CHAP. 13 : PROPAGATION D'UN SIGNAL

Objectifs :

- Identifier les grandeurs physiques correspondant à des signaux acoustiques, électriques, électromagnétiques ;
- Écrire le signal d'une source lumineuse ponctuelle en définissant les termes
- Citer quelques ordres de grandeur de fréquences dans les domaines acoustiques et électromagnétiques ;
- Ecrire les signaux sous la forme $f(t-x/c)$ et $g(t+x/c)$;
- Ecrire les signaux sous la forme $f(x-ct)$ et $g(x+ct)$;
- Prévoir dans le cadre d'une onde progressive pure, l'évolution temporelle à position fixée, et prévoir la forme à différents instants ;
- Etablir la relation entre la fréquence, la longueur d'onde et la célérité ;
- Milieux dispersifs ou non dispersifs. : Définir un milieu dispersif. Citer des exemples de situations de propagation dispersive et non dispersive.

I Signaux physiques

I.1) Définition

On appelle signal une ou plusieurs grandeurs physiquement mesurables par un capteur et pouvant varier dans le temps.

Un signal physique est transporté par une onde.

Rappel sur les ondes

Une onde est un phénomène de propagation d'une perturbation transportant de l'énergie mais sans transport global de matière.

Le signal est la modélisation physique de la perturbation

I.2) Classification des ondes

On peut catégoriser de plusieurs façons les ondes

a) Classification en fonction du milieu de propagation

On distingue les ondes en deux catégories :

- Les ondes **mécaniques**, qui se propagent **uniquement dans un support matériel** (vague, son, onde sismique…)

- Les ondes **électromagnétiques,** qui peuvent même **se propager dans le vide** (lumière visible, rayon X, onde radio…).

b) Classification en fonction de la capacité à se propager

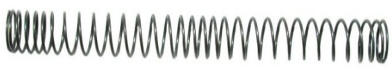
Définition : Une onde progressive est la propagation, à vitesse constante et sans déformation ni atténuation, de la perturbation dans un milieu de grande dimension.

Remarque : les ondes qui ne sont pas progressives peuvent être des ondes **stationnaires** : il y a vibration d'un milieu dont certains éléments restent fixes. C'est le cas d'une corde vibrante fixée à ses extrémités (corde de guitare).

c) Classification en fonction de la dimension

On distingue les ondes :

À une dimension : ex : propagation le long d'un axe (ressort)

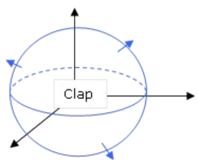


Le signal sera de la forme $s(x,t)$ ou $s(y,t)$ ou $s(z,t)$

À deux dimensions : ex : propagation dans toutes les directions du plan (surface de l'eau)

Le signal sera de la forme $s(x,y,t)$ ou $s(y,z,t)$ ou $s(z,x,t)$ ou en polaires $s(r,\theta,t)$

À 3 dimensions : propagation dans toutes les directions de l'espace



Ex : (certaines ondes sonores et la lumière)

$s(x,y,z,t)$ en coordonnées cartésiennes ou $s(r,\theta,\varphi,t)$

d) Ondes longitudinales et transversales

Remarque : il ne faut pas confondre direction de propagation et direction de la perturbation.

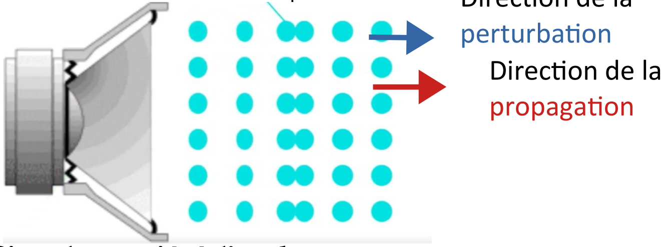
Si la direction de propagation **est la même** que la direction de la perturbation on parle d'ondes
longitudinales

Exemple 1: Les ondes sonores.animation

Milieu de propagation : l'air ou milieu materiel

Rmq : le son ne se propage pas dans le vide !

