

# PROGRAMME DE COLLES N° 14

Semaine du 13/01/2025 au 17/01/2025

👉 *Généralités sur les suites, matrices* 👈

## Format de la colle :

- Automatismes de calcul (env. 10 min) : quelques items simples parmi les thèmes de la liste (actualisée chaque semaine) en page 2.
- Restitution du cours (env. 15 min) : définition et/ou théorème des chapitres au programme, puis démonstrations, exemples ou exercices exigibles listés plus bas.
- Exercice(s) libre(s) (env 30 min).

## — Chapitre 11 : généralités sur les suites numériques —

Révisions du programme précédent.

## — Chapitre 12 : matrices —

Sans l'inversibilité cette semaine.

### 1 Matrices et opérations algébriques

- 1.1 L'ensemble  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  des matrices rectangulaires . . . . .
- 1.2 Combinaisons linéaires de matrices . . . . .
- 1.3 Produits de matrices . . . . .
- 1.4 Propriétés de la multiplication matricielle . . . . .
- 1.5 Transposition . . . . .
- 1.6 Base canonique de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  . . . . .

### 2 L'algèbre des matrices carrées

- 2.1 Puissances de matrices, règles usuelles, cas de matrices qui commutent . . . . .
- 2.2 Matrices nilpotentes, indice de nilpotence . . . . .
- 2.3 Matrices diagonales, effet de la multiplication par une matrice diagonale à droite/gauche . . . . .
- 2.4 Matrices triangulaires . . . . .
- 2.5 Matrices symétriques, antisymétriques, « complémentarité » des sev correspondants . . . . .
- 2.6 Trace d'une matrice carrée, propriétés élémentaires . . . . .

### 3 Matrices et systèmes linéaires

- 3.1 Écriture matricielle d'un système linéaire . . . . .
- 3.2 Structure vectorielle de l'ensemble des solutions homogènes, affine de l'ensemble des solutions générales

### Démonstrations, exemples ou exercices exigibles comme questions de cours

- Chapitre 11. Variations des suites  $u_{n+1} = f(u_n)$  dans les cas  $f$  croissante et  $f$  décroissante (énoncé complet et preuve, pour chaque type de monotonie, d'un seul cas suivant l'ordre des premiers termes).
- Chapitre 12. Le produit de deux matrices triangulaires supérieures est triangulaire supérieure avec expression des coefficients diagonaux.
- Chapitre 12. Démontrer que  $\text{Tr}(AB) = \text{Tr}(BA)$  pour deux matrices  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , et que toute matrice de  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  se décompose de façon unique  $S + A$  avec  $S$  symétrique et  $A$  antisymétrique.

## Automatismes de calcul

On donne quelques exemples de capacité attendue pour chaque thème.

[Le cahier de calcul](#) fournit également une excellente source d'entraînement/inspiration.

- **Logique, raisonnement**

Exemples : montrer que  $x^2 + y^2 \geq 2xy$  pour tous  $x, y \in \mathbb{R}$ , savoir écrire en langage symbolique qu'une suite est majorée, qu'une fonction est  $2\pi$ -périodique et savoir nier ces assertions.

- **Trigonométrie.**

Exemples : formule  $\cos(2a)$ , résolution de  $\sin a = \sin b$ ,  $\cos(2x + 1) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ,  $\cos x = \sin x$ .

- **Inégalités : résoudre/prouver des inégalités simples**

Exemples : résoudre  $x|x| \leq 3x + 2$ , montrer que  $|\sin(nx)| \leq n|\sin x|$  pour tous  $n \in \mathbb{N}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , encadrer rapidement  $x \mapsto \frac{\cos x + 2}{x^2 + 4}$  sur  $[0; 1]$ .

- **Calcul élémentaire de nombres complexes** (module, argument, linéarisation, angle moitié, racines carrées,  $n$ -ièmes).

Exemples : calculer la forme exponentielle de  $\sqrt{3} - 3i$ , les racines carrées de  $3 - 4i$ , linéarisation de  $\cos^3 x$ , résolution de  $z^n = 1$  dans  $\mathbb{C}$ .

- **Calcul algébrique** (fractions, simplification d'expressions, sommes et produits usuels, coefficients binomiaux, formule du binôme, etc).

Exemples : donner la formule pour  $\sum_{k=1}^n q^k$ , calculer  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^k$ , écrire  $\prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k+1}$  avec des factorielles.

- **Définition, dérivée ou primitive d'une fonction usuelle.**

Exemples : définir  $\text{Arctan}$ , simplifier  $\text{Arccos}(\cos(7))$ , théorème de dérivation de  $g \circ f$ , dérivée de  $x \mapsto f(-x)$ , donner une primitive de  $x \mapsto \frac{x}{2x+1}$ , de  $x \mapsto \frac{\ln x}{x}$ , de  $x \mapsto \frac{x^2 + x}{x^2 + 1}$ , ensemble de définition, de dérivabilité et dérivée de  $x \mapsto \text{Arccos}\left(\frac{x}{x+1}\right)$ .

- **Techniques élémentaires de calcul intégral, IPP ou changement de variable simple.**

Exemples :  $\int^x \cos t e^{2t} dt$ ,  $\int_0^1 t e^t dt$ ,  $\int_0^1 \sqrt{1-t^2} dt$  en posant  $t = \sin x$ .

- **Équations différentielles.**

Exemple : résoudre  $xy' + y = x$  sur  $\mathbb{R}_+^*$ .

- **Suites récurrentes d'ordre 1 et 2.**

Exemples : expression de la suite vérifiant  $u_{n+1} = 2u_n + 1$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $u_0 = 1$ , expression de la suite vérifiant  $v_{n+2} = v_{n+1} + v_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $v_0 = v_1 = 1$ .

- **Matrices.**

Exemples : puissances de  $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ , de  $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .