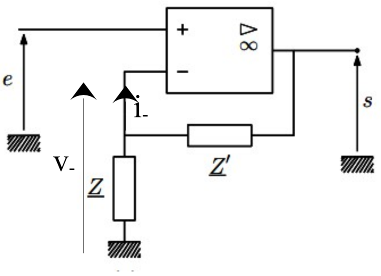
PCSI | **TD12 Correction**
Rétroaction : exemple de l'ALI

Exercice 2 : utilisation des impédances équivalentes



Il y a une rétroaction sur la borne -, le régime de fonctionnement est probablement linéaire. Si c'est bien le cas on a $v_+=v_-$

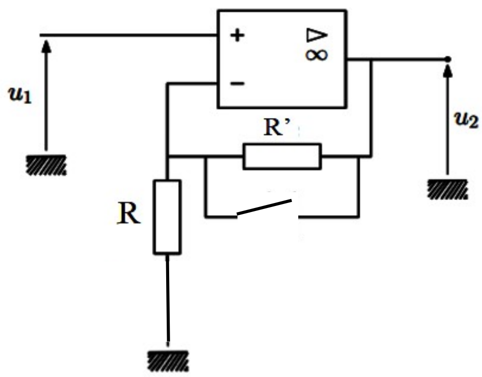
dans ce montage $v_+ = e$
comme l'ALI est idéal $i_- = 0$ Z et Z' sont en série
on peut donc utiliser la formule du pont diviseur de tension pour exprimer v_- en fonction de s

$$v_-=\frac{\underline{Z}}{\underline{Z}'+\underline{Z}}s$$

comme $v_+=v_-$ on a $e=\frac{\underline{Z}}{\underline{Z}'+\underline{Z}}s\Rightarrow\frac{\underline{s}}{\underline{e}}=1+\frac{\underline{Z}'}{\underline{Z}}$

$\underline{Z}=jL\omega+R$ et $\underline{Z}'=\frac{\frac{R'}{jC\omega}}{\frac{1}{jC\omega}+R'}\Rightarrow\underline{Z}'=\frac{R'}{jR'C\omega+1}$

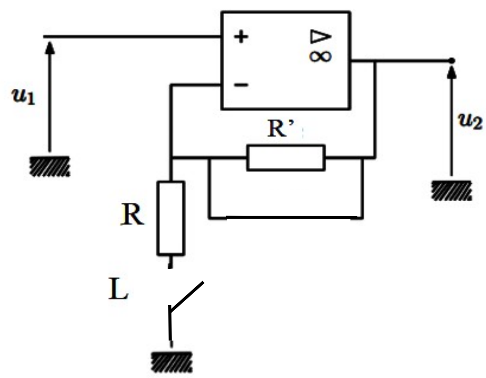
en B.F



le montage est équivalent à un amplificateur non inverseur de gain :

$$\underline{H}=1+\frac{R'}{R}$$

en H.F



le montage est équivalent à un suiveur

$$\underline{H}=1$$

Remarque : ce n'est ni un passe haut ni un passe bas ni un passe bande , il n'y a pas de forme canonique pour ce filtre

$$\underline{H}=1+\frac{\underline{Z}'}{\underline{Z}}=1+\frac{R'}{(1+jR'C\omega)(R+jL\omega)}$$

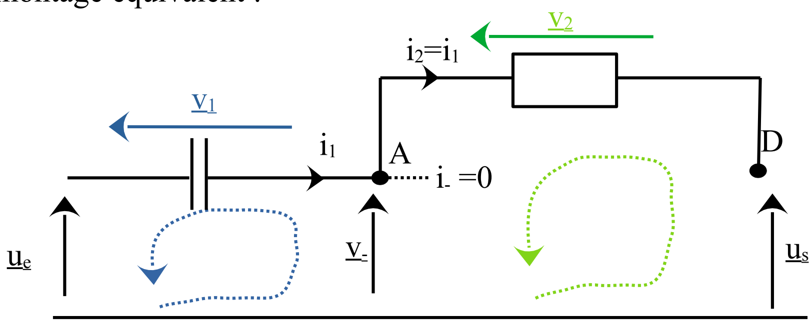
en B.F $\omega\rightarrow 0$ donc $\underline{H}\approx 1+\frac{R'}{R}$ en H.F $\underline{H}\approx 1-\frac{R'}{R'CL\omega^2}$ qui tend bien vers 1

Exercice 3 : Montage dérivateur *

1. Il y a une rétroaction sur la borne inverseuse (-), l'ALI fonctionne probablement en régime linéaire

2. si l'ALI fonctionne en régime linéaire alors $\boxed{v_+ = v_-}$ et $i_+ = i_- = 0$ tout se passe comme si C et R étaient en série

montage équivalent :



Les flèches de tensions ne sont pas des fils !

