En revanche, le terme constant est coupé par le filtre. Ainsi,

$$s(t) = E_0 \cos(\omega t) + E_0 \cos\left(10\omega t + \frac{\pi}{4}\right) + E_0 \cos\left(100\omega t - \frac{\pi}{3}\right)$$

• Troisième filtre :

Ce filtre laisse passer les basses et les hautes fréquences, mais coupe une bande de fréquence intermédiaire : il s'agit d'un **filtre coupe-bande** dont la fréquence coupée vaut 1 kHz. Vous n'avez pas à savoir identifier l'ordre d'un tel filtre : pour information, il s'agit d'un ordre 2.

La composante e_1 est exactement de la fréquence coupée : elle ne contribue donc pas du tout au signal de sortie, c'est-à-dire $s_1 = 0$. Les autres composantes harmoniques du signal d'entrée, y compris la composante continue, sont de fréquence suffisamment différente de la fréquence coupée pour n'être ni atténuée ni déphasée. Le signal de sortie s'écrit donc sous la forme

$$s(t) = E_0 + E_0 \cos\left(10\omega t + \frac{\pi}{4}\right) + E_0 \cos\left(100\omega t - \frac{\pi}{3}\right)$$

• Quatrième filtre :

Le diagramme de Bode est celui d'un **filtre passe-bas de fréquence de coupure $f_c = 100$ Hz**. L'asymptote très haute fréquence a une pente de -20 dB/décade, le filtre est donc **du premier ordre**.

Le terme constante e_0 passe au travers du filtre sans être modifié. Les termes suivants sont de fréquence suffisamment supérieure à la fréquence de coupure pour que le diagramme de Bode puisse être approximé par son asymptote. On peut alors déterminer le signal de sortie comme dans le cas du premier filtre, mais il y a plus simple : comme le filtre est d'ordre 1, alors il se comporte comme un intégrateur pour les signaux de fréquence supérieure à sa fréquence de coupure. En déduire le signal de sortie est donc très simple,

$$s(t) = E_0 + \frac{\omega_c}{\omega} E_0 \sin(\omega t) + \frac{\omega_c}{10\omega} E_0 \sin\left(10\omega t + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\omega_c}{100\omega} E_0 \sin\left(100\omega t - \frac{\pi}{3}\right)$$

Attention à ne pas oublier la pulsation de coupure en préfacteur ... sans quoi les expressions ne sont pas homogènes.

En écrivant le signal en termes de cosinus, on obtient

$$s(t) = E_0 + \frac{\omega_c}{\omega} E_0 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\omega_c}{10\omega} E_0 \cos\left(10\omega t + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\omega_c}{100\omega} E_0 \cos\left(100\omega t - \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{2}\right)$$

d'où finalement

$$s(t) = E_0 + \frac{\omega_c}{\omega} E_0 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\omega_c}{10\omega} E_0 \cos\left(10\omega t - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\omega_c}{100\omega} E_0 \cos\left(100\omega t - \frac{5\pi}{6}\right)$$

Exercice 4 : Conception d'un filtre de signaux acoustiques

1 Le gabarit du filtre est représenté figure 5. La condition sur le gain nominal permet d'éliminer la zone colorée en bleu. La contrainte sur les basses fréquences permet d'éliminer la zone en jaune. La contrainte sur les hautes fréquences permet enfin d'éliminer la zone colorée en rouge.

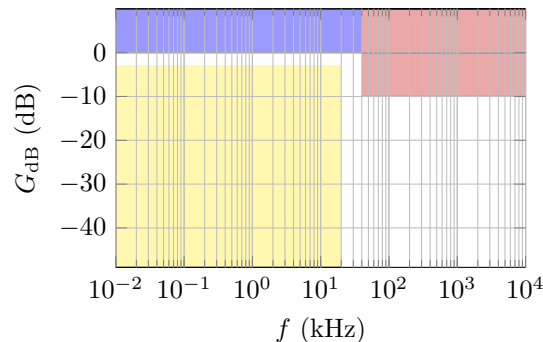


Figure 5 – Gabarit du filtre pour signaux acoustiques. Version couleur sur le site de la classe.