Nature de la perturbation : déplacement (oscillation) des molécules autour de leur position initiale



Signal associé à l'onde:

Surpression acoustique p(x,y,z,t)

$\mathbf{p(x,y,z,t) = P(x,y,z,t) - P_0}$

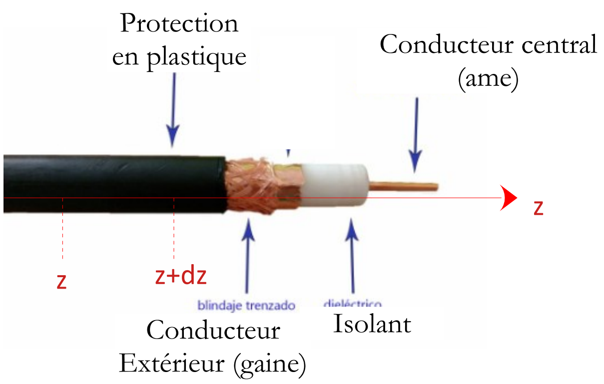
Pression totale — P atm

ODG : fréquences audibles [20 Hz,20kHz]

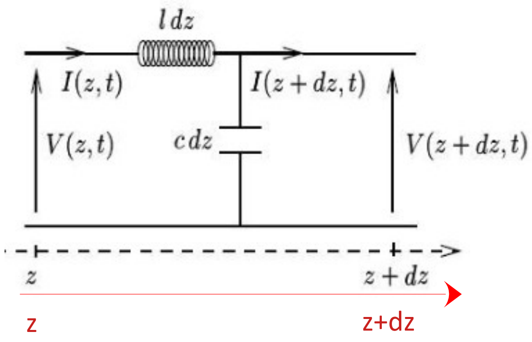
Ultrasons : f>20kHz

Infrasons : f<20 Hz

Exemple 2: L'intensité du courant électrique Dans un câble coaxiale



Modélisation :



Signal associé à l'onde:

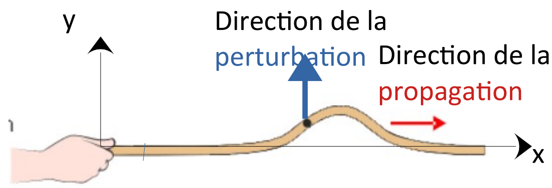
Intensité du courant dans l'âme I(z,t) *qui dépend de* z

Si la direction de propagation **est différente** de la direction de la perturbation on parle d'ondes
Transversales

Exemple 1 : Une onde sur une corde

Milieu de propagation : la corde

Nature de la perturbation : déplacement selon $\vec{e}_y$ de chaque point de la corde.



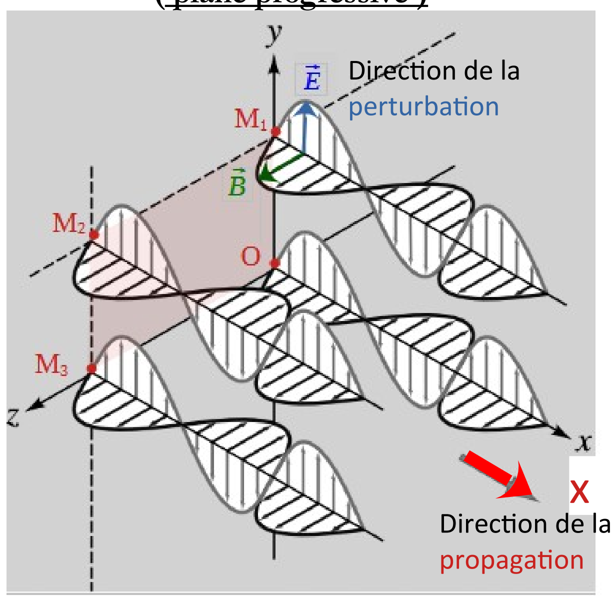
Signal associé à l'onde :

Déplacement vertical y(x,t)