- Loi des mailles dans la maille bleue : $\underline{u_e} = \underline{v_1} + \underline{v_-}$ .De plus comme $v_+ = 0$ et qu'en régime linéaire $v_+ = v_- \rightarrow$ **$\underline{v_-} = 0$**
on en déduit : $\underline{u_e} = \underline{v_1}$

-Loi des mailles dans la maille verte : $\underline{v_-} = \underline{v_2} + \underline{u_s}$ et comme **$\underline{v_-} = 0$** on en déduit $\underline{v_2} = -\underline{u_s}$

en utilisant les relations tension courant avec les impédances complexes :
$\underline{v_1} = \frac{1}{jC\omega}\underline{i_1}$ et $\underline{v_2} = R\underline{i_2}$ mais comme $i_1 = i_2$ $\underline{v_2} = R\underline{i_1}$

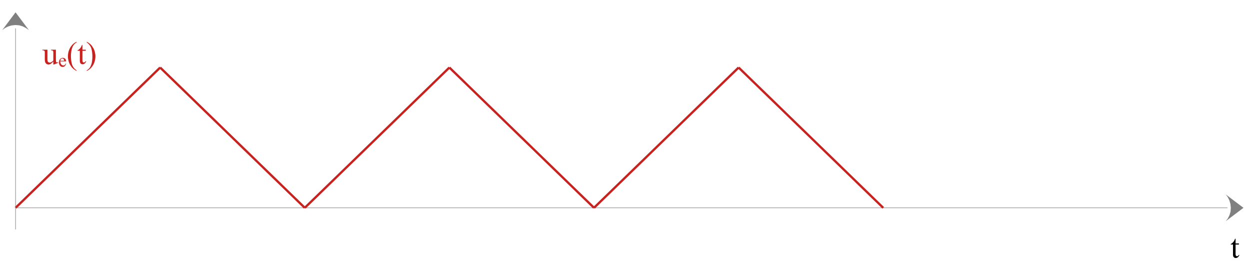
ainsi : $\underline{u_e} = \underline{v_1} = \frac{1}{jC\omega}\underline{i_1}$ et $\underline{u_s} = -\underline{v_2} = -R\underline{i_1}$ finalement $\underline{H} = \frac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}} = \frac{-R\cancel{\underline{i_1}}}{\frac{1}{jC\omega}\cancel{\underline{i_1}}} \Rightarrow$ $\boxed{\underline{H} = -jRC\omega}$

on a $\underline{H} \approx -jRC\omega$ soit $\underline{u_s} = -RCj\omega\underline{u_e}$ comme $j\omega\underline{u_e} = \frac{d}{dt}\underline{u_e}$

on en déduit qu'on a aussi dans ce cas dans le domaine réel $\boxed{\boldsymbol{u_s = -RC\frac{d}{dt}u_e}}$

Le signal de sortie est proportionnelle à la dérivée temporelle du signal d'entrée
le montage réalise donc une dérivation et (un changement de signe à cause du moins)

4.



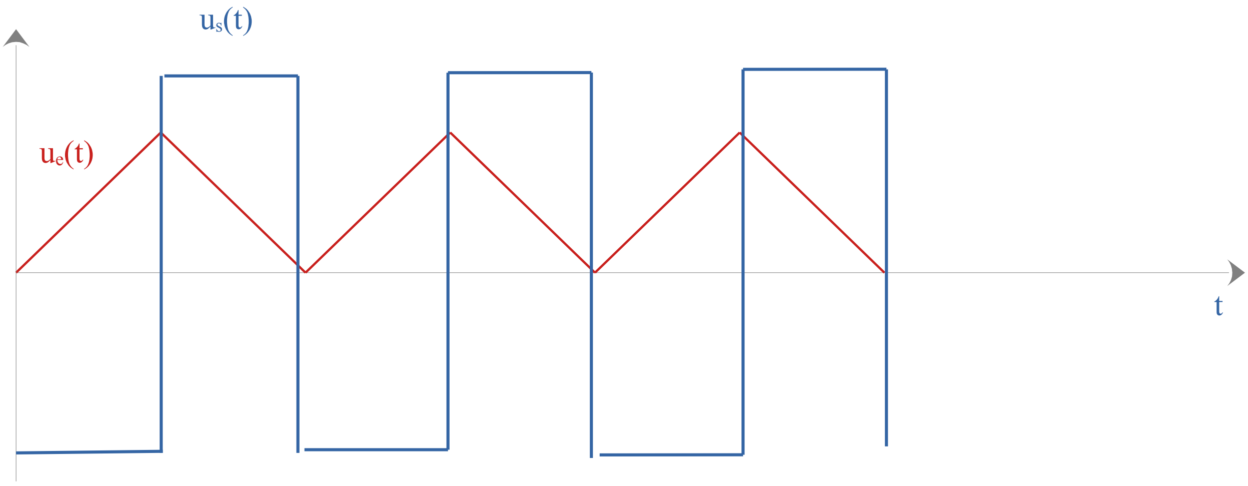
Sur la phase montante on a $u_e(t) = at + b$ (avec a positif pour que la tension augmente)