2.a Pour un filtre passe bas du premier ordre, le diagramme de Bode en gain a une **asymptote horizontale dans la limite très basse fréquence et une asymptote de pente -20 dB/décade dans la limite très haute fréquence**. Pour $f = f_c$, $\underline{H} = 1/(1 + j)$ donc $|\underline{H}| = 1/\sqrt{2}$ et $G_{dB} = -3$ dB.

2.b Pour savoir si ce filtre peut satisfaire au cahier des charges, il faut superposer sa courbe de gain au gabarit du filtre et vérifier qu'elle n'empiète pas sur les zones interdites du gabarit. On voit que **ce n'est pas le cas** : la courbe de gain passe dans la zone représentée en rouge sur le gabarit, signe que le passe-bas d'ordre 1 n'atténue pas suffisamment les fréquences proches de 40 kHz. Pour éviter cela, il faut que l'asymptote très haute fréquence soit plus inclinée. Or la pente est d'autant plus élevée que l'ordre du filtre est élevé : utiliser un filtre d'ordre supérieur devrait permettre de résoudre le problème.

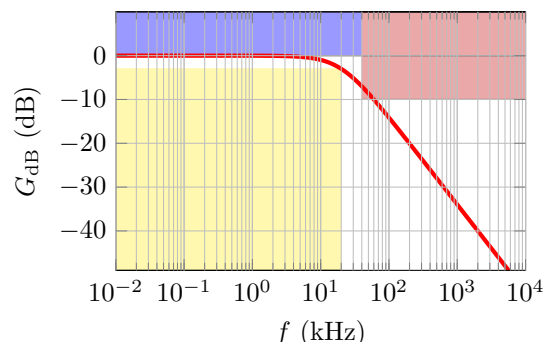


Figure 6 – Gabarit du filtre pour signaux acoustiques superposé à la courbe en gain d'un passe-bas d'ordre 1. Version couleur sur le site de la classe.

3.a La courbe de gain d'un filtre passe-bas du second ordre **asymptote horizontale dans la limite très basse fréquence et une asymptote de pente -40 dB/décade dans la limite très haute fréquence**. Par contre, il peut présenter une résonance au voisinage de sa fréquence centrale. Pour voir s'il peut satisfaire au cahier des charges, on superpose sur la figure 7 le diagramme asymptotique au gabarit, ce qui permet de voir que le diagramme asymptotique est complètement compris dans la zone permise du gabarit. Ainsi, **ce filtre peut potentiellement satisfaire au cahier des charges**.

3.b Lorsque $f = f_c$, c'est-à-dire $x = 1$,

$$\underline{H} = \frac{1}{j/Q} \quad \text{donc} \quad G_{dB} = 20 \log Q.$$

À la fréquence de coupure, il faut

$$-3 \text{ dB} \leq G_{dB} \leq 0 \text{ dB} \quad \text{soit} \quad 10^{-3/20} \leq Q \leq 10^0 \quad \text{et} \quad \boxed{0,71 \leq Q \leq 1}$$

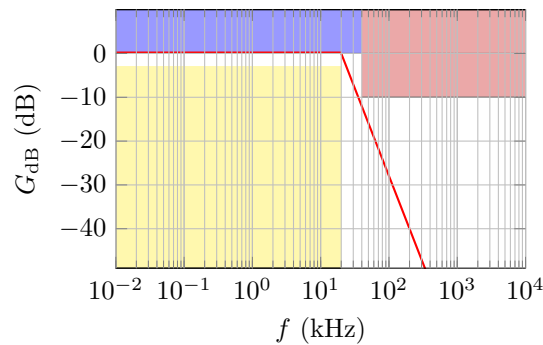


Figure 7 – Gabarit du filtre pour signaux acoustiques superposé à la courbe asymptotique en gain d'un passe-bas d'ordre 2. Version couleur sur le site de la classe.

Notons que si $Q > 1/\sqrt{2}$ il y a résonance, c'est-à-dire que la fonction de transfert passe par un maximum pour $f_r < f_0$, de gain supérieur au gain nominal. La courbe de gain empiète alors sur la zone interdite bleue du gabarit. Cependant, le gain nominal n'est pas forcément le gain maximal autorisé, mais plutôt la valeur asymptotique : on peut penser qu'une résonance large et peu marquée est acceptable.