Le déplacement y dépend de la position x
(tout les points de la corde ne sont pas à la même altitude y)

animation

Exemple 2 : Onde électromagnétique (plane progressive)



Signaux associé à l'onde :

Champ électrique

$$\vec{E}(x,t)=\begin{pmatrix}0\\E_y(x,t)\\0\end{pmatrix}_{\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z}$$

Champ magnétique

$$\vec{B}(x,t)=\begin{pmatrix}0\\0\\B_z(x,t)\end{pmatrix}_{\vec{e}_x,\vec{e}_y,\vec{e}_z}$$

Fréquences des signaux électromagnétiques

Téra=10^{12}

-fréquences visibles : $f \in [4\,10^{14}\,Hz, 8\,10^{14}\,Hz]$ (400 à 800 THz) correspond à l'intervalle de λ [400 nm, 800nm]

- ondes radios $f < 100\,MHz$

$f = \frac{c}{\lambda}$ c= 3 10^8m/s

- micro-ondes $f \in [10^8\,Hz, 8\,10^{10}\,Hz]$ (0,1 GHz à 100 GHz) odg pour λ : 1 cm
- infrarouge $f \in [10^{11}\,Hz, 10^{14}\,Hz]$ émis naturellement par le corps et la Terre odg pour λ : 1 µm
- ultra-violet $f \in [10^{15}\,Hz, 10^{17}\,Hz]$ (1 à 100 PétaHz) émis par le soleil Péta =10^{15} odg pour λ : 1 nm
- rayons X $f \in [10^{17}\,Hz, 10^{20}\,Hz]$ utilisés en radiographie odg pour λ : 0,1 nm = 10^{-10}m

-rayons gamma $f > 10^{20}\,Hz$ ZettaHz = 10^{21} Hz

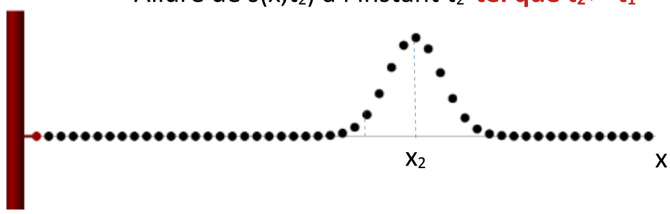
II Modélisation de la propagation d'un signal

II.1 Onde progressive à 1D

a *Illustration expérimentale* animation

Allure de $s(x,t_1)$ à l'instan t_1

Allure de $s(x,t_2)$ à l'instant t_2 **tel que $t_2 > t_1$**



b *Définition*

la perturbation se propage dans **une seul direction (paramétrée par la variable x)** avec la vitesse de propagation (ou célérité c) il ne se déforme pas et ne s'atténue pas (l'amplitude reste la même)

On modélise cette perturbation **progressive à 1D sans atténuation** par une fonction de deux variable :

le signal s(x,t)

II.2 Expression du signal s(x,t)

*a) **Première écriture (méthode type « photo »)***

En analysant les deux photographie ci dessus on voit que :

- le point d'amplitude max était en x_1 à t_1 , le point d'amplitude max est ensuite en x_2 à t_2

on en déduit que la perturbation a parcouru une distance $\delta = x_2 - x_1$ entre t_1 et t_2.

Comme la propagation s'effectue à la célérité constante c : $\boldsymbol{\delta = x_2 - x_1 = c(t_2 - t_1)}$

- Il n'est pas nécessaire de considérer le point point d'amplitude max :

Pour tout point x sur la corde :

la perturbation en x à t_2 est la même que la perturbation en x-δ à t_1 avec $\boldsymbol{\delta = c(t_2 - t_1)}$

Interprétation mathématique : $\forall x$ **$s(x,t_2) = s(x-\delta,t_1)$**

ce raisonnement est valable pour tout couple (t_1,t_2) notamment en prenant t_1 =0 et t_2 =t :

s(x,t)= s(x-δ,0) on $\delta = c(t_2 - t_1) = ct$ donc s(x,t) = s(x-ct , 0)=s(x-ct) :