Comme $u_s = -RC\frac{d}{dt}u_e$ alors: $u_s = -RCa$

la tension de sortie est donc négative et constante quand la tension d'entrée est sur la phase montante

par un raisonnement similaire on montre que $u_s = RCa$ sur la phase descendante de $u_e(t)$

4.

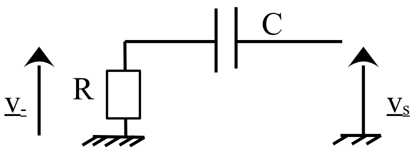


Exercice 4 Montage intégrateur *

1. Il y a rétroaction sur la borne inverseuse (-), l'ALI fonctionne probablement en régime linéaire

2. si l'ALI fonctionne en régime linéaire alors $\boxed{\underline{v_+} = \underline{v_-}}$ et $i_+ = i_- =0$ tout se passe comme si C et R étaient en série

montage équivalent :



En utilisant la formule du pont diviseur de tension (avec les impédances complexes)

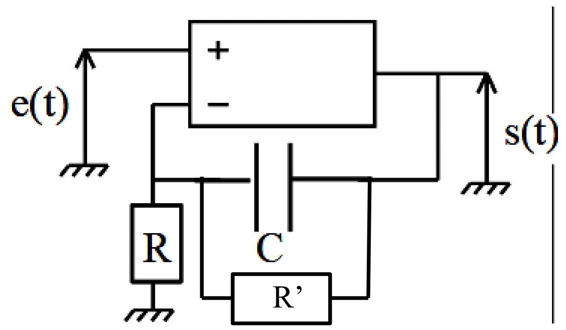
$$\underline{v_-} = \frac{R}{\frac{1}{jC\omega}+R}\underline{v_s} \Leftrightarrow \underline{v_-} = \frac{jRC\omega}{1+jRC\omega}\underline{v_s}$$

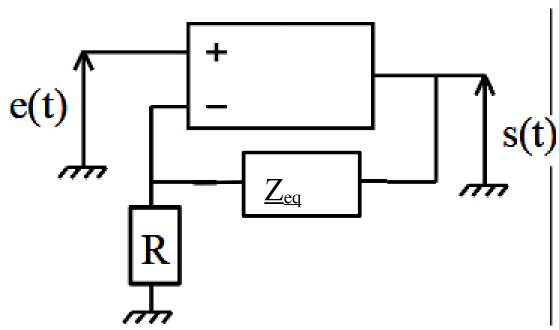
Comme $\underline{v_+} = \underline{v_-}$ et que $\underline{v_e} = \underline{v_+}$: $\underline{v_e} = \frac{jRC\omega}{1+jRC\omega}\underline{v_s} \Rightarrow \frac{\underline{v_s}}{\underline{u_e}} = \frac{1+jRC\omega}{jRC\omega}$ on a donc $\boxed{\underline{H}=1+\frac{1}{jRC\omega}}$

à très basse fréquence (c'est à dire quand ω << RC) on a $\underline{H} \approx \frac{1}{jRC\omega}$ or $|\underline{H}(\omega \to 0)| \approx \frac{1}{RC\omega}$ qui tend vers l'infini quand ω tend vers 0 .

Ainsi la composante continue v_0 de l'entrée va être très amplifiée
en effet, la composante continue de la sortie sera $s_0 =$ $|\underline{H}(\omega \to 0)| \times e_0$ qui t'en vers l'infini . or on sait que la tension de sortie ne peut pas dépasser + V_{sat}. **L'ALI va donc fonctionner en régime saturé $s(t) = + V_{sat}$**
autre justification : avec un schéma équivalent du condensateur (interrupteur ouvert en TBF) on voit qu'il n'y a plus rétroaction sur la borne négative → le régime de fonctionnement est saturé $s(t)$ =+- V_{sat}