Annales de concours

Exercice 5 : Filtre de Wien

[oral CCP]

1 Dans la limite très haute fréquence, les condensateurs sont équivalents à des fils, donc $\underline{S} = 0$. Dans la limite très basse fréquence, les condensateurs sont cette fois équivalents à des interrupteurs ouverts. Aucun courant ne circule dans les résistances, et ainsi on a également $\underline{S} = 0$. Selon toute vraisemblance, ce filtre est donc **un filtre passe-bande**.

2 Notons \underline{Y} l'admittance de l'association R, C parallèle,

$$\underline{Y} = \frac{1}{R} + jC\omega.$$

En utilisant cette admittance équivalente, on reconnaît un pont diviseur de tension, d'où on déduit

$$\underline{H} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{\underline{Z}}{R + \frac{1}{jC\omega} + \underline{Z}}$$

Pour l'obtenir directement sous la forme donnée dans l'énoncé, on multiplie le numérateur et le dénominateur par \underline{Y} , ce qui donne

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + \left(R + \frac{1}{jC\omega}\right) \underline{Y}} = \frac{1}{1 + \left(R + \frac{1}{jC\omega}\right) \left(\frac{1}{R} + jC\omega\right)} = \frac{1}{1 + 1 + jRC\omega + \frac{1}{jRC\omega} + 1}$$

3 En réécrivant la fonction de transfert en termes des variables réduites de l'énoncé, on trouve

$$\underline{H} = \frac{1}{3 + jx + \frac{1}{jx}} = \frac{1/3}{1 + \frac{j}{3} \left(x - \frac{1}{x}\right)}$$

ce qui donne bien

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + jQ \left(x - \frac{1}{x}\right)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} H_0 = 1/3 \\ Q = 1/3 \end{cases}$$

4 Le gain en amplitude du filtre est défini par

$$G = |\underline{H}| = \frac{|H_0|}{\sqrt{1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}.$$

Il est maximal lorsque le dénominateur est minimal, c'est-à-dire lorsque le terme entre parenthèses s'annule. Cela correspond à $x = 1$, qui donne le **gain maximal** $G_{\max} = 1/3$, soit $G_{\text{dB}} = 20 \log(1/3) = -9,5 \text{ dB}$. La fonction de transfert en $x = 1$ est réelle, c'est-à-dire d'argument égal à 0. À la pulsation ω_0 , la sortie et l'entrée ne sont donc pas déphasées.

5 Dans la limite très basse fréquence, la fonction de transfert est équivalente à

$$\underline{H} \sim \frac{H_0}{-jQ/x} = \frac{jH_0x}{Q} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} G_{\text{dB}} = 20 \log \underline{H} \sim 20 \log \frac{H_0x}{Q} = 20 \log x \\ \varphi = \arg \underline{H} = \pi/2 \end{cases}$$

De même, dans la limite très haute fréquence, la fonction de transfert est équivalente à

$$\underline{H} \sim \frac{H_0}{jQx} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} G_{\text{dB}} = 20 \log \underline{H} \sim 20 \log \frac{H_0}{Qx} = -20 \log x \\ \varphi = \arg \underline{H} = -\pi/2 \end{cases}$$

Ainsi, le diagramme de Bode asymptotique en gain compte **deux asymptotes de pente $\pm 20 \text{ dB/décade}$ passant par $G_{\text{dB}} = 0$ pour $x = 1$** , alors que le diagramme de Bode en phase compte **deux asymptotes horizontales de hauteur $\pm \pi/2$** . Pour tracer l'allure du diagramme réel, on utilise en plus la question précédente qui indique que la courbe de gain réelle passe par le point $G_{\text{dB}} = -9,5 \text{ dB}$ en $x = 1$ alors que la courbe de phase réelle y passe par 0. Le diagramme de Bode est représenté figure 8.