Une onde progressive se propageant dans le sens des x croissants sans atténuation ni déformation est modélisée par un signal de la forme **s(x,t)= f(x-ct)** **(pour propa x↑** ❤

Rmq : si le signal se propage dans le sens des x décroissant :

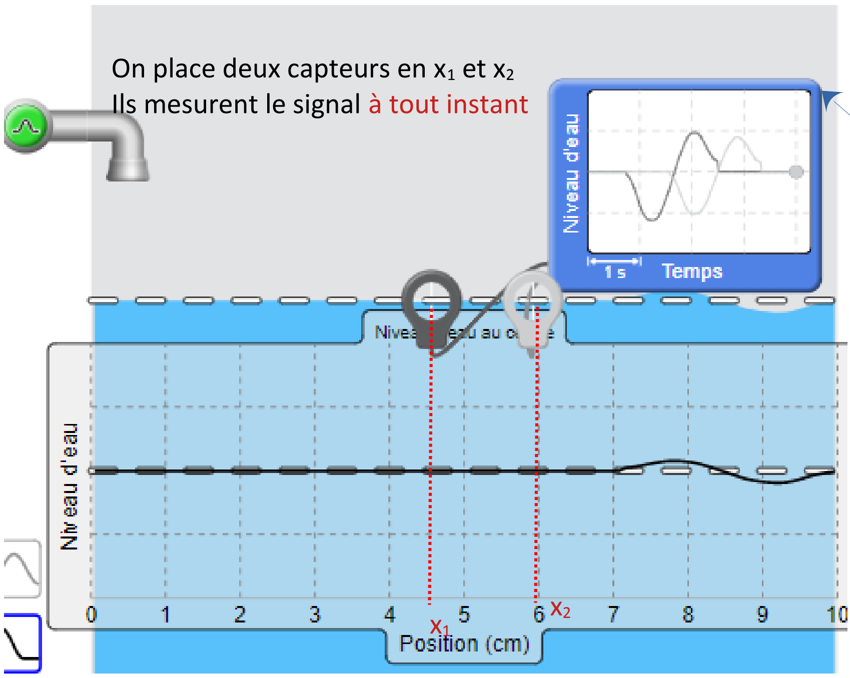
la perturbation en x à t_2 est la même que la perturbation en x+δ à t_1 avec $\delta = c(t_2 - t_1)$

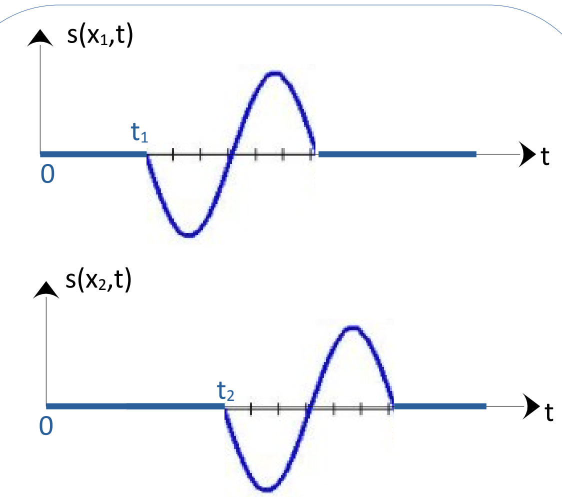
Interprétation mathématique : $\forall x$ **$s(x,t_2) = s(x+\delta,t_1)$**

avec le même raisonnement :

Une onde progressive se propageant dans le sens des x décroissant sans atténuation ni déformation est modélisée par un signal de la forme **$s(x,t) = f(x+ct)$** **(pour propa x↓)**

b ***Deuxième écriture (méthode type « capteur »)*** *animation*





L'onde arrive en x_2 avec un retard :

$$\tau = t_2 - t_1 = \frac{x_2 - x_1}{c}$$

à tout instant t, le signal en x_2 est égale au signal en x_1 à l'instant t-τ : $s(x_2,t) = s(x_1,t-\tau) = s(x_1, t-(x_2-x_1)/c)$

notamment en $x_1 = 0$ et $x_2 = x$: $s(x,t) = s(0, t-(x)/c)$ - on en déduit $s(x,t) = s(t-x/c)$