2,3 et 4





$$\underline{Z}_{eq}=\frac{1}{\frac{1}{\underline{Z}_c}+\frac{1}{\underline{R}'}}=\frac{1}{jC\omega+\frac{1}{R}'}\Rightarrow \underline{Z}_{eq}=\frac{R'}{1+jR'C\omega}$$

On peut montrer par un raisonnement similaire à la première question : $\underline{H}'=1+\frac{\underline{Z}_{eq}}{R}\Rightarrow \boxed{\underline{H}'=1+\frac{\frac{R'}{R}}{1+jR'C\omega}}$

5)
-à basse fréquence : $\underline{H}'\approx 1+\frac{\frac{R'}{R}}{1+0}=1+\frac{R'}{R}$ le gain à basse fréquence vaut donc $|\underline{H}'(0)|=1+\frac{R'}{R}$ qui est fini

on n'a plus le problème de la question 1(saturation de l'ALI) si le rapport R'/ R est suffisamment faible

6) si R' C ω > >1 alors $1+jR'C\omega\approx R'C\omega$ et $\underline{H}'\approx 1+\frac{\frac{R'}{R}}{jR'C\omega}\approx 1+\frac{1}{jRC\omega}$

si RC ω < < 1 alors $\frac{1}{jRC\omega}\gg 1$ donc $\underline{H}'\approx\frac{1}{jRC\omega}$

on a donc $\frac{\underline{s}}{\underline{e}}\approx\frac{1}{jRC\omega}\Rightarrow \underline{s}=\frac{1}{RC}\times\frac{\underline{e}}{j\omega}$ comme $\frac{1}{j\omega}\underline{e}=\int \underline{e}\,dt$

Le signal de sortie est proportionnelle à la primitive temporelle du signal d'entrée
le montage réalise donc une intégration

7) On considère le signal d'entrée $e(t) = v_1\cos(\omega t)$ **, tel que** $\frac{1}{\mathrm{R'C}}\ll\omega\ll\frac{1}{\mathrm{RC}}$

dans ce cas le signal de sortie vaut $s(t)=\frac{1}{RC}\int v_1\cos(\omega t)\,dt=\frac{1}{RC}v_1\sin(\omega t)$

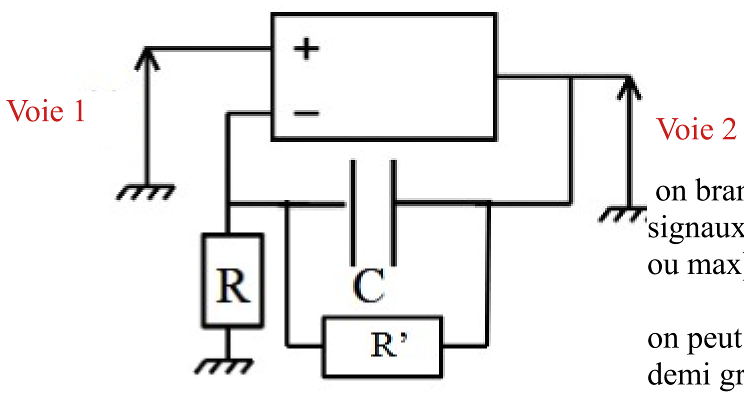
comme $\sin(\omega t)=\cos(\omega t-\frac{\pi}{2})$ la sortie est bien déphasé de π/2 par rapport à l'entrée

autre façon de répondre : pour un signal sinusoïdal pur en entrée de pulsation ω , le déphasage de la sortie par rapport à l'entrée est égale à l'argument de la fonction de transfert du filtre à la pulsation ω :

$\Phi_{s/e}=arg(\underline{H}'(\omega))$ or dans l'intervalle de fréquence étudié :

$\underline{H}'\approx\frac{1}{jRC\omega}$ donc $\Phi_{s/e}=arg(\underline{H}'(\omega))=arg(\frac{1}{j})=arg(-j)=-\frac{\pi}{2}$

8) On utilise un oscilloscope



on branche les voies 1 et 2 comme indiqué on affiche les deux signaux en même temps et on vérifie si un signal est extrémal (min ou max) quand l'autre est nul

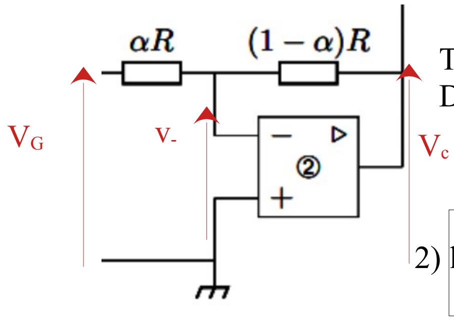
on peut aussi passer en mode X-Y et observer une ellipse dont le demi grand axe est soit sur l'axe X soit sur l'axe Y mais pas « penché » »