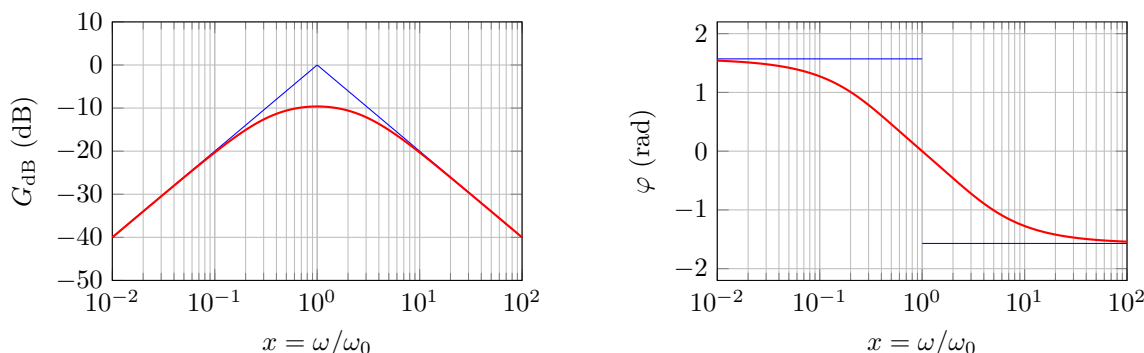


Figure 8 – Diagramme de Bode du filtre de Wien. Diagramme de Bode asymptotique en bleu, diagramme réel en rouge. Version couleur sur le site de la classe.

6 Numériquement, $\omega_0 = 2,0 \cdot 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. Comme le diagramme de Bode réel n'est pas donné dans l'énoncé, on peut au choix utiliser la fonction de transfert ou raisonner sur le diagramme asymptotique. Étudions le signal de sortie du filtre associé à chaque composante du signal d'entrée,

- ▷ Le terme continu est complètement coupé par le filtre ;
- ▷ Le terme de pulsation $\omega = \omega_0/10$ se trouve une décade en dessous de la pulsation propre : en utilisant le diagramme asymptotique il est atténué de 20 dB, ce qui correspond à un facteur 10 en amplitude, et déphasé d'environ 1,2 rad ;
- ▷ Le terme pulsation $10\omega = \omega_0$ est à la pulsation propre du filtre : il n'est pas déphasé mais seulement atténué d'un facteur 1/3 (gain maximal) ;
- ▷ Le terme à la pulsation $100\omega = 10\omega_0$ est une décade au dessus de la pulsation propre : il est atténué comme le premier terme d'un facteur 10 en amplitude, et déphasé d'environ $-1,2 \text{ rad}$.

Ainsi,

$$s(t) = \frac{E_0}{10} \cos(\omega t - 1,2) + \frac{E_0}{3} \cos(10\omega t) + \frac{E_0}{10} \cos(100\omega t + 1,2)$$

Rappel de cours : Pour un signal d'entrée

$$e(t) = \sum_n E_n \cos(\omega_n t + \varphi_n)$$

le signal de sortie du filtre s'écrit

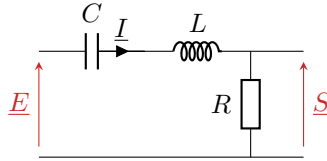
$$s(t) = \sum_n |\underline{H}(\omega_n)| E_n \cos(\omega_n t + \varphi_n + \arg \underline{H}(\omega_n))$$

où $|\underline{H}(\omega_n)| = 10^{G_{\text{dB}}(\omega_n)/20}$ et $\arg \underline{H}(\omega_n) = \varphi(\omega_n)$.

Exercice 6 : Modélisation d'un récepteur radio**[oral banque PT]**

1 Le récepteur doit réaliser un **filtrage passe-bande**. La tension de sortie doit donc être mesurée **aux bornes de la résistance**, voir figure 9. En effet,

- ▷ dans la limite très basse fréquence, le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert donc $\underline{I} = 0$ donc d'après la loi d'Ohm $\underline{S} = 0$;
- ▷ dans la limite très haute fréquence, c'est cette fois la bobine qui est équivalente à un interrupteur ouvert donc on a de même $\underline{S} = 0$.