Une onde progressive se propageant dans le sens des x croissants sans atténuation ni déformation est modélisée par un signal de la forme $s(x,t) = g(t-x/c)$ (pour propa x↑)

Une onde progressive se propageant dans le sens des x décroissant sans atténuation ni déformation est modélisée par un signal de la forme $s(x,t) = g(t+x/c)$ (pour propa x↓)

III Cas particulier de l'onde progressive sinusoïdale (OPS)

III.1 Définition

Voc : on parle aussi d'onde progressive harmonique (OPH)

animation

$$s(x,t)=f\left(t-\frac{x}{c}\right)=A_0\cos\left(\omega\left(t-\frac{x}{c}\right)+\phi_0\right)$$ (pour propa x↑)

A_0 est l'amplitude de l'onde, ω la pulsation , $\phi_0 \in]-\pi,\pi]$ **l a phase à l'origine**

Attention il y a deux variables : x et t à la différence de la solution de l'équation de l'oscillateur harmonique où la seul variable était t

Une bonne façon de voir l'OPS :https://emanim.szialab.org/index_fr.html

Autre écriture en développant : $s(x,t)=A_0\cos\left(\omega t-x\frac{\omega}{c}+\phi_0\right)$

En posant $k=\frac{\omega}{c}$ le vecteur d'onde (en $rad.m^{-1}$, dimension L^{-1})

on arrive à l'expression

$$s(x,t)=A_0\cos(\omega t-kx+\phi_0)$$ **(pour propa x↑)**

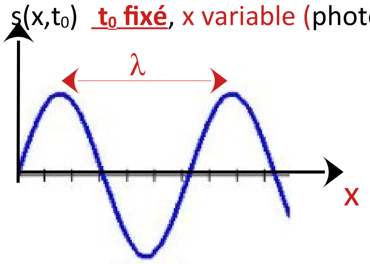
Rmq : Pour une propagation dans le sens des x décroissants :

$$s(x,t)=A_0\cos(\omega t+kx+\phi_0)$$

III.2 Double périodicité

a) Périodicité spatiale

s(x,t₀) t₀ fixé, x variable (photo)



On appelle λ
La période spatiale.
C'est la plus petite distance telle que
$s(x+\lambda,t_0)\stackrel{\text{def}}{=}s(x,t_0)$

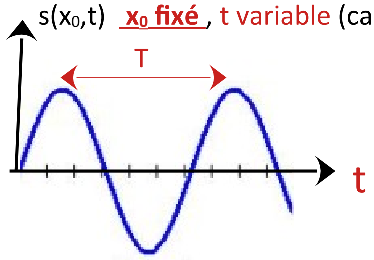
$A_0\cos(\omega t_0-kx-k\lambda+\phi_0)=A_0\cos(\omega t_0-kx+\phi_0)$

Par identification $k\lambda=2\pi$ *(cos est 2π pério)*

donc $k=\frac{2\pi}{\lambda}$ où λ est la longueur d'onde (ou période spatiale)

b) Périodicité temporelle

s(x₀,t) x₀ fixé, t variable (capteur)



On appelle T
La période temporelle
C'est la plus petite durée telle que
$s(x_0,t+T)\stackrel{\text{def}}{=}s(x_0,t)$

$A_0\cos(\omega t-\omega T-kx_0+\phi_0)=A_0\cos(\omega t-kx_0+\phi_0)$

Par identification $\omega T=2\pi$ *(cos est 2π pério)*

donc $\omega=\frac{2\pi}{T}$ où T est la période temporelle

c) Relation entre les périodes spatiales et temporelles

$k=\frac{2\pi}{\lambda}$ et $\omega=\frac{2\pi}{T}$ et ω = k c donc λ = c T

III.3 Déphasage (ou retard de phase) dû à la propagation

a) Définition du déphasage entre deux signaux

soit les signaux : $s_1(x,t)=A_1\cos(\omega_1 t+\phi_1(x))$ et $s_2(x,t)=A_2\cos(\omega_2 t+\phi_2(x))$