<u>Exercice 5 capacité réglable</u>

1) a) rétroaction sur borne inverseuse donc régime probablement linéaire et comme l'ALi est idéal $v_+ = v_-$
Or ici $v_+ = 0$ (borne + reliée à la masse par un fil)

1b)

on peut supprimer le fil lié à la borne – car $i_- = 0$ (ALI idéal)



Théorème De Milmann

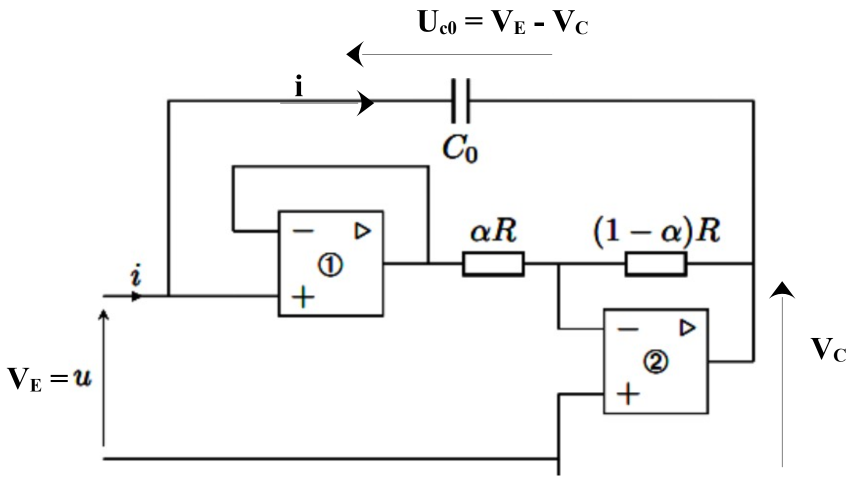
$$v_- = V_A = \frac{\frac{1}{(1-\alpha)R}V_C + \frac{1}{\alpha R}V_G}{\frac{1}{(1-\alpha)R} + \frac{1}{\alpha R}}$$

2) le montage est un suiveur donc $V_E = V_G$

3) on suppose le régime linéaire pour l'ALI 2 donc $v_+ = v_-$
et ici $v_+ = 0$ donc $V_A = 0$

Le Théorème de Milmann devient : $\frac{-v_C}{(1-\alpha)R} = \frac{v_G}{\alpha R}$ et comme $V_E = V_G$ $\quad v_C = V_E \frac{(\alpha-1)}{\alpha}$

on prend maintenant le montage dans son ensemble



On veut montrer que le montage équivaut à un condensateur. Concrètement, on cherche donc à établir une relation entre i et u qui soit celle d'un condensateur, soit $\underline{u} = \frac{1}{jC\omega}\underline{i}$ ou dans le domaine réel $i = C\frac{du}{dt}$ avec $u = V_E$

$$U_{c0} = V_E - V_C = \left(1 - \frac{(\alpha-1)}{\alpha}\right)V_E \Rightarrow U_{c0} = \frac{V_E}{\alpha} \quad \text{et} \quad i = C_0\frac{dU_{c0}}{dt} = C_0\frac{1}{\alpha}\frac{du}{dt} \Rightarrow \quad i = \frac{C_0}{\alpha}\frac{dV_E}{dt}$$

ainsi par identification $\boxed{C = \frac{C_0}{\alpha}}$

L'intérêt du montage est qu'il est très simple de faire varier α (il suffit de faire tourner le curseur d'un potentiomètre) pour adapter la capacité à la volonté, ce qui est infiniment (et même plus !) plus simple que de changer le condensateur du montage.

Exercice 6 :Intégrateur différentiel

Un pont diviseur de tension dans la branche du bas donne

$$\frac{\underline{V_+}}{\underline{E_2}} = \frac{1/\mathrm{j}C\omega}{R+1/\mathrm{j}C\omega} = \frac{1}{1+\mathrm{j}RC\omega}$$

Or en fonctionnement linéaire on a

$$\underline{V_-} = \underline{V_+} = \frac{1}{1+\mathrm{j}RC\omega}\underline{E_2}\,.$$