**Figure 9 – Modèle de récepteur radio.**

2 Le condensateur et la bobine montés en série sont équivalents à une impédance

$$\underline{Z}_{LC} = jL\omega + \frac{1}{jC\omega}.$$

En identifiant un pont diviseur de tension,

$$\underline{H} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{R}{R + \underline{Z}_{LC}} = \frac{1}{1 + \frac{\underline{Z}_{LC}}{R}}$$

soit en remplaçant

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + \frac{jL\omega}{R} + \frac{1}{jRC\omega}}.$$

3 Un critère possible serait que la fréquence centrale f_0 du passe-bande doit être incluse dans la bande de fréquence que l'on cherche à capter, et que la bande passante du filtre doit être au moins aussi large que la bande de fréquence cherchée. En utilisant les résultats connus sur le RLC série,

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad \Delta f = \frac{f_0}{Q} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \times R\sqrt{\frac{C}{L}} = \frac{R}{2\pi L}.$$

Comme Δf ne dépend pas de C , l'unique critère porte donc sur la fréquence centrale du filtre :

$$f_0 > f_1 = 150 \text{ kHz} \quad \text{donc} \quad 2\pi\sqrt{LC} < \frac{1}{f_1} \quad \text{d'où} \quad C < \frac{1}{4\pi^2 f_1^2 L} = 1,1 \cdot 10^{-9} \text{ F}$$

et de même

$$f_0 < f_2 = 300 \text{ kHz} \quad \text{donc} \quad 2\pi\sqrt{LC} > \frac{1}{f_2} \quad \text{d'où} \quad C > \frac{1}{4\pi^2 f_2^2 L} = 2,8 \cdot 10^{-10} \text{ F}.$$

Ainsi,

$$0,28 \text{ nF} < C < 1,1 \text{ nF}.$$

Exercice 7 : Filtre RLC**[oral banque PT]**

1 Dans la limite très basse fréquence, la bobine est équivalente à un fil et C à un interrupteur ouvert, donc l'intensité dans la branche est nulle, et ainsi $v_s = 0 + 0$. Dans la limite très haute fréquence, C est équivalent à un fil donc on a directement $v_s = v_e$.

↪ le filtre est un passe-haut.

2 Diviseur de tension :

$$\underline{H} = \frac{\underline{Z}_{RL}}{\underline{Z}_{RL} + \underline{Z}_C} = \frac{R + jL\omega}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}}$$

Pour passer à la forme canonique, on multiplie en haut et en bas par $jC\omega$,

$$\underline{H} = \frac{jRC\omega - LC\omega^2}{1 + jRC\omega - LC\omega^2}.$$

On identifie l'opération à faire en comparant la forme canonique à l'expression que l'on a : le dénominateur n'est pas fractionnaire.

Pour avancer, on peut proposer à l'examinateur d'identifier directement ω_0 et Q car il s'agit d'un RLC série, donc d'un circuit de référence. S'il refuse, il faut alors faire le calcul ...

Par identification du dénominateur avec la forme canonique, on en déduit

$$-LC\omega^2 = -x^2 = -\frac{\omega^2}{\omega_0^2} \quad \text{soit} \quad \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

et

$$jRC\omega = \frac{jx}{Q} = \frac{j\omega}{Q\omega_0} \quad \text{soit} \quad Q = \frac{1}{RC\omega_0} \quad \text{d'où} \quad \boxed{Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

3 En très basse fréquence,

$$\underline{H} \sim \frac{jx}{1} = \frac{j\omega}{Q} \quad \text{d'où} \quad G_{\text{dB}} \sim 20 \log x - 20 \log Q,$$

la pente est donc de -20 dB/décade.

En très haute fréquence,

$$\underline{H} \sim \frac{-x^2}{-x^2} = 1 \quad \text{d'où} \quad G_{\text{dB}} = 0$$

ce qui est conforme avec **une asymptote horizontale**.

Avec l'ordonnée à l'origine de l'asymptote TBF ($x = 10^0 = 1$), $G_{\text{dB}} = -20 \log Q = -20$ dB, on déduit $\log Q = 1$ soit $Q = 10$. On peut aussi utiliser le fait que $G_{\text{TBF}} = 0$ lorsque $x = Q$.

4 La question n'est pas simple : changer R modifie la valeur de Q , mais cela a un impact énorme sur le diagramme de Bode, d'une part via l'intermédiaire de l'ordonnée à l'origine de l'asymptote basse fréquence et d'autre part car elle contraint l'existence ou non d'une résonance. Une illustration est donnée sur la figure 10.