On appelle déphasage la différence des phases instantanée entre les deux signaux :

$$\Delta\phi=\omega_2 t+\phi_2(x)-(\omega_1 t+\phi_1(x))\Leftrightarrow\Delta\phi=(\omega_2-\omega_1)t+\phi_2(x)-\phi_1(x)$$

Si les signaux sont synchrones (c-à-d de même fréquence) on a $f_1=f_2$ soit $\omega_1=\omega_2$ et $\boxed{\Delta\phi=\phi_2(x)-\phi_1(x)}$

b) Déphasage dû à la propagation d'une OPS

On considère maintenant un seul signal associé à une OPS se propageant dans le sens des x croissants :

$$s(x,t)=A_0\cos(\omega t-kx+\phi_0)$$

En O prit comme origine des phases : $s(0,t)=s_0\cos(\omega t+\phi_0)$

En A d'abscisse x_A : $s(x_A,t)=s_0\cos(\omega t-k x_A+\phi_0)=s_0\cos(\omega t+\Phi(A))$

En B d'abscisse x_B $s(x_B,t)=s_0\cos(\omega t-k x_B+\phi_0)=s_0\cos(\omega t+\Phi(B))$

Le déphasage (**ou retard de phase) du signal en B <u>par rapport</u> au signal en A est la différence de leurs phases instantanées :**

$$\boxed{\Delta\Phi_{propa}=\Phi(B)-\Phi(A)\quad\text{soit}\quad\Phi(B)=\Phi(A)+\Delta\Phi_{propa}}$$

c) Expression en fonction de la longueur d'onde

$$\Delta\Phi_{propa}=\Phi(B)-\Phi(A)=-kx_B+\phi_0-(-k x_A+\phi_0)=-k(x_B-x_A)$$

$$\Delta\Phi_{propa}=-k(x_B-x_A)$$

on en déduit $\boxed{\Delta\Phi_{propa}=\frac{-2\pi}{\lambda}(x_B-x_A)}$

d) Expression du retard de phase en fonction du délai de propagation entre deux points

$$s(x_B,t)=s_0\cos(\omega t+\Phi(A)+\Delta\Phi_{propa})=s_0\cos(\omega(t+\frac{\Delta\Phi_{propa}}{\omega})+\Phi(A))$$

On voit que $s(x_B,t)=s(x_A,t+\frac{\Delta\Phi_{propa}}{\omega})$

Avec des mots : le signal en B à l'instant t est égale au signal en A à l'instant $t+\frac{\Delta\Phi_{propa}}{\omega}$

e) condition pour que deux points soit en phase ou en opposition de phase

le signal en x_B est en phase avec le signal en x_A si $s(x_B,t)=s(x_A,t)$ à tout instant

mais comme $s(x_B,t)=s(x_A,t+\frac{\Delta\Phi_{propa}}{\omega})$ il faut $s(x_A,t)=s(x_A,t+\frac{\Delta\Phi_{propa}}{\omega})$

c'est à dire $s_0\cos(\omega t-k x_A+\phi_0)=s_0\cos(\omega(t-\frac{\Delta\Phi_{propa}}{\omega})-k x_A+\phi_0)$

soit $\cos(\omega t-k x_A+\phi_0)=\cos(\omega t-\Delta\Phi_{propa}-k x_A+\phi_0)$

comme le cos est 2π périodique il faut forcement $\Delta\Phi_{propa}=p2\pi\quad p\in\mathbb{Z}$ et de plus $\Delta\Phi_{propa}=-(x_B-x_A)\frac{2\pi}{\lambda}$

ainsi $-(x_B - x_A)\dfrac{2\pi}{\lambda} = p2\pi \quad p\in\mathbb{Z}$ soit $(x_B - x_A) = -p\lambda \quad p\in\mathbb{Z}$

finalement : les signaux sont en phase si $x_B - x_A = n\lambda \quad n\in\mathbb{Z}$