En fusionnant les deux équations,

$$\frac{\underline{E_1}}{R} - \frac{1}{R(1+\mathrm{j}RC\omega)}\underline{E_2} + \mathrm{j}C\omega\underline{S} - \frac{\mathrm{j}C\omega}{1+\mathrm{j}RC\omega}\underline{E_2} = 0$$

soit

$$\frac{\underline{E_1}}{\mathrm{j}RC\omega} - \frac{1}{\mathrm{j}RC\omega(1+\mathrm{j}RC\omega)}\underline{E_2} + \underline{S} - \frac{1}{1+\mathrm{j}RC\omega}\underline{E_2} = 0$$

et ainsi

$$\underline{S} = -\frac{\underline{E_1}}{\mathrm{j}RC\omega} + \frac{\underline{E_2}}{\mathrm{j}RC\omega}\left(\frac{1}{1+\mathrm{j}RC\omega} + \frac{\mathrm{j}RC\omega}{1+\mathrm{j}RC\omega}\right)$$

ce qui donne au final

$$\boxed{\underline{S} = \frac{1}{\mathrm{j}RC\omega}\left(\underline{E_2} - \underline{E_1}\right)\,.}$$

On utilise la correspondance habituelle pour passer dans le domaine temporel,

$$\boxed{s(t) = s(0) + \frac{1}{RC}\int_0^t (e_2 - e_1)\mathrm{d}t\,.}$$

Exercice 7 intérêt du montage suiveur

1) $\underline{H_0}=\dfrac{1}{1+jRC\omega}$

2.a) $\underline{H_1}=\dfrac{Z_{eq}}{R+Z_{eq}}$ avec $\underline{Z_{eq}}=\dfrac{1}{jC\omega+\dfrac{1}{R_u}}\Rightarrow Z_{eq}=\dfrac{R_u}{1+jR_uC\omega}$ donc $\underline{H_1}=\dfrac{\dfrac{R_u}{1+jR_uC\omega}}{R+\dfrac{R_u}{1+jR_uC\omega}}$

$$\underline{H_1}=\frac{R_u}{R+R_u+jR_uRC\omega}=\boxed{\frac{\dfrac{R_u}{R+R_u}}{1+j\dfrac{R_uR}{R+R_u}C\omega}}$$

2.b) la pulsation de coupure est maintenant $\boxed{\omega_c'=\dfrac{1}{\dfrac{R_uR}{R_u+R}C}}$ si on change R_u la pulsation de coupure varie aussi, ce n’est pas ce qu’on souhaite en général

3) l’ALI est un suiveur, son impédance d’entrée est infini (les courants de polarisation sont nuls)

4) et 5). Comme $i_+=0$ on peut considérer que R et C sont en série donc on applique directement le pont diviseur de tension et

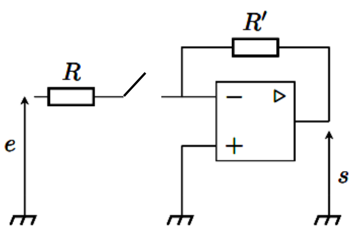
$v_+=\dfrac{\dfrac{1}{jC\omega}}{R+\dfrac{1}{jC\omega}}v_e\Rightarrow\boxed{v_+=\dfrac{1}{1+jRC\omega}v_e}$ or comme l’ALI est en régime linéaire probablement (car rétroaction sur la borne négative on a $v_+ = v_-$. or ici $v_- = v_s$ donc finalement $v_s=\dfrac{1}{1+jRC\omega}v_e\Rightarrow\boxed{\underline{H_2}=\underline{H_0}=\dfrac{1}{1+jRC\omega}}$

la fonction de transfert est la même qu’à vide d’où l’intérêt d’utiliser l’ALI

Exercice 8 : Filtre actif en régime linéaire et ou saturation

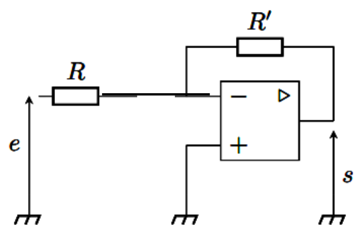
1)

En B.F schéma eq



la sortie est nulle car l'ALI n'est pas alimenté

En H.F schéma eq



La sortie est non nulle $s=\frac{-R'}{R}e$

C'est donc un passe haut

2) - Établir sa fonction de transfert sous forme canonique

méthode classique pour montage inverseur (on introduit une impédance équivalente $\underline{Z_{eq}}=R+\frac{1}{jC\omega}$)

on a $\underline{H}=\frac{-R'}{\underline{Z_{eq}}}$ donc $\underline{H}=\frac{-R'}{R+\frac{1}{jC\omega}} \Leftrightarrow \underline{H}=\frac{-R'}{R-\frac{j\times 1}{C\omega}}$ finalement $\underline{H}=\frac{-\frac{R'}{R}}{1-\frac{j}{RC\omega}}$

Par identification $\boxed{\underline{H_0}=\frac{-R'}{R} \text{ et } \omega_c=\frac{1}{RC}}$

3) On souhaite une pulsation de coupure $\omega_c = 1 \cdot 10^4$ rad · s $^{-1}$ et un gain de 20 dB en haute fréquence. Déterminer les valeurs à donner à R′ et C pour R =1 kΩ.