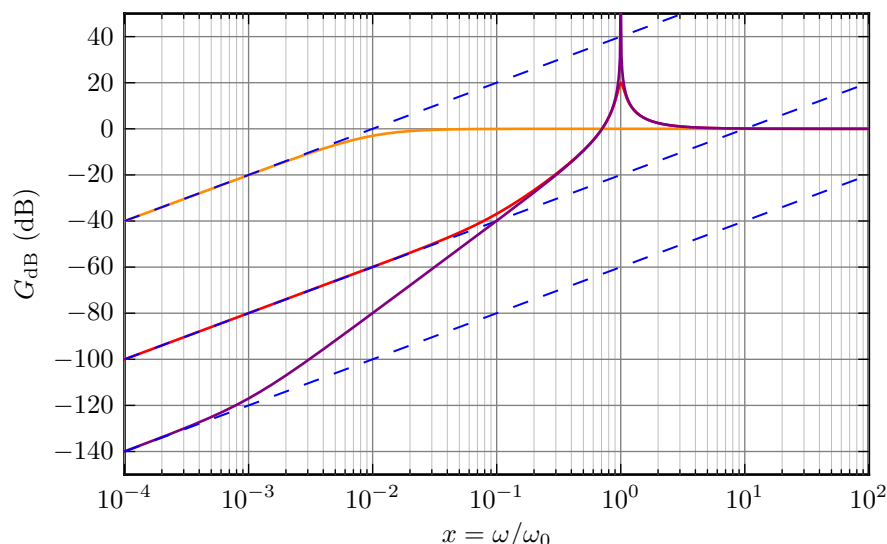


Figure 10 – Diagrammes de Bode asymptotique d'un filtre RLC. Les trois diagrammes sont tracés pour la même fonction de transfert, la même pulsation propre, seule la valeur du facteur de qualité est modifiée : elle vaut 0,01 pour la courbe orange, 10 pour la courbe rouge (cas de l'énoncé) et 1000 pour la courbe violette. Version couleur sur le site de la classe.

Le signal carré est la dérivée du signal triangulaire. Le facteur de qualité du filtre est donc tel que tout le spectre du signal soit dans le domaine très basse fréquence du filtre : comme la pente de l'asymptote est de $+20$ dB/décade, il se comporte en dérivateur.

Si l'on observe des impulsions, cela signifie que les variations brusques du signal, associées aux hautes fréquences, sont sensiblement mieux transmises que les variations lentes, associées aux basses fréquences et qui décrivent son allure globale. Le facteur de qualité est donc tel que les basses fréquences du spectre soient coupées et les hautes fréquences transmises.

Par exemple, si la fréquence fondamentale du signal est telle que $x = 1 \cdot 10^{-3}$, alors la première situation pourrait correspondre à la courbe rouge de la figure 10, et la deuxième à la courbe orange.

Exercice 8 : Fréquence centrale d'un passe-bande

[écrit banque PT 2015]

1 Dans la limite très haute fréquence, $\xi \gg 1$ et la fonction de transfert est équivalente à

$$\underline{H} \sim \frac{A_0}{jQ\xi}$$

donc

$$G_{\text{dB}} = 20 \log |\underline{H}| \sim 20 \log \frac{A_0}{Q\xi} = -20 \log \xi + 20 \log \frac{A_0}{Q}.$$

Ainsi l'asymptote haute fréquence a **pour pente -20 dB/décade et pour ordonnée à l'origine $20 \log(A_0/Q)$** . De même, dans la limite très basse fréquence $\xi \ll 1$ la fonction de transfert est équivalente à

$$\underline{H} \sim \frac{A_0}{-j \frac{Q}{\xi}}$$

donc

$$G_{\text{dB}} \sim 20 \log \frac{A_0 \xi}{Q} = 20 \log \xi + 20 \log \frac{A_0}{Q}.$$

Ainsi l'asymptote basse fréquence a **pour pente $+20 \text{ dB/décade}$ et pour ordonnée à l'origine $20 \log(A_0/Q)$** .

2 Le diagramme asymptotique se trace à partir des équations déterminées précédemment, et l'allure du diagramme réel s'en déduit en calculant la valeur du gain en $\xi = 1$,

$$G_{\text{dB}}(\xi = 1) = 20 \log A_0 = -20 \text{ dB}.$$

Diagramme complet tracé figure 11.