Deux signaux sont en opposition de phase si $s(x_B,t) = -s(x_A,t)$ à tout instant

soit $\cos(\omega t - kx_A + \phi_0) = -\cos(\omega t - \Delta\Phi_{propa} - kx_A + \phi_0)$

comme cos(2π p + π +x) = -cos(x) on en déduit $\Delta\Phi_{propa} = p2\pi + \pi \quad p\in\mathbb{Z}$

de plus $\Delta\Phi_{propa} = -(x_B - x_A)\dfrac{2\pi}{\lambda}$ donc $-(x_B - x_A)\dfrac{2\pi}{\lambda} = p2\pi + \pi \quad p\in\mathbb{Z}$

soit $(x_B - x_A) = -p\lambda - \dfrac{\lambda}{2} \quad p\in\mathbb{Z}$ $\qquad (x_B - x_A) = -(p + \dfrac{1}{2})\lambda \quad p\in\mathbb{Z}$

finalement : les signaux sont en opposition de phase si $x_B - x_A = (n + \dfrac{1}{2})\lambda \quad n\in\mathbb{Z}$

IV Prise en compte de l'atténuation dans la propagation

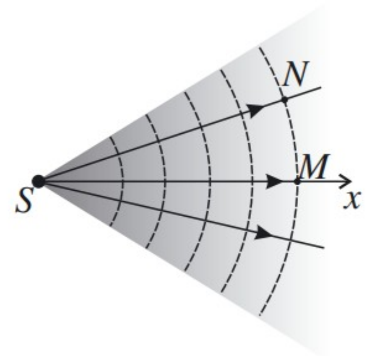
IV.1) Exemple de la source lumineuse ponctuelle

a) Rappel

Une source ponctuelle S est une source de dimensions infiniment petites, assimilable à un point tel que :

- les rayons lumineux sont les droites issues de S,

- les points situés sur une même sphère de centre S (tels que les points M et N sur la figure) reçoivent des signaux identiques (c'est à dire que **l'amplitude** du champ $\vec{E}$ prend la même valeur en ces points)



Source ponctuelle monochromatique

- Une source ponctuelle et monochromatique est une source ponctuelle émettant une onde lumineuse monochromatique, c'est-à-dire purement sinusoïdale.

b) Signal associé à une source ponctuelle monochromatique

Tout axe (Sx) d'origine S est un rayon lumineux et on peut écrire le long de ce rayon l'expression du signal lumineux reçu en x à la date t:

$$s(x,t) = \underbrace{\frac{\alpha}{x}}_{\text{Amplitude A(x)}}\cos(\omega t - kx + \phi_0) = \frac{\alpha}{x}\cos(\omega t + \phi(x))$$

Rmq : L'amplitude A(x) décroît avec x car l'énergie de l'onde se dilue sur des surfaces sphériques de plus en plus grande au fur et à mesure de la propagation. On admettra qu'elle se met sous la forme : A(x) = α /x où α est une constante.

c) propagation dans un milieu optique dispersif :

Définition : un milieu est dispersif si la célérité de l'onde qui se propage dans ce milieu dépend de la longueur d'onde $c = c(\lambda)$

Par exemple pour une onde lumineuse cela signifie qu'une lumière bleue ne se propage pas à la même célérité qu'une lumière rouge .

Exemple de milieu dispersif : le verre

on a vu que dans un milieu transparent la célérité de la lumière est $c = c_0 / n$

avec $c_0 = 3\ 10^{8}$ m /s dans le vide

en réalité $n = a + \frac{b}{\lambda^2}$ avec a et b positifs

donc comme $\lambda_{bleue} < \lambda_{rouge}$ on a $n_{bleu} > n_{rouge}$ et $c_{bleu} < c_{rouge}$