- En H.F $\underline{H}\approx-\frac{R'}{R}$ donc $|\underline{H}(\omega)|\approx\frac{R'}{R}$ et $GdB(\omega)\approx 20\log(\frac{R'}{R})$ on veut $GdB(\omega)=20$ en H.F

  ainsi $\log(\frac{R'}{R})=1\Rightarrow \boxed{R'=10^1 R=10\,k\Omega}$

$\omega_c=\frac{1}{RC}=10^4\Rightarrow C=\frac{1}{R\,10^4}\Rightarrow \boxed{C=0{,}1\,\mu F}$

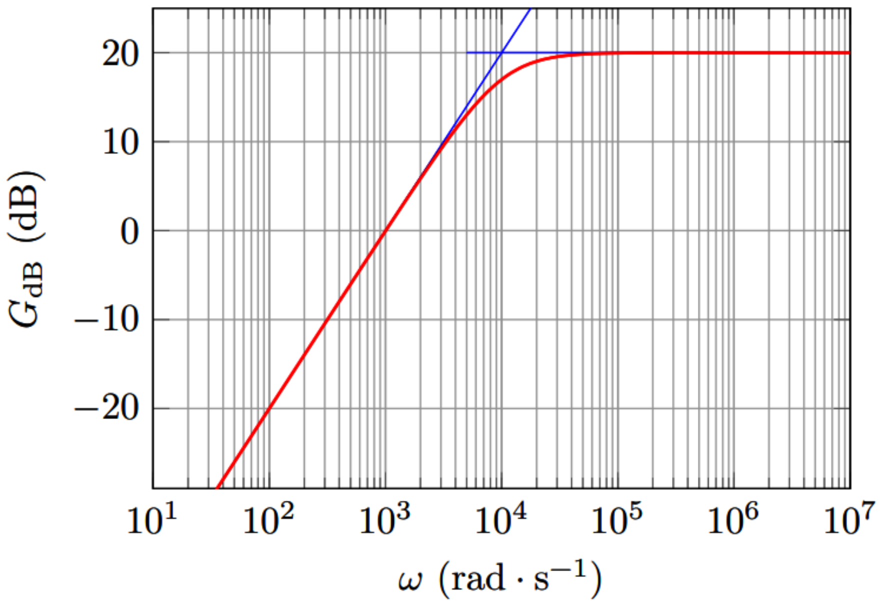
4)

-Dans la limite des basses fréquences $\boxed{\underline{H}\approx\frac{\underline{H_0}}{-j\frac{\omega_c}{\omega}}}$ soit $GdB(\omega)=20\log(|\underline{H}|)=20\log(\omega)+20\log(\frac{|\underline{H_0}|}{\omega_c})$

donc la courbe du gain en dB est donc asymptote à une droite de pente de 20 dB par décade en B.F

- En H.F $\underline{H}\approx H_0$ donc GdB = 20log($|H_0|$) = 20 dB → la courbe du gain en dB est donc asymptote à une droite horizontale à 20 dB en H.F

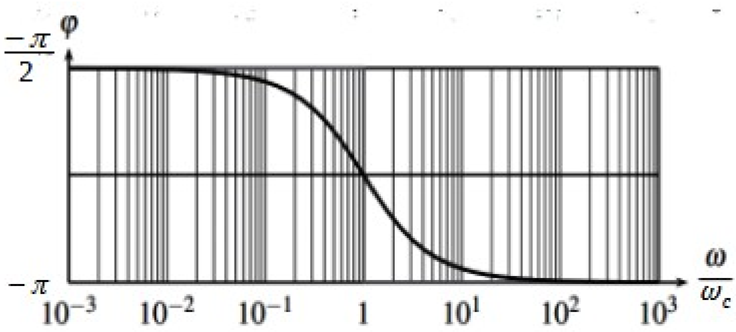
les deux asymptotes se coupent à l'abscisse ω_c



Pour le digramme de phase

en H.F $\phi = arg(\underline{H}) \approx arg(H_0) = arg(\frac{-R'}{R}) = -\pi$ (on aurait pu choisir π)

en B.F $\phi = arg(\frac{H_0}{-j\frac{\omega_c}{\omega}}) \approx arg(-j\frac{R'}{R}\frac{\omega}{\omega_c}) = \frac{-\pi}{2}$ (ou aurait pu choisir $3\frac{\pi}{2}$)



5)

Le plus simple est de raisonner sur le diagramme de Bode, seul le dernier cas n'est pas évident.

▷ $E_0 = 1$ V et $\omega = 1 \cdot 10^2$ rad · s^{-1} : on calcule (ou on constate sur le diagramme) que :

GdB = −20 dB donc |H| = $10^{-20/20}$ = 1/10, le signal de sortie est donc sinusoïdal d'amplitude **$E_0/10$ = 0,1 V**

Le spectre identique à celui de l'entrée, à l'amplitude près.

▷ $E_0 = 3$ V et $\omega = 1 \cdot 10^2$ rad · s^{-1} : de même, le signal de sortie est sinusoïdal d'amplitude 0,3 V.

▷ $E_0 = 1$ V et $\omega = 1 \cdot 10^5$ rad · s^{-1} : à cette pulsation :
GdB = 20 dB donc |H| = $10^{20/20}$ = 10, le signal de sortie est donc sinusoïdal d'amplitude $10E_0$ = 10 V.

▷ $E_0 = 3$ V et $\omega = 1 \cdot 10^5$ rad · s^{-1} : en reprenant le raisonnement précédent, le signal de sortie devrait avoir une amplitude de 30 V ... ce qui est impossible, car la tension de sortie doit rester inférieure à la tension de saturation de l'ALI. Le signal de sortie est donc un sinus écrêté, qui conserve la valeur de ±15 V dès que l'ALI est en saturation. Cela se traduit par un **enrichissement spectral** : outre le fondamental à $1 \cdot 10^5$ rad · s^{-1} , des harmoniques apparaissent dans le spectre à $2 \cdot 10^5$,$3 \cdot 10^5$, $4 \cdot 10^5$ rad · s^{-1} etc. mais prévoir leur amplitude n'est pas simple.

Exercice 9 ALI avec défauts

1) La seule rétroaction étant négative, l'ALI fonctionne probablement en régime linéaire. On a donc
$\underline{v_s} = \underline{A_d} \times \underline{\epsilon} \Rightarrow \underline{v_s} = \underline{A_d} \times (\underline{v_+} - \underline{v_-}) \Rightarrow \underline{v_s} = \underline{A_d} \times (\underline{v_e} - \underline{v_s})$
$v_+ = v_e$ car on suppose $i_+ = 0$. la tension au borne de R_g est nulle . Une loi des mailles donne $v_+ = v_e$

ce qui donne $(1+\underline{A_d})\underline{v_s} = \underline{A_d}\,\underline{v_e}$ finalement $\underline{v_s} = \dfrac{\underline{A_d}}{1+\underline{A_d}}\underline{v_e}$ donc $\underline{v_s} = \dfrac{A_0}{1+A_0+j\omega\tau}\underline{v_e}$

en supposant $A_0 \gg 1$, $\underline{v_s} \approx \dfrac{A_0}{A_0+j\omega\tau}\underline{v_e} \Rightarrow \underline{v_s} \approx \dfrac{1}{1+j\omega\dfrac{\tau}{A_0}}\underline{v_e}$

Le montage est un suiveur : dans la limite basse fréquence, l**a tension de sortie est identique à la tension d'entrée,** indépendamment des deux résistances R_u et R_g

(on peut le voir grâce à la fonction de transfert en supposant qu'on est à faible pulsation devant $\dfrac{\tau}{A_0}$

2) Le spectre du signal v_e ne contient qu'un seul pic, d'amplitude E, à la pulsation ω.

▷ Expérience 1 : l'amplitude d'entrée est telle que l'ALI sature car E > 14V , ce qui est source d'enrichissement spectrale (la sortie n'est plus sinusoïdale mais toujours périodique) → **spectre B.**

▷ Expérience 2 et 3
la fréquence est élevé dans l'expérience 2 et faible dans la 3 c
comme $\underline{v_s} = \dfrac{1}{1+j\omega\dfrac{\tau}{A_0}}\underline{v_e}$ alors l'amplitude de la sortie vaut $V_s = \left|\dfrac{1}{1+j\omega\dfrac{\tau}{A_0}}\right| E$ soit $V_s = \dfrac{1}{\sqrt{1+(\omega\dfrac{\tau}{A_0})^2}} E$

si on suppose que $\omega > \dfrac{A_0}{\tau}$ (car haute fréquence) alors l'amplitude de la sortie est plus faible que celle de l'entrée mais la sortie est toujours sinusoïdale donc un seul pic dans le spectre

pour la même amplitude de l'entrée et une fréquence plus faible , la sortie aura une amplitude plus importante (comportement passe bas du montage)

ainsi expérience 2 → spectre C et expérience 3 → spectre A