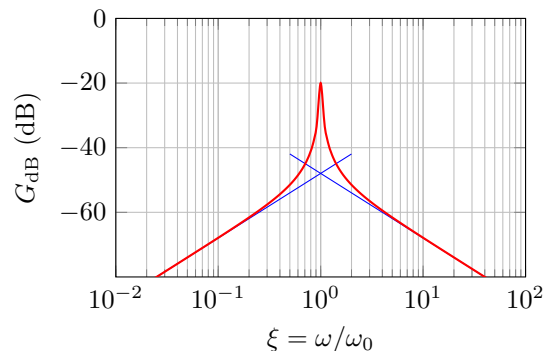


Figure 11 – Diagramme de Bode du filtre. Diagramme asymptotique en bleu, diagramme réel en rouge. Version couleur sur le site de la classe.

3 On conclut à partir du diagramme de Bode que **le filtre est un passe-bande**.

On peut aussi le déterminer par analyse par dipôles équivalents, mais compte tenu de l'ordre des questions le sujet demande probablement d'identifier le diagramme de Bode.

4 L'association parallèle de R , L et C a pour admittance équivalente

$$\underline{Y}_{RLC} = \frac{1}{R} + \frac{1}{jL\omega} + jC\omega$$

On reconnaît ensuite un pont diviseur de tension, donc

$$\underline{H} = \frac{U_2}{U_1} = \frac{Z_{RLC}}{Z_{RLC} + R_0} = \frac{1}{1 + R_0 \underline{Y}_{RLC}}$$

d'où en remplaçant l'admittance \underline{Y}_{RLC}

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + \frac{R_0}{R} + \frac{R_0}{jL\omega} + jR_0C\omega}$$

Pour aboutir à la forme demandée par l'énoncé avec 1 comme terme constant du dénominateur, il faut diviser numérateur et dénominateur par $1 + R_0/R$, soit

$$\underline{H} = \frac{\frac{1}{1 + R_0/R}}{1 + \frac{R_0}{jL\omega(1 + R_0/R)} + j\frac{R_0C}{1 + R_0/R}\omega}$$

et en identifiant en fonction des dépendance en ω avec la forme donnée par l'énoncé on trouve

$$\boxed{A_0 = \frac{1}{1 + R_0/R}} \quad jQ \frac{\omega}{\omega_0} = j \frac{R_0C}{1 + R_0/R} \omega \quad -j \frac{Q\omega_0}{\omega} = \frac{R_0}{jL\omega(1 + R_0/R)}$$

dont on déduit ensuite

$$Q^2 = \frac{R_0C}{1 + R_0/R} \times \frac{R_0}{L(1 + R_0/R)} = \frac{R_0^2}{(1 + R_0/R)^2} \frac{C}{L} \quad \text{soit} \quad \boxed{Q = \frac{R R_0}{R + R_0} \sqrt{\frac{C}{L}}}$$

et

$$\omega_0^2 = \frac{R_0}{L(1 + R_0/R)} \times \frac{1 + R_0/R}{R_0C} = \frac{L}{C} \quad \text{soit} \quad \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}}$$

5 La fréquence centrale du filtre s'écrit sous la forme

$$f_{\text{osc}} = D C^{-1/2} = \frac{D}{\sqrt{C_0}} \left(1 - \frac{|x|}{L}\right)^{-1/2}$$

En utilisant le développement limité $(1 + \varepsilon)^\alpha = 1 + \alpha\varepsilon$ avec $\varepsilon = -|x|/L$ et $\alpha = -1/2$, on trouve

$$f_{\text{osc}} = \frac{D}{\sqrt{C_0}} \left(1 + \frac{|x|}{2L}\right)$$

ce qui est bien de la forme

$$\boxed{f_{\text{osc}} = a|x| + b \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a = \frac{D}{2L\sqrt{C_0}} \\ b = \frac{D}{\sqrt{C_0}} \end{cases}}$$

6 La fréquence de référence f_0 lorsque $x = 0$ vaut

$$f_0 = \frac{D}{\sqrt{C_0}}$$

ce qui permet d'écrire

$$\Delta f = \frac{D}{2L\sqrt{C_0}} |x|$$

On en déduit le déplacement minimal x_{\min} mesurable,

$$\boxed{|x_{\min}| = \frac{2L\sqrt{C_0}}{D} \Delta f_{\min} = 0,2 \text{ mm}}